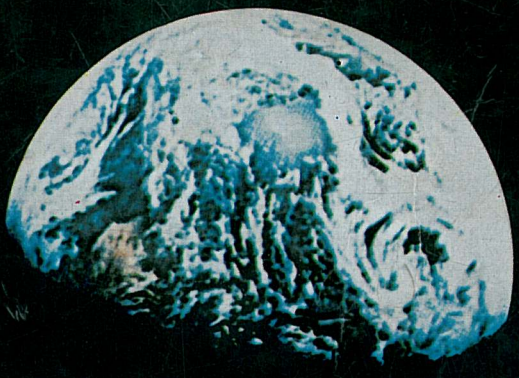
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM APLICAÇÕES



Rodney Carlos Bassanezi
Wilson Castro Ferreira Jr.

editora HARBRA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

COM APLICAÇÕES

Rodney Carlos Bassanezi
Wilson Castro Ferreira Jr.

Professores do Instituto de Matemática, Estatística
e Ciência da Computação da UNICAMP

editora HARBRA ltda.

A **editora HARBRA ltda.** *deseja agradecer a valiosa colaboração do Prof. Antônio Pertence Jr. na editoração desta obra.*

Direção Geral:	Julio E. Emöd
Supervisão Editorial:	Maria Pia Castiglia
Coordenação Editorial:	Maria Elizabeth Santo
Revisão de Estilo:	Maria Lúcia G. Leite Rosa
Revisão de Provas:	Maria Paula Santo
Assistente Editorial:	Vera Lucia Juriatto da Silva
Composição:	AM Produções Gráficas Ltda.
Capa:	Maria Paula Santo
Fotolitos:	H.O.P. Fotolitos Ltda.
Impressão:	Cromoset Gráfica e Editora Ltda.

Fotografia da Capa: NASA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM APLICAÇÕES
Copyright © 1988 por **editora HARBRA ltda.**
Rua Joaquim Távora, 609, Vila Mariana, São Paulo, SP
Telefones: 549-2244 e 571-0276

Reservados todos os direitos. É terminantemente proibido reproduzir esta obra, total ou parcialmente, por quaisquer meios, sem autorização expressa dos editores.

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

CONTEÚDO

Prefácio

Capítulo 1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UM POUCO DE HISTÓRIA 1

1.1 Equações Diferenciais como Matemática Aplicada 1
1.2 Modelo Matemático 3
1.3 Breve Histórico das Equações Diferenciais 7
1.4 Modelos Matemáticos e as Equações Diferenciais 9
1.4.1 Equações Diferenciais Ordinárias — Conceitos Básicos 11

Capítulo 2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM 14

2.1 Introdução — Equação Diferencial Fundamental 14
2.2 Equação Geral de Primeira Ordem 18
2.3 Equações Diferenciais Autônomas 24
2.3.1 Modelos Matemáticos Envolvendo Equações Autônomas 30

MODELO 1 Crescimento de uma Célula 30
MODELO 2 Juros Compostos e Inflação 34
MODELO 3 Desintegração Radioativa 36
MODELO 4 Absorção de Drogas 40
MODELO 5 Resfriamento de um Corpo — Difusão de Calor 43
MODELO 6 Difusão de Moléculas através de uma Membrana Celular 45
MODELO 7 Dinâmica Populacional 48

2.4 Equação com Separação de Variáveis 55

MODELO 8 Crescimento Específico ou Lei da Alometria 57

2.5 Equações Homogêneas 58
2.5.1 Equações Quase Homogêneas 60

2.6 Equações Lineares de Primeira Ordem 64

MODELO 9 Despoluição de Lagoas 67
MODELO 10 Digestão de Ruminantes 72

2.7 Equações Especiais: Bernoulli, Clairaut e Riccati 78

2.7.1 Equações de Bernoulli (em Homenagem a Jacob Bernoulli — 1654-1705) 78

MODELO 11 Crescimento de Peixes (von Bertalanffy) 79

2.7.2 Equações de Clairaut 83

2.7.3 Equação de Riccati 86

MODELO 12 Transporte de Partículas 86

2.7.4 Equações Redutíveis às de Primeira Ordem 89

MODELO 13 Corda Suspensa (Catenária) 91

2.8 Equações Exatas 93

2.8.1 Condição de Euler 93

2.8.2 Fator Integrante 96

MODELO 14 Espelho Parabólico 98

2.9 Modelos Geométricos — Trajetórias 100

2.10 Equações de Diferenças de Primeira Ordem 104

2.10.1 Equação de Diferenças Linear de Primeira Ordem (em Coeficientes Constantes) 106

MODELO 15 Orçamento Familiar 108
MODELO 16 Modelo de Harrod: Poupança, Investimento e Renda 109

Capítulo 3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES 111

3.1 Introdução 111

3.2 Modelos Matemáticos com Equações Diferenciais Ordinárias Lineares 114

MODELO 1 Vibrações Mecânicas de Pequena Amplitude 114
MODELO 2 Circuitos Elétricos RLC — Oscilações 120
MODELO 3 Rede de Circuitos 123
MODELO 4 Distribuição Estacionária de Temperatura em uma Barra Não Homogênea 125
MODELO 5 Distribuição de Partículas 127
MODELO 6 Propagação de Ondas Monocromáticas em um Meio Unidimensional 128

3.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares — Princípio de Superposição 131

3.3.1 Introdução 131

3.3.2 O Espaço de Soluções da Equação Homogênea 134

3.3.3 Equações Diferenciais para Funções de Variáveis Reais e Valores Complexos 139

3.4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes 140

3.4.1 Introdução 140

3.4.2 Álgebra dos Operadores Diferenciais Lineares de Coeficientes Constantes 140

3.4.3 Solução Completa da Equação Homogênea $\mathbf{L}u = 0$ — Método Operacional 143

3.4.4 Resolução Completa de Equações Não Homogêneas do Tipo $P(D)z = q(x)e^{ax}$ 147

3.4.4.1 Introdução 147

3.4.4.2 Solução de $P(D)z = e^{ax}$ 149

3.4.4.3 Método de Quase Inversão 151

3.4.5 Estabilidade em Equações Lineares com Coeficientes Constantes 155

3.4.5.1 Introdução 155

3.4.5.2 Conceito de Estabilidade e Caracterização 156

3.4.5.3 Critério de Estabilidade 158

3.4.6 Análise da Equação $P(D)z = e^{i\omega t}$ 162

3.4.6.1 Introdução 162

3.4.6.2 Regime Transiente e Permanente 164

3.4.6.3 Ressonância Externa e Interna 168

3.4.7 Análise de Choques em Equações Diferenciais $P(D)z = f$ com f Descontínua 172

3.4.7.1 Função de Heaviside $H(t)$ 172

3.4.7.2 Condições de Choque 175

3.4.7.3 Método de Duhamel 178

3.4.8 Análise de Pulsos — Princípio de Superposição de Dirac-Green 181

3.5 Equações Lineares de Diferenças Finitas 187

3.5.1 Conceitos Básicos 187

3.5.2 Problema Semidiscretizado da Corda Vibrante 190

3.5.3 Seqüência de Fibonacci 194

3.5.4 Funções Geradoras — Transformada $\mathbb{Z}$ 199

3.6 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Coeficientes Variáveis 202

3.6.1 Introdução 202

3.6.2 Equações de Segunda Ordem Auto-Adjuntas: Fatoração do Operador Diferencial 205

3.6.3 Operações Lineares Não Singulares com Coeficientes Analíticos 207

3.6.3.1 Somas de Potências 207

3.6.3.2 Resolução de Equação $\mathbf{L}u = \left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right) = u = 0$ com Coeficientes p e q Analíticos 211

3.6.4 Operadores Diferenciais Lineares Singulares com Coeficientes Analíticos 217

3.6.5 Funções de Green e o Método de Superposição de Dirac para a Equação Não Homogênea 232
3.7 Transformada de Laplace 246
3.7.1 Definição e Propriedades da Transformada de Laplace 246
3.7.2 Solução de Problemas de Cauchy Usando Transformada de Laplace 251
3.7.3 Transformada de Laplace de Funções Descontínuas 254
3.7.4 Função Delta de Dirac e a Transformada de Laplace 259

Capítulo 4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES 264

4.1 Introdução 264
4.2 Propriedades Básicas dos Sistemas Lineares 268
4.2.1 Propriedades Lineares Gerais 268
4.3 Interpretação Geométrica (Teoremas de Euler e Liouville) 272
4.4 Resolução da Equação Não Homogênea: Função de Green 275
4.5 Existência e Unicidade de Soluções do Problema de Cauchy Linear 279
4.6 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Coeficientes Constantes — Resolução Algébrica 288
4.7 Sistemas Conservativos — Coordenadas Normais 293

MODELO 1 Vibrações Moleculares 300
MODELO 2 Movimento Vibratório de um Cristal 303

4.8 Modelos de Compartimentos 311
4.9 Sistema Linear Não Homogêneo: Método da Transformada de Laplace 315

Capítulo 5 EQUAÇÕES NÃO LINEARES — ESTUDO QUALITATIVO 321

5.1 Introdução 321
5.2 Sistemas Autônomos 324
5.3 Sistemas Autônomos Lineares — Estudo Qualitativo no Plano 334

MODELO 1 Estratégia de Armamentos 347

5.4 Funções Integrais de um Sistema Autônomo 354
5.5 Teoria da Estabilidade — Método de Lyapunov 363
5.6 Sistemas Autônomos Quase Lineares 369

MODELOS MATEMÁTICOS — UM ESTUDO QUALITATIVO
MODELO 1 Competição entre Duas Espécies (um Modelo mais Geral) 377
MODELO 2 Presa-Predador (Lotka-Volterra) 383
MODELO 3 Modelo Geral Presa-Predador (Kolmogorov) 390
MODELO 4 Epidemias 395
MODELO 5 Biodigestores 403
MODELO 6 Lei da Gravitação Universal 411

Capítulo 6 EQUAÇÕES NÃO LINEARES — ESTUDO ANALÍTICO 425

6.1 Equações de Euler-Lagrange: Problemas de Fronteira 425
6.1.1 Princípio de Fermat e a Lei de Snell 425
6.1.2 Formulação Variacional 438
6.2 Modelos Discretos: Biomatemática 442
6.2.1 Crescimento de uma População 443
6.2.1.1 Modelo de Malthus (os Nascimentos e Mortes em um Intervalo de Tempo Unitário são Proporcionais ao Tamanho da População no Início deste Intervalo) 443
6.2.1.2 Modelo de Verhulst (População Inibida) 443
6.2.1.3 Modelo Geral para Populações Inibidas (Ciclo Limite) 444
6.2.2 Presa-Predador (Caso Discreto) 446
6.2.3 Competição entre Espécies 447
6.2.3.1 Competição entre Duas Espécies 447
6.2.3.2 Competição entre Três Espécies 447
6.2.4 Epidemia (Modelo Discreto) 447
6.2.4.1 Sem Renovação 447
6.2.4.2 Modelo SIS 448
6.3 Métodos Recursivos — Teoremas de Existência 449
6.3.1 Introdução 449
6.3.2 Teorema de Banach 452
6.3.3 Método de Perturbações 457
6.3.4 Métodos Iterativos para Equações Funcionais 461

Capítulo 7 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS 469

7.1 Introdução 469
7.2 Princípios de Conservação e a Origem de Algumas Equações Diferenciais Parciais Clássicas 470
7.2.1 Descrição de um Meio Contínuo 471
7.2.2 Equação de Conservação — Fórmula de Massa 473
7.2.3 Equação de Conservação da Quantidade de Movimento para um Meio Unidimensional 477
7.2.4 Lei de Conservação de Energia — Equação de Difusão 484
7.2.5 Lei de Conservação de Massa com Difusão 486
7.2.6 Leis de Conservação em Dinâmica Populacional 488
7.2.7 Leis de Conservação Multidimensional 490
7.2.8 Equação de Difusão — Movimento Browniano — Difusão de Partículas 497
7.3 Princípios Variacionais 503
7.3.1 Introdução 503
7.3.2 Princípio de Dirichlet-Lagrange ou de Energia Mínima 505
7.3.3 Princípio de Hamilton 512
7.3.4 Princípio de Huygens e a Equação de Hamilton-Jacobi 515
7.3.5 Princípio de Otimização de Bellman 520

7.4 Classificação das Equações Diferenciais Parciais 528
7.4.1 Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem 528
7.4.1.1 Equações de Conservação de Primeira Ordem 528
7.4.1.2 Equações de Hamilton-Jacobi e Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem Escalares e Não Lineares 530
7.4.2 Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem 531
7.4.2.1 Equações de Difusão 531
7.4.2.2 Equações Diferenciais Parciais de Vibração e Propagação de Ondas 534
7.4.2.3 Equações de Equilíbrio 536
7.5 Métodos de Resolução para Equações de Primeira Ordem 538
7.5.1 Método das Características para Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem Lineares 538
7.5.2 Método das Características para Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem Quase Lineares 547
7.5.3 Formação de Singularidades — Ondas de Choque 551
7.5.4 Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem Não Lineares 561

Índice Remissivo 569

PREFÁCIO

Este livro foi escrito para ser utilizado de maneiras diversas: como texto para cursos de Equações Diferenciais, como material para desenvolvimento de programas de Iniciação Científica ou simplesmente para estudos individuais. A ideologia da sua concepção é o assunto de boa parte do Capítulo 1 e o seu conteúdo está explícito no índice.

O plano original sofreu modificações contínuas durante seu desenvolvimento, influenciado pela própria dinâmica dos argumentos envolvidos, bem como pela utilização parcial nas disciplinas e programas desenvolvidos pelos autores em cursos na UNICAMP, em cursos de extensão e aperfeiçoamento de professores em diversas universidades e projetos de Iniciação Científica. Esta diversidade contribuiu para que o livro não tivesse um caráter regional no seu endereçamento, e desde o início assumimos o propósito de traduzir nosso depoimento pessoal sobre as Equações Diferenciais procurando quase sempre uma maneira atraente de apresentá-las.

Não seria possível descrever este livro como uma simples coletânea de tópicos constantes de alguma ementa, nem como uma estrutura rígida e estática. Ao contrário, melhor seria compará-lo a uma trajetória, uma viagem ou até mesmo uma aventura através do vastíssimo campo das equações diferenciais e suas aplicações.

As equações diferenciais constituem um dos mais notáveis sucessos do intelecto humano, tanto como um corpo de teorias matemáticas como ferramenta de análise indispensáveis no exercício da atividade profissional e científica em diversas áreas da Física, Química, Biologia, Economia e Tecnologia contemporânea.

Portanto, a formação universitária nestes vários ramos do conhecimento é, em muitos casos, incompleta se o estudo das equações diferenciais for reduzido a um simples capítulo das tradicionais disciplinas de Cálculo Diferencial, ou então a uma série de "receitas" (como não é raro acontecer nas disciplinas de Métodos Matemáticos).

Em primeiro lugar, para que o treinamento em equações diferenciais tenha algum valor a nível profissional e não fique apenas em curiosidades inócuas, é indispensável que ele seja precedido de um bom conhecimento do alicerce básico da educação matemática superior que consiste no Cálculo Diferencial e dos elementos de Álgebra Linear.

A ênfase especial que é dada no texto a modelos matemáticos de problemas da Física, Engenharia e Biologia não se contrapõe à apresentação da teoria e não tem por objetivo apenas exemplificar a eficiência das equações diferenciais no estudo de outras disciplinas. Consideramos estes tópicos como parte essencial do livro e indispensável para o domínio da teoria matemática, tanto nas suas motivações e origens quanto nas suas técnicas.

Os pré-requisitos não matemáticos necessários para o estudo destes modelos são em geral modestos e na maioria das vezes desenvolvidos na própria formulação do modelo, facilitando propositadamente a sua compreensão por qualquer leitor, independente do seu interesse principal.

Os exercícios propostos, que também são considerados parte integrante do texto, destinam-se a verificar o aprendizado das técnicas e conceitos e, principalmente, estimular o leitor a avançar por seu próprio trabalho em tópicos próximos ao assunto central. Exercícios especiais denominados *Projetos* têm por objetivo indicar rumos para aqueles que desejem aprofundar seus estudos em alguma direção particular e adquirir autoconfiança e independência em um trabalho de maior fôlego. Estes projetos são conjuntos de sugestões e orientações gerais que não prevêem um caminho único e nem um resultado determinado, mas deixam amplo espaço à criatividade do leitor.

A teoria matemática constitui o fio principal que dirige o desenvolvimento do assunto e é apresentada com o rigor usual dos textos de matemática neste nível. Evitamos, todavia, o excesso de enunciados e demonstrações que freqüentemente encobrem as idéias básicas e obscurecem a sua simplicidade em um emaranhado lógico. Apenas os resultados essenciais e básicos são agraciados com o título de teorema e devem receber por isto uma atenção especial por parte do leitor, tanto na compreensão do seu enunciado como na sua demonstração. Freqüentemente alguns argumentos são apresentados por meio de observações, que podem ser facilmente verificadas pelo leitor. Afinal, o estudo participativo é a única maneira eficiente para a assimilação de conceitos e técnicas de natureza matemática.

A interdependência natural e histórica entre a teoria e as aplicações das equações diferenciais é destacada e explorada em todo o livro, que deve ser visto como um todo, onde um conhecimento seguro da teoria é indispensável para o estudo dos modelos, que, por sua vez, fornecem a motivação e os problemas relevantes para a teoria.

A variedade de modelos e aplicações tratados no livro permite que, a partir de uma abordagem comum, os interesses diversos dos leitores possam ser enfatizados por conta própria, embora aplicações em diferentes áreas exemplifiquem aspectos distintos e importantes da teoria, e não devem ser desprezadas em nome de uma especialização precoce.

Os dois capítulos iniciais são essencialmente introdutórios e, pelo menos quanto ao seu conteúdo teórico, devem ter sido estudados pelo leitor no seu curso de Cálculo Diferencial. Todavia, a abordagem utilizada talvez apresente novidades e o seu estudo facilitará o entendimento dos capítulos seguintes.

Os Capítulos 3 e 4, que apresentam as equações diferenciais ordinárias lineares (escalares e vetoriais), ocupam uma parte considerável deste livro e uma posição central no desenvolvimento da teoria, além de proporcionarem um maior número de aplicações.

No estudo das equações lineares de coeficientes constantes (diferenciais e de diferenças) são introduzidas e exemplificadas algumas idéias fundamentais da análise linear que, além de tornarem a teoria destas equações clara e livre das ingênuas "receitas" do tratamento tradicional, formam uma base conceitual e técnica valiosa para o estudo de uma vasta e importante área da análise matemática e suas aplicações, inclusive das próprias equações diferenciais em um nível mais avançado. Estes capítulos são, portanto, importantes não apenas pela teoria que abordam e os problemas que são resolvidos, como também pelas técnicas e conceitos de análise que são introduzidos no seu estudo.

Como princípio geral da sua concepção, este livro não pretende simplesmente "resolver" algumas equações diferenciais por meio de artifícios isolados e desconexos, mas apresentar

um corpo orgânico de métodos e teorias que tenham uma abrangência ampla como métodos matemáticos da análise.

Em nenhum momento, todavia, a fidelidade a esta concepção foi colocada acima do objetivo da clareza de exposição. Por outro lado, é necessário que o leitor compreenda que não há uma escolha simples entre este e aquele método, mas um processo de perdas e ganhos em que uma pequena dificuldade local pode compensar uma melhor compreensão do ponto de vista global e vice-versa.

Nos Capítulos 5 e 6 são apresentados alguns métodos para o estudo das equações não lineares onde a ênfase está muito mais em aspectos qualitativos (plano de fase, estabilidade) do que em resultados analíticos explícitos ou aproximados. Nestes capítulos são tratados alguns dos resultados mais difíceis e profundos da teoria básica, tal como o Teorema de Existência, Unicidade e Dependência de Parâmetros, que é demonstrado por métodos iterativos funcionais, cujas idéias básicas são obtidas do tratamento das equações recursivas de primeira ordem.

O último capítulo trata das equações diferenciais parciais que não são uma simples extensão das equações ordinárias. O desenvolvimento de suas diversas teorias exige em geral aparatos mais sofisticados da análise matemática do que o esperado para o leitor deste livro.

Conseqüentemente a ênfase deste capítulo está na apresentação da origem comum destas equações como modelos matemáticos e suas interpretações. As equações clássicas de equilíbrio, difusão e propagação e as equações de primeira ordem são obtidas como modelos de problemas da Física, Engenharia e Biologia a partir de princípios básicos e gerais de conservação e variacionais. O objetivo principal deste capítulo é a formulação e a interpretação dos problemas clássicos de equações diferenciais, sendo um primeiro e indispensável passo para o estudo de qualquer teoria ou método de análise destas equações.

Os únicos métodos de resolução apresentados aqui se aplicam às equações de primeira ordem que não são usualmente tratadas nos textos tradicionais do assunto, e utilizam fundamentalmente a teoria das equações diferenciais ordinárias, o que lhes confere uma razão especial para constar deste livro.

Os métodos de Fourier, que em muitas situações são também redutíveis aos problemas de Sturm-Liouville para equações ordinárias, não são tratados pois exigiriam o desenvolvimento de material adicional de análise matemática, o que tornaria o tamanho deste livro exagerado.

Gostaríamos de expressar nossos agradecimentos às inúmeras pessoas que influenciaram em nossa formação matemática, em especial aos professores N. Onuchic, A. Bedelucci, J. Pepe Jr. e M.T. Teixeira, aos colegas que generosamente compartilharam conosco do seu tempo e conhecimento (F. Prado, S. Pregnolatto, J.F.A. Meyer), e àqueles alunos, voluntários e nem tanto, que não receberam passivamente nossos argumentos sobre o assunto.

Agradecemos também a valiosa colaboração da Srta. Elda Mortari e de Reginaldo M. Ramos, que conseguiram "decifrar" e preparar os manuscritos, o trabalho de datilografia de Maria de Lourdes S. Silva e, muito em particular, da nossa editora Maria Pia Castiglia, cuja competência profissional nunca influiu na amabilidade e paciência com que sempre nos tratou.

Campinas
Janeiro, 88

Rodney C. Bassanezi
Wilson C. Ferreira Jr.

Aos nossos pais.

Capítulo 1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UM POUCO DE HISTÓRIA

"Tal como um bebê que, aprendendo a falar balbucia todos os fonemas em todas as línguas, mas ouvindo a sua mãe aprende a distinguir e utilizar apenas os fonemas de sua língua materna, assim nós, os matemáticos, que balbuciamos em todos os ramos da Matemática, deveríamos escutar a natureza mãe para descobrir quais são os ramos naturais de nossa Ciência".

Atribuído a René Thom (1923-)
Matemático francês

1.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COMO MATEMÁTICA APLICADA

O tema central deste livro é Equações Diferenciais como uma disciplina matemática. Entretanto, esta afirmação aparentemente clara não caracteriza, de maneira alguma, a forma ou substância do texto, uma vez que o tópico matemático é vastíssimo e, como tema central, pode ser abordado por diversos ângulos e com inúmeros objetivos.

Para especificarmos um pouco mais o nosso campo de estudo, poderíamos dizer que trataremos das Equações Diferenciais sob o ponto de vista da "Matemática Aplicada". Utilizando este termo, tão em moda nos últimos tempos, estamos conscientes de haver entrado em um terreno polêmico em que posições têm sido tomadas como verdadeiras trincheiras, defendidas e atacadas até com uma certa dose de empenho passional, onde a disputa começa pela própria dificuldade de se definir o que é "Matemática Aplicada".

Uma frase bem-humorada e provocativa, atribuída a um famoso matemático, J.B. Keller (que por todos os critérios honestos seria classificado como "aplicado"), diz o seguinte a respeito: "A Matemática Aplicada é uma ciência que inclui a Matemática Pura como uma de suas divisões".

Obviamente esta não é uma definição, mas atinge de forma certeira a questão, isto é: a Matemática é parte integrante da "Matemática Aplicada", mas *não* é tudo. Alguns certamente argumentarão também que nem toda a Matemática está incluída na Matemática Aplicada, uma afirmação que talvez fosse correta no momento, mas que seria muito arriscada a longo prazo. A História tem se encarregado de mostrar que a boa matemática sempre tem suas chances nas aplicações (ou seria este um critério de qualidade?). Com relação a este aspecto, é interessante citar o artigo de

J. von Neumann* (1903-1957), um dos pioneiros da Lógica Moderna, da Informática, da Mecânica Quântica, da Teoria dos Jogos etc., de onde extraímos o seguinte:

"Eu penso que seria uma aproximação relativamente boa da verdade (*que é demasiadamente complexa para permitir qualquer coisa melhor do que uma aproximação*) dizer que as idéias matemáticas têm a sua origem em situações empíricas... Mas, uma vez concebidas, elas adquirem uma identidade e crescimento próprios governados quase que inteiramente por motivações estéticas... Entretanto, quando uma disciplina matemática se distancia de sua fonte empírica... existe um grave perigo de que ela se desenvolva em linhas de menor resistência e que a sua corrente principal, distante da fonte original, se ramifique em uma miríade de subdivisões insignificantes, tornando a disciplina em uma massa desorganizada de detalhes e complexidades".

A nossa disciplina, Equações Diferenciais, talvez seja o ramo da matemática que maior proximidade e interações tem experimentado com outras ciências, desde a sua origem, que se confunde mesmo com a do Cálculo Diferencial e Integral e da Mecânica Clássica.

De fato, o desenvolvimento desta teoria constitui-se em um dos melhores exemplos da interação bem-sucedida entre a Matemática e a Ciência em geral, o que tem se confirmado progressivamente com a Matemática Contemporânea e a Física, Química, Biologia, Economia e Engenharia.

Quando falamos de interações, queremos enfatizar que as vias de influências nestes casos têm duas direções, para proveito de todas as partes envolvidas e, certamente, não menos para a Matemática.

No estudo, e conseqüentemente no ensino da Mecânica Clássica desde o século XVII, é imprescindível a utilização da Teoria de Equações Diferenciais**. Não é difícil, então, avaliar a importância da Mecânica também no estudo e no ensino das Equações Diferenciais.

Na verdade, até o começo do século XX este ramo da Física monopolizava os objetivos e as motivações principais das Equações Diferenciais, resultado dos trabalhos de cientistas, no sentido mais amplo da palavra, como I. Newton (1642-1727), P.S. Laplace (1749-1827), C.G. Jacobi (1804-1851), H. Poincaré (1854-1912), A.M. Liapounov (1857-1918) e tantos outros.

Todavia, esta situação mudou razoavelmente a partir da segunda década deste século, com a matematização progressiva de outros ramos do conhecimento. Sem querer arriscar em porcentagens, poderíamos afirmar hoje com segurança que, se por um lado a Mecânica ainda mantém uma certa hegemonia, pelo menos ela compartilha amplamente desta sua ferramenta matemática com vários outros ramos da Física, Química, Engenharia, Biologia e Economia.

O nosso ponto de vista na elaboração deste texto é de que exemplos relativamente simples, embora relevantes, escolhidos nestas diversas áreas, são necessários para o

---

* NEUMANN, J. von. The Mathematician. In: *Collected Works*. Elmsford, Pergamon Press, 1961, 1 v., pp. 1-9.

** A Mecânica Clássica continua co-participante ativa com a Matemática Contemporânea, como é exemplificado por nomes como A.N. Kolmogorov (1903-), J.K. Moser (1928-) e V.I. Arnold (1937-).

ensino atual das Equações Diferenciais como disciplina matemática, em uma atitude que classificaríamos como própria da "Matemática Aplicada".

Em conseqüência disso, optamos por considerar a "Matemática Aplicada" não exatamente como uma Ciência, mas como uma *atitude* no estudo da Matemática dentro do contexto científico em que ela se desenvolve, e não como uma disciplina estanque e descomprometida.

1.2 MODELO MATEMÁTICO

Aqui surge naturalmente a questão de como se processa esta interação entre a teoria matemática e as outras Ciências.

Não procuraremos enfocar a importância e o interesse filosófico de tal questão. O nosso objetivo no texto é mostrar, através de exemplos representativos, como este processo tem se realizado em várias situações e estimular o aluno a desenvolver suas próprias habilidades por meio de exercícios e projetos.

Talvez fosse interessante discorrer ligeiramente sobre a variante da questão: por que a Matemática é importante em várias Ciências?

Comecemos pelo início da Matemática, que provavelmente surgiu na Babilônia depois do ano 3000 a.C. Não é difícil imaginar a motivação principal de sua origem como a necessidade de contar objetos, mas por volta do ano 2000 a.C. tabletes cuneiformes, obtidos de escavações arqueológicas, demonstraram que os Acadianos, que habitavam a Babilônia na época, já dispunham da noção abstrata de números inteiros e da sua Aritmética. Por outro lado, os mesmos tabletes mostraram que esta Aritmética era utilizada para cálculo de comprimentos, áreas, volumes, pesos, cálculos financeiros e de estoque de mercadorias, proporção de colheitas devida como impostos, censo demográfico etc.

Temos assim, de forma clara, três aspectos importantes a serem observados neste exemplo.

Primeiro, a concepção de uma estrutura abstrata com símbolos e regras bem definidas, a partir de motivações de ordem prática, isto é, *a construção de uma teoria matemática.*

Segundo, a elaboração desta teoria matemática em termos abstratos, procurando desenvolvê-la para melhor realizar as operações nela definidas, como a concepção da representação sexagesimal, da idéia de raízes, quadradas e cúbicas, bem como de tabelas para serem calculadas, ou seja, *o estudo matemático da teoria.*

E, em terceiro lugar, a utilização desta teoria matemática no estudo de inúmeros problemas, alguns dos quais certamente não tiveram nenhum papel na motivação original para a concepção da estrutura, isto é, *a aplicação da teoria matemática.*

Estas observações têm por finalidade mostrar a Matemática como um poderoso instrumento intelectual que através da abstração e formalização sintetiza idéias as quais, embora semelhantes, surgem em situações as mais diversas e por isto mesmo camufladas na sua essência. O objetivo da Matemática é, então, extrair esta essência e formalizá-la em um contexto abstrato onde ela possa ser trabalhada intelectualmente, desenvolvida e absorvida com uma extraordinária economia de pensamento. Imaginem se os babilônios (e nós!) fôssemos obrigados a aprender uma Aritmé-

tica específica para cada situação: medir comprimento, área, volume, peso, cálculo de troco, contagem de laranjas, censo demográfico etc. (Acabaríamos por precisar também de uma Aritmética para contar todas as aritméticas!)

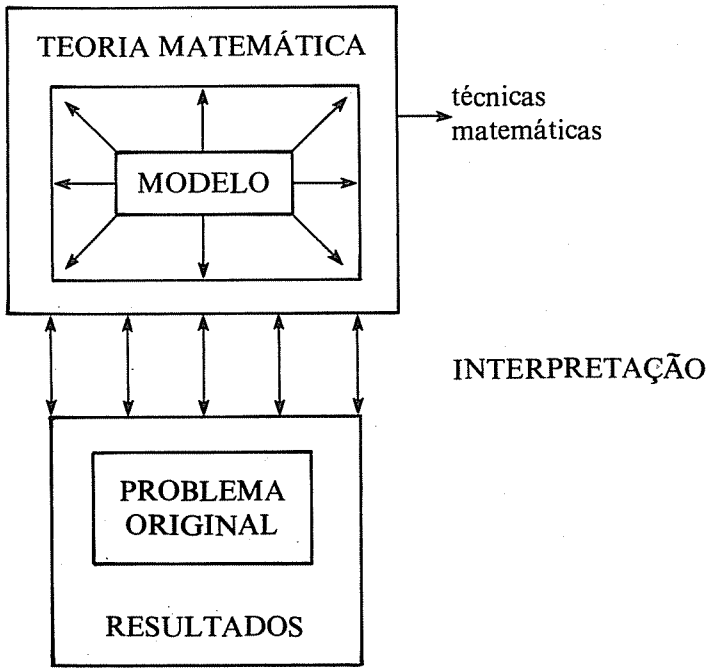
O extraordinário é que existe uma aritmética abstrata (Matemática) que é suficiente para todas estas situações, desde que interpretada apropriadamente. O que parece óbvio para nós hoje, dadas as circunstâncias e o legado cultural, demorou cerca de 10 000 anos para ser compreendido pelo homem, a partir de quando abandonou o nomadismo.

É importante, entretanto, observar também que uma pessoa instruída em Aritmética, apenas como uma estrutura formal abstrata, poderia desenvolver habilidade operacional e criar teorias complexas e sofisticadas mas, se a chave da interpretação não lhe fosse fornecida em um exemplo prático, teríamos um indivíduo inapto a participar da sociedade moderna.

Neste exemplo, distinguimos claramente as características básicas do processo de matematização de um problema e do que chamaremos de *modelo matemático de um problema*. A Aritmética como teoria matemática é um modelo que representa abstratamente problemas de medidas, cálculos financeiros, censo demográfico etc.

A obtenção do modelo matemático pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta sem ambigüidades os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa. Com isto transpõe-se o problema para a Matemática onde será tratado pelas teorias e técnicas próprias desta Ciência; pela mesma via de interpretação, no sentido contrário, obtém-se o resultado dos estudos na linguagem original do problema.

Esquematicamente poderíamos representar este processo com o diagrama abaixo:



Vários comentários devem ser feitos neste ponto. Primeiro, a teoria matemática adequada para a construção do modelo matemático do problema original pode não existir. Esta situação exige do estudioso uma tarefa talvez histórica: desenvolver um novo ramo da Matemática. Obviamente isto não acontece todos os dias. Como um exemplo recente podemos citar a Teoria dos Jogos criada por J. von Neumann para modelar situações de competição econômica. De qualquer maneira, o objetivo (e a esperança) de todo matemático aplicado ao estudar um problema é construir um modelo dentro de uma teoria matemática já desenvolvida e amplamente estudada, que facilite a obtenção de resultados. Afinal, a sua missão deve ser resolver o problema da maneira mais simples possível, e não complicá-lo desnecessariamente.

Segundo, mesmo que o modelo matemático do problema possa ser construído dentro de uma teoria matemática conhecida, ainda assim pode acontecer que as técnicas e métodos matemáticos existentes nesta teoria sejam insuficientes para a obtenção dos resultados desejados. Neste caso, a situação não é tão dramática como antes, mas de qualquer forma vai exigir do matemático aplicado habilidade e criatividade essencialmente matemáticas para desenvolver os métodos necessários. Estas situações se constituem nas grandes motivações para o desenvolvimento de teorias matemáticas já estabelecidas. Veremos como isto é amplamente exemplificado no caso das Equações Diferenciais, desde a sua origem até os dias de hoje. Você poderia dar exemplos disto na Aritmética?

Os fenômenos que se apresentam para o estudo matemático são, em geral, excessivamente complexos se os considerarmos em todos os seus detalhes. O método científico analítico, iniciado com Galileu (1564-1642), consiste exatamente em restringir e isolar o campo de estudo apropriadamente de tal modo que o problema seja tratável e, ao mesmo tempo, manter sua relevância. Esta foi a atitude que rompeu com a Ciência da Idade Média que pretendia entender tudo de uma só vez: a pedra filosofal!

R. Bellman (1924-1985), um matemático (aplicado), exprime bem este aspecto: "É irônico que para compreendermos algo cientificamente precisemos lançar fora informações. Isto acontece porque neste estágio de nosso desenvolvimento intelectual não somos capazes de lidar com uma ordem de complexidade maior. Conseqüentemente devemos simplificar!"*

Não são raras, e veremos exemplos disto no texto, situações em que o modelo dá origem a um problema matemático que não apresenta a mínima possibilidade de estudo devido à sua complexidade. Neste caso, a atitude será então de voltar ao problema original e tentar restringir as informações incorporadas ao modelo a um nível que não desfigure irremediavelmente o problema original, mas que resulte em um problema matemático tratável. Ou, como diz Mark Kac (1914-1983), um extraordinário matemático polonês: "Se você não pode resolver o problema a que se propôs, então tente simplificá-lo. A condição única é esta: você não deve simplificá-lo demasiadamente".

Observe que as setas de interpretação do nosso esquema ligam, em grande parte, a teoria matemática ao ramo de conhecimento de onde vem o problema original. Com isto,

---

* BELLMAN, R. *Dynamic Programming and Modern Control Theory*. New York, Academic Press, 1965, p. 5.

queremos dizer que mesmo no tratamento matemático do modelo é interessante que os métodos e técnicas matemáticas possam ser freqüentemente interpretados na linguagem do problema original. Em alguns casos esta interpretação é decisiva no auxílio ao desenvolvimento matemático da questão e pode mesmo acontecer que o argumento matemático falte e seja substituído por argumentos mais claros na área do problema original. Este tipo de desenvolvimento na argumentação, perfeitamente aceito na Matemática Aplicada, talvez seja o ponto que provoque maior descontentamento entre matemáticos ditos puristas. É óbvio que uma argumentação desta natureza, apesar de sua importância científica, mesmo para a Matemática, não pode ser considerada como argumento estritamente matemático. Em nosso livro teremos oportunidade de utilizar estes argumentos em algumas ocasiões, mas chamaremos a atenção para a sua natureza extra-matemática e para as suas implicações na matemática adjacente. Este processo de intermediação entre o problema original e o modelo matemático é uma atividade que poderíamos classificar de típica da Matemática Aplicada, exigindo uma avaliação competente da questão sob os dois pontos de vista. Talvez seja esta a atitude mais importante quando se trabalha com modelagem, pois nos fornece a *validade* ou não do modelo.

A modelagem de uma situação ou problema real pode também ser simplificadamente visualizada no seguinte esquema (Figura 1.1):

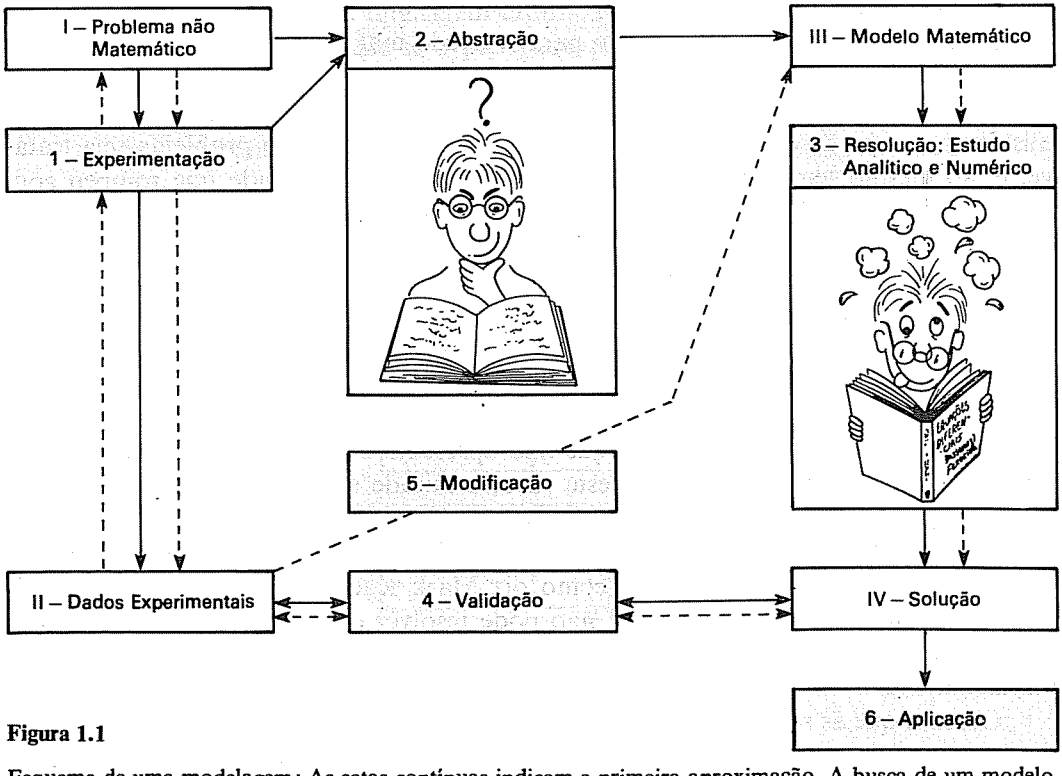


Figura 1.1

Esquema de uma modelagem: As setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas

Experimentação. Obtenção de dados experimentais ou empíricos que ajudam na compreensão do problema, na modificação do modelo e na decisão de sua validade. É um processo essencialmente laboratorial e/ou estatístico.

Abstração. Processo de seleção das variáveis essenciais e formulação em linguagem "natural" do problema ou da situação real.

Resolução. O modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem natural por uma linguagem matemática. O estudo do modelo depende da sua complexidade e pode ser um processo numérico. Quando os argumentos conhecidos não são eficientes, novos métodos podem ser criados, ou então o modelo deve ser modificado.

Validação. Comparação entre a solução obtida via resolução do modelo matemático e os dados reais. É um processo de decisão de aceitação ou não do modelo inicial. O grau de aproximação desejado será o fator preponderante na decisão.

Modificação. Caso o grau de aproximação entre os dados reais e a solução do modelo não seja aceito, deve-se modificar as variáveis, ou a lei de formação, e com isso o próprio modelo original é modificado e o processo se inicia novamente.

Aplicação. A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. A linguagem oferecida pelas Equações Diferenciais é fundamental na transferência e entendimento da linguagem "natural", uma vez que a palavra-chave *variação* aparece quase sempre nas situações reais.

1.3 BREVE HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O Cálculo (Diferencial e Integral) e as Equações Diferenciais nasceram juntos e os dois teoremas básicos do Cálculo estão intimamente ligados à solução da Equação Diferencial mais simples e importante

$$x'(t) = f(t)$$

ou seja, obter a função incógnita $x(t)$, uma vez conhecida a sua derivada $f(t)$. O Teorema Fundamental do Cálculo Integral nos fornece uma solução: $x(t) = \int_a^t f(z)\,dz$ (se f for contínua) e o Teorema do Valor Médio assegura que todas as suas soluções podem ser escritas na forma $c + \int_a^t f(z)dz$, onde c é uma constante. (Prove!)

Com os mesmos teoremas e a integração por partes obtenha as soluções para a equação $x^{(n)}(t) = f(t)$, na forma $x(t) = \dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(z)\,(t-z)^{n-1}\,dz + P_{n-1}(t)$, onde $P_{n-1}(t)$ é um polinômio de grau $n-1$. Estas são motivações puramente operacionais e matemáticas.

Não há dúvida, entretanto, de que a grande motivação inicial para o estudo das Equações Diferenciais veio da Mecânica. Diversos problemas como o movimento dos planetas, a catenária (formato de uma corda pendente presa nas extremidades) e o estudo da oscilação do pêndulo, para citar apenas alguns, já haviam sido estudados empiricamente por homens do quilate de um J. Kepler (1571-1630), L. da Vinci (1452-1519), G. Galileo (1564-1642) e C. Huygens (1629-1695). Porém, faltava a eles a teoria matemática com que pudessem modelar o fenômeno.

Com o aparecimento do Cálculo no final do século XVII por obra de I. Newton (1642-1727) e G.W. Leibnitz (1646-1716), inúmeros problemas mecânicos, incluindo estes três, puderam ser então modelados matematicamente na forma de Equações Diferenciais.

Assim, a partir desta época surgia a questão da resolução dos problemas matemáticos apresentados por estes modelos. Vários deles foram resolvidos explicitamente e de maneira elegante por matemáticos de extraordinária habilidade operacional, como os da família Bernoulli: Jacques (1655-1705), Jean (1667-1748), Nicholas (1695-1726), Daniel (1700-1782) e principalmente por um de seus alunos, o insuperável L. Euler (1707-1783) cuja obra (incompleta) preenche 74 grandes volumes.

Apesar disto, tornou-se claro com o tempo que não seria possível obter métodos gerais de resolução explícita (em termos de funções elementares e suas integrais) para as Equações Diferenciais. O próprio L. Euler introduziu métodos que geravam uma solução aproximada da Equação Diferencial. No primeiro deles a aproximação é feita com linhas poligonais por um processo que deu origem aos métodos de cálculo numérico das soluções. No segundo método a solução é aproximada por polinômios ou, mais especificamente, por uma série de potências. Ambos os métodos têm caráter bastante geral. Observe que, se formos liberais com a noção de solução explícita, podemos dizer que o método de expansão em séries resolve explicitamente a Equação Diferencial. Este método e a sua generalização obtida por G. Frobenius (1849-1917) será apresentado no Capítulo 3.

A base rigorosa do Cálculo ainda não havia sido lançada no século XVIII, mas os resultados surpreendentes até então obtidos não deixavam dúvidas de que esta teoria matemática era essencialmente correta.

O momento matemático no século XVIII, entretanto, era o de usufruir ao máximo deste filão que parecia inesgotável, ainda que os fundamentos e a justificação estivessem envolvidos em uma bruma misteriosa e mística, mesmo para os grandes mestres da época. Ficou famosa a frase atribuída a J. d'Alembert (1717-1783) com que ele animava os seus alunos mais reticentes: "Vá adiante e a fé aos poucos virá. Até o presente a preocupação foi mais em aumentar o edifício do que iluminar a sua entrada, mais em levantá-lo do que fortificar os seus alicerces".

Apesar disto, a tradição matemática grega, tal como representada pelo padrão de perfeição e rigor dos "Elementos" de Euclides (300 a.C.), forçava uma comparação desfavorável à situação do Cálculo que inquietava e desafiava uma boa parte dos matemáticos no final do século XVIII.

Esta inquietação aumentava à medida que alguns resultados contraditórios surgiam e as disputas escapavam invariavelmente para o campo metafísico, onde os critérios matemáticos perdem sua jurisdição.

Era inevitável, portanto, que uma parte do esforço matemático se dirigisse no sentido de esclarecer os fundamentos teóricos do Cálculo e procurar outros métodos de estudo das Equações Diferenciais que não a sua solução explícita.

Para caracterizar este período, o nome representativo é certamente o de A.L. Cauchy (1789-1857), que demonstrou rigorosamente pela primeira vez, e por três métodos diferentes, a existência de soluções para uma vasta classe de Equações Diferenciais que inclui essencialmente todos os modelos conhecidos.

Após o início do século XIX os métodos gerais de resolução explícita das Equações Diferenciais perderam a sua proeminência e nenhum método de maior relevância foi desenvolvido até o aparecimento do cálculo operacional de O. Heaviside (1850-1925) e a transformada de Laplace no final do século XIX.

Inicou-se assim a teoria qualitativa geométrica representada por H. Poincaré (1854-1912) e A.M. Liapounov (1857-1918), bem como a teoria de aproximação analítica (expansão em séries) e de aproximação numérica.

A organização do assunto no livro segue em linhas gerais o seu desenvolvimento matemático cronológico, tal como apresentado neste esboço histórico.

Aqueles que estiverem interessados em um estudo mais aprofundado do assunto poderão recorrer aos excelentes livros de O. Neugebauer e M. Kline*. Há outras referências bibliográficas e comentários a respeito no final deste livro.

1.4 MODELOS MATEMÁTICOS E AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Como já dissemos, um problema real não pode ser representado de maneira exata, em toda sua complexidade, por uma equação matemática ou um sistema de equações. No entanto, se trabalharmos com as variáveis *essenciais* do fenômeno observado, o modelo matemático que simula tal fenômeno poderá levar a soluções bastante próximas daquelas observadas na realidade.

É muito freqüente, em se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento qualquer, obtermos equações que envolvam as "variações" das quantidades (variáveis) presentes e consideradas essenciais. Desta forma, as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas *equações diferenciais*, ao passo que se as variáveis envolvidas forem discretizadas, isto é, funções de uma rede de pontos, em que temos as médias das variações, então as equações que descrevem o fenômeno serão denominadas *equações de diferenças*. Por exemplo:

1. Quando observamos a desintegração (variação) de uma substância radioativa, constatamos que o número de desintegrações por unidade de tempo é proporcional à quantidade de substância presente em cada instante. Assim, se $x = x(t)$ representa

---

* NEUGEBAUER, O. *Exact Sciences in Antiquity*. 2. ed. New York, Dover, 1969.
KLINE, M. *Mathematical Thought Ancient to Modern Times*. New York. Oxford University Press, 1972.

a quantidade de substância presente em cada instante t, a equação matemática que representa o fenômeno é dada por

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) \tag{1}$$

onde $\frac{dx}{dt}$ representa a variação instantânea (desintegração) sofrida pela substância e α representa o coeficiente de proporcionalidade, que é constante para cada tipo de substância radioativa;

2. Quando analisamos a variação de uma população num modelo simplificado, o que se observa, claramente, é que a diferença entre duas medidas sucessivas destas populações é proporcional à quantidade de elementos existentes na primeira medida, isto é,

$$P(t+1) - P(t) = KP(t) \tag{2}$$

onde $P(t)$ é a população medida no tempo t e $P(t+1)$ é aquela medida uma unidade de tempo depois, isto é, o tempo varia discretamente.

Como leis de formação os dois exemplos são análogos, embora em (1) seja uma equação diferencial e em (2) uma equação de diferenças. A analogia ocorre porque a derivada de uma função é definida como o limite de um quociente de diferenças

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

e, quando $\Delta t \to 0$, o caso discreto (equações de diferenças) aproxima-se de um limite que é o caso contínuo (equações diferenciais).

Um mesmo problema pode ser analisado do ponto de vista das equações diferenciais, ou do ponto de vista computacional, usando-se as equações de diferenças.

O objetivo deste texto é fazer um estudo analítico das equações; no entanto, nas Secções 2.10, 3.5 e 5.6 trataremos de equações de diferenças.

3. Um problema muito significativo é determinar o movimento de um corpo de massa m sobre o qual atua uma força F a cada instante t; a Lei de Newton estabelece a conexão entre a aceleração do corpo e a força que produz o movimento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{3}$$

onde $\frac{d^2x}{dt^2}$ é a aceleração do corpo (variação instantânea da velocidade) e F é a força agindo sobre o corpo na direção do movimento. Por exemplo, $F = -mg$ se a força é devida à gravidade, $F = -mg - K\frac{dx}{dt}$ quando se considera também a resistência do ar etc.

4. Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são populações de duas espécies interagindo num processo presa-predador, então $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ dependem das quantidades x e y em cada instante.

$\frac{dx}{dt}$ = taxa de natalidade da presa *menos* taxa de destruição da presa pelo predador

$\frac{dy}{dt}$ = taxa de natalidade do predador *menos* taxa de mortalidade do predador

As equações simultâneas que descrevem tal processo foram inicialmente propostas por Volterra na seguinte formulação

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = cxy - dy \end{cases} \tag{4}$$

onde a, b, c, d são constantes positivas.

5. A relação entre a densidade de carga $f(x, y, z)$ e o potencial $u(x, y, z)$ de um campo eletrostático é dada pela equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi f(x, y, z) \tag{5}$$

De uma maneira geral, podemos dizer que temos uma equação diferencial (ou um sistema de equações diferenciais) se na equação (ou em cada equação do sistema) estão envolvidas funções incógnitas e suas derivadas.

Uma equação diferencial é dita *ordinária* (E.D.O.) se a função incógnita depender apenas de uma variável independente (Exemplos 1 e 3). Se depender de duas ou mais variáveis independentes será denominada equação diferencial *parcial* (E.D.P.) (Exemplo 5).

1.4.1 Equações Diferenciais Ordinárias — Conceitos Básicos

A *ordem* de uma equação diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação. Uma E.D.O. de ordem n tem como expressão geral

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{6}$$

onde F é uma função de $n+2$ variáveis.

A Equação (6) representa a relação entre a variável independente x e os valores da função incógnita y e suas n primeiras derivadas

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Quando pudermos explicitar $y^{(n)}$ na Equação (6), teremos

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7}$$

que é denominada *forma normal* da E.D.O. de ordem n.

As equações na forma normal (7) podem sempre ser escritas na forma (6); para tanto, basta tomar

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

enquanto que equações na forma (6) podem acarretar mais de uma equação da forma (7). Por exemplo,

$$(y')^2 + 4x = 0 \tag{8}$$

leva às duas equações diferenciais

$$y' = 2\sqrt{x} \quad \text{ou} \quad y' = -2\sqrt{x}$$

De uma maneira geral nos preocuparemos com as equações diferenciais na forma normal.

A *solução* de uma E.D.O. (7) no intervalo $I = (a, b)$ é uma função $y = \varphi(x)$ que juntamente com suas derivadas $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)}$ satisfaz a condição

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \tag{9}$$

para todo $x \in I$. Assim, *resolver* a Equação (7), significa encontrar a função $y = \varphi(x)$, definida e derivável até a ordem n em um intervalo I, que satisfaz a Equação (7).

EXEMPLO 1

A equação que "conta a história essencial" de um corpo em queda livre é

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \tag{10}$$

Uma *solução* desta E.D.O. é dada por

$$v(t) = -gt + c \tag{11}$$

onde c é uma constante qualquer.

Verificando se a solução (11) "satisfaz" a Equação (10), temos

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}(-gt + c) = m(-g) = -mg$$

Que constante é c? Ora, tomando, por exemplo, $t = 0$ em (11), obtemos

$$v(0) = v_0 = c$$

ou seja, c é a velocidade inicial do corpo. Assim,

$$v(t) = -gt + v_0 \tag{12}$$

é uma *solução particular* de (10). ■

Solução geral de uma equação diferencial é o conjunto de todas as suas soluções. Nas aplicações, geralmente não estamos interessados em todas as soluções, mas em soluções particulares que satisfaçam uma dada *condição inicial*, ou outros tipos de condições complementares.

A fim de ilustrar o que é uma *solução explícita*, tomemos como exemplo para analogias uma equação algébrica $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio, isto é,

$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n$. Neste caso, a incógnita é um número e as operações que definem a equação são as operações algébricas: soma, produto e potenciação inteira. Para resolvermos estas equações, obviamente é necessário que saibamos "inverter" as operações algébricas (caso contrário não passaríamos de $x + a = 0$, ou $ax = b$, ou $x^n = c$). Entretanto, isto não é suficiente para o caso geral, e a demonstração deste fato foi um triunfo, ainda que aparentemente negativista, da Matemática do século XIX desenvolvida por N. Abel (1802-1829) e E. Galois (1811-1832).

Uma solução explícita neste caso seria a obtenção do valor de x por meio de uma seqüência *finita* de operações algébricas (e suas inversas) sobre os números dados do problema $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. A teoria de Galois nos garante que *não* existe uma "receita" finita e geral nestes termos para a obtenção das soluções destas equações para grau maior que 4. Isto não quer dizer, todavia, que não existam soluções e, na verdade, o Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado pela primeira vez em 1799 por C.F. Gauss (1777-1855), afirma que a equação $P(x) = 0$ tem exatamente n soluções no conjunto dos números complexos.

Concluindo, as soluções existem, mas para obtê-las temos que recorrer a operações infinitas, isto é, uma seqüência infinita de operações algébricas cujos resultados parciais aproximam a solução, ou ainda, a própria Álgebra nos mostra que ela não é suficiente para a resolução do problema; necessitamos da Análise.

Uma situação análoga ocorre em Equações Diferenciais Ordinárias, onde a incógnita é uma função de uma variável e as operações envolvidas são algébricas e a operação de derivação. Ainda neste caso podemos dizer que conhecemos as operações inversas (algébricas e a integração) mas, como antes, isto não garante a possibilidade de obtenção de soluções explícitas, se estas forem vistas como resultado de uma seqüência finita de tais operações sobre dados do problema. É interessante observar também que foi por volta de 1820 que Cauchy demonstrou a existência de soluções para uma ampla classe de Equações Diferenciais Ordinárias, mas, neste caso, não precisaremos ir além da Análise: ela própria resolve o seu problema.

Capítulo 2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

"... é impossível explicar honestamente as belezas contidas nas leis da natureza de uma forma que as pessoas possam senti-las, sem que elas tenham uma boa compreensão da Matemática.

... A Matemática não é somente uma linguagem. A Matemática é uma linguagem acrescida de raciocínio; é como uma linguagem acrescida de lógica. A Matemática é uma ferramenta para o raciocínio".

Richard Feynman

2.1 INTRODUÇÃO – EQUAÇÃO DIFERENCIAL FUNDAMENTAL

Como já vimos, a equação diferencial mais elementar é exatamente o problema fundamental do Cálculo Diferencial e Integral e consiste no seguinte: dada uma função contínua $f(t)$ definida em (a, b), desejamos obter todas as funções deriváveis, $x(t)$, definidas em (a, b), tais que

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \text{ para } t \in (a, b)$$

Para resolver esta "simples" equação necessitamos nada mais nada menos do que a Teoria do Cálculo Integral que, diga-se de passagem, tem a sua origem em outros problemas mais antigos, como o cálculo de áreas já sugerido pelo método de exaustão de Eudoxus e muito usado por Arquimedes (287-212 a.C.).

Esta observação poderia nos deixar com a desanimadora expectativa de que para resolver cada equação diferencial teríamos de aprender uma nova teoria matemática.

A situação é, de certa maneira, semelhante ao problema da resolução de equações algébricas, isto é, da obtenção das raízes de polinômios.

Para resolver equações como $x + 1 = 0$ temos os números negativos, para $2x + 3 = 0$ os números racionais, para $x^2 = 2$ os números irracionais e para $x^2 = -1$ os números complexos.

A questão que surge é inevitável: para resolver equações $P(x) = 0$ com polinômios de grau n, cada vez maior, teremos que construir números "n-polinomiais" cada vez mais abrangentes? Surpreendentemente a resposta é: *Não*. Basta que tenhamos os números complexos; o Teorema Fundamental da Álgebra nos afirma que $P(x) = 0$

tem n soluções! Por outro lado, a teoria de Galois nos alerta que estas mesmas soluções não podem ser, em geral, obtidas explicitamente, se por solução explícita entendermos o resultado de operações algébricas e radiciações efetuadas sobre os dados do problema.

A questão, enfim, depende substancialmente do que entendemos por *resolução* da equação, ou seja, a que processos de construção das soluções estamos nos referindo.

Veremos neste livro como os chamados teoremas de existência de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias nos fornecem métodos de construção de soluções baseados apenas na teoria do Cálculo.

Portanto, de maneira análoga ao problema algébrico, podemos afirmar que o Cálculo também é suficiente para resolver "todas" as equações diferenciais ordinárias, mas não de forma explícita!

Voltando à equação $\frac{dx}{dt} = f(t)$, verificamos que não existe apenas uma solução, mas um conjunto infinito delas que podem ser escritas como

$$x(t) = C + \int_{t_0}^{t} f(s)ds \text{ para todo número real } C$$

Observe agora que $x(t_0) = C$, isto é, uma vez especificado o valor inicial $x(t_0)$, a solução da equação diferencial é única

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

Portanto, o problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t), & a < t < b \\ x(t_0) = x_0, & a < t_0 < b \end{cases} \tag{1}$$

(que significa: dada a função $f(t)$ contínua em (a, b), desejamos obter $x(t)$ derivável em (a, b), tal que $\frac{dx}{dt} = f(t)$ em (a, b) e $x(t_0) = x_0$) *tem solução e é única.*

A condição $x(t_0) = x_0$ é chamada *condição inicial.*

Se agora a equação diferencial for

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) \tag{2}$$

podemos reduzi-la a duas equações de primeira ordem, da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1(t) \\ \frac{dx_1}{dt} = f(t) \end{cases} \tag{3}$$

onde x_1 aparece como uma variável auxiliar.

Repetindo o mesmo argumento de (1) temos $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_1(s)ds$ e integrando por partes

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}[x_1(s)(s-t)] - \frac{dx_1}{ds}(s-t)ds$$

ou

$$x(t) = x(t_0) + x_1(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)(t-s)ds \tag{4}$$

Verificamos então que o conjunto das funções da forma

$$x(t) = a + b(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)(t-s)ds \tag{5}$$

para a e b sendo quaisquer números reais, é infinito e é constituído de todas as soluções da equação $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$.

Portanto, se acrescentarmos as condições

$$\begin{cases} x(t_0) = a \\ x'(t_0) = b \end{cases} \tag{6}$$

à equação diferencial, formulamos um problema de valores iniciais para a equação $x'' = f(t)$ cuja solução existe e é única.

Para o caso geral da equação

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t) \tag{7}$$

as condições iniciais que especificam uma única solução podem ser

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0 \\ &x'(t_0) = x_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{aligned} \tag{8}$$

onde x_k, $k = 0, \ldots, n-1$ são n dados iniciais do problema, cuja solução única é dada por

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \frac{(t-t_0)^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} f(s)(t-s)^{n-1} ds \tag{9}$$

que se pode obter repetindo o mesmo argumento já utilizado.

O problema de valores iniciais é chamado também de *problema de Cauchy* para a equação diferencial, e será básico no desenvolvimento da teoria e dos métodos deste livro.

Entretanto, este não é o único tipo de condição que pode ser acrescentada à uma equação diferencial para a formulação de um problema. Veremos, como exemplo de outro tipo de condição, o problema da corda esticada com distribuição de peso (ver Figura 2.1).

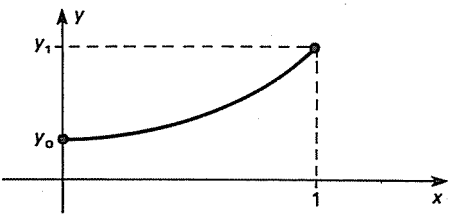


Figura 2.1

Uma corda é esticada sob tensão T, constante ao longo do seu comprimento L, em uma posição aproximadamente horizontalmente, cujo desvio é dado pela função $y(x)$, e com uma distribuição de peso fornecida pela densidade linear $\rho(x)$.

Analisemos um pequeno pedaço desta corda entre x e $x+\Delta x$ com relação ao equilíbrio das componentes verticais das forças (ver Figura 2.2).

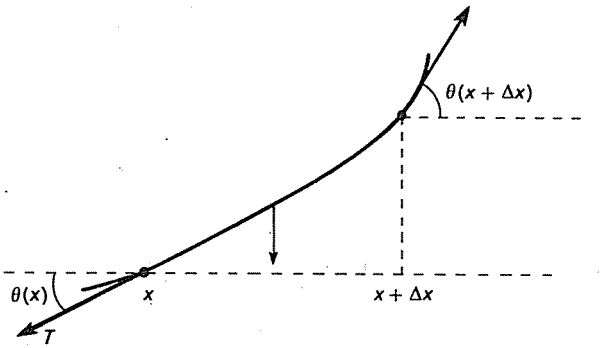


Figura 2.2

$$\rho(x)\,\Delta x + T \operatorname{sen}\theta(x) \cong T \operatorname{sen}\theta(x+\Delta x)$$

$$\rho(x) \cong T\,\frac{\operatorname{sen}\theta(x) - \operatorname{sen}\theta(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Supondo que a corda tenha apenas um pequeno desvio da posição horizontal, então θ é pequeno e $\operatorname{sen}\theta \cong \theta \cong \operatorname{tg}\theta = y'(x)$.

Fazendo $\Delta x \to 0$, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{T}\rho(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{10}$$

Esta equação por si só não especifica a posição da corda, pois isto depende da posição dos pontos extremos, informação esta que *não* está contida na equação diferencial. Por isto, para caracterizar um problema específico devemos acrescentar à equação diferencial a posição das extremidades, ou seja

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y(1) &= y_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Agora temos um problema específico

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{T}\rho(x)$$

onde T, $\rho(x)$, y_0, y_1 são dados.

Este problema é chamado problema de condições laterais para a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{T}\rho(x)$$

que será analisado no Modelo 13 – Secção 2.7.4 sem a aproximação (10).

Neste livro estudaremos apenas estes dois tipos de problemas para equações diferenciais ordinárias, com uma ênfase maior no problema de valores iniciais, uma prioridade ditada pela maior ocorrência em modelos matemáticos.

EXERCÍCIOS

1. Obtenha a equação da posição da corda *sem* a suposição de que ela é quase horizontal; isto é, *não* substitua sen θ por tg θ!
2. Resolva o problema anterior, de condições laterais, para o caso $y_0 = y_1 = 0$, utilizando a solução geral da equação diferencial.

2.2 EQUAÇÃO GERAL DE PRIMEIRA ORDEM

A equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

estabelece uma relação entre as coordenadas de um ponto e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da solução, em cada ponto. Portanto, uma equação deste tipo define um campo de direções, ou de inclinações.

Resolver a Equação (1) consiste, pois, em encontrar as curvas, chamadas curvas integrais, de tal modo que a direção das retas tangentes em cada ponto da curva coincida com a direção pré-estabelecida do campo naquele ponto.

O lugar geométrico dos pontos onde cada tangente à curva integral preserva uma direção constante são linhas chamadas *isóclinas*.

Obtemos a equação de uma isóclina tomando

$$\frac{dy}{dx} = k, \text{ onde } k \text{ é uma constante (inclinação da tangente)}$$

EXEMPLO 1

Considere $\frac{dy}{dx} = y - x^2$; determine seu campo de direções.

Solução: As isóclinas são as curvas

$$\frac{dy}{dx} = k \text{ e, portanto, as parábolas } y - x^2 = k$$

Agora, para cada valor de k temos $\frac{dy}{dx} = k$ em cada ponto da isóclina, e desta forma obtemos o campo de direções, conforme mostra a figura (ver Figura 2.3).

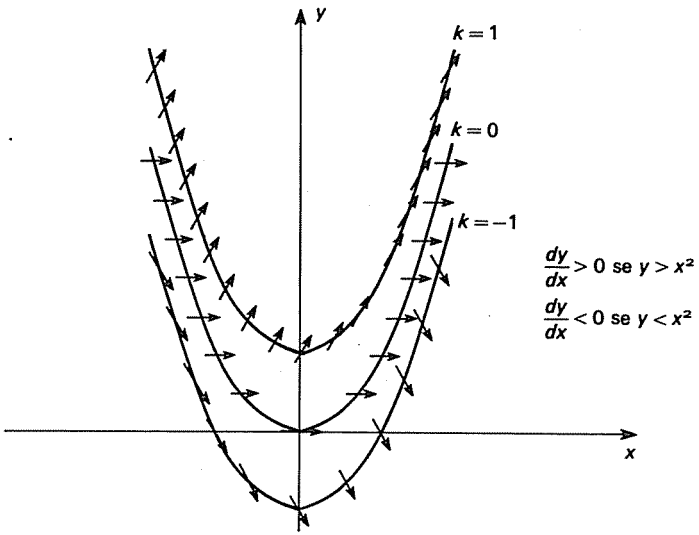


Figura 2.3

EXEMPLO 2

Determine o campo de direções da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

Solução: As isóclinas são as retas $y = kx (k \neq 0$, constante).

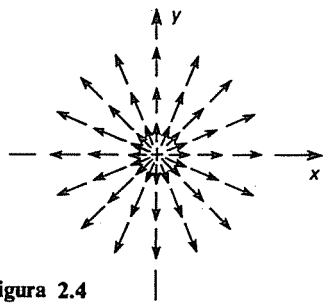


Figura 2.4

Em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x \neq 0$, o coeficiente angular da reta tangente à curva integral é igual a $\frac{y}{x}$, coincidindo com o mesmo valor do coeficiente angular da reta isóclina que sai da origem e passa pelo ponto (x, y) (ver Figura 2.4).

Neste caso, as curvas integrais serão da forma $y = cx$, $x \neq 0$, uma vez que estas retas coincidem em toda parte com a direção do campo. ■

EXEMPLO 3

Determine o campo de direções e as curvas integrais da equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Solução: As isóclinas são retas $y = -\frac{1}{k}x$. O campo de direções definido pela equação diferencial dada é ortogonal ao campo de direções do Exemplo 2, pois $\frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y}\right) = -1$, isto é, a condição de ortogonalidade é satisfeita em cada ponto (ver Figura 2.5)

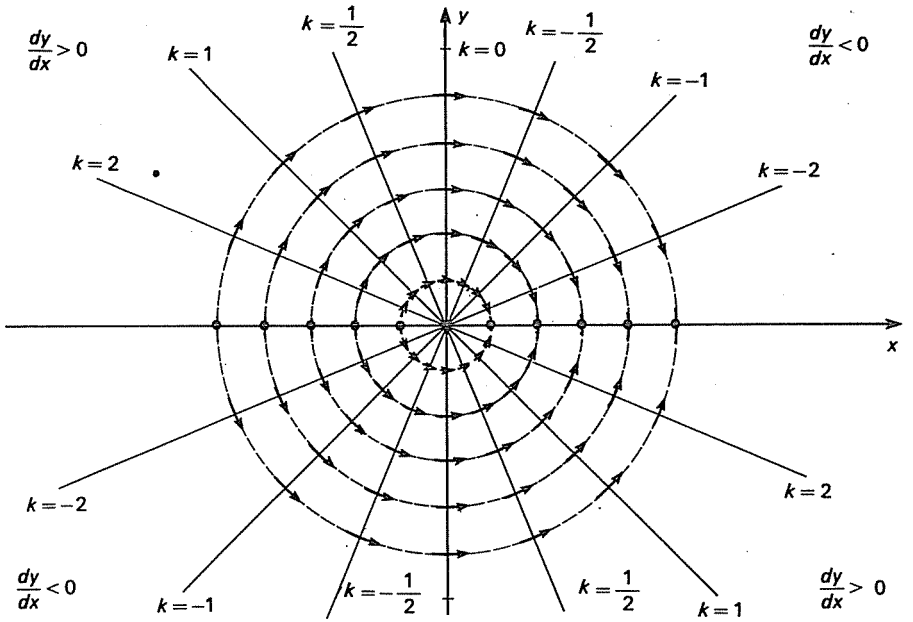


Figura 2.5

Se $y > 0$, as curvas integrais são semicircunferências concêntricas na origem $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ e se $y < 0$, $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$.

A função $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ não é contínua nos pontos $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$. ■

Os campos de direções, além de contribuírem para um melhor entendimento das equações diferenciais, também constituem um método gráfico para se encontrar suas soluções aproximadas.

As equações diferenciais serão classificadas conforme os métodos empregados na obtenção de sua solução explícita.

Mas, como já enfatizamos, isto não deve sugerir ao leitor que ele sempre disporá de um método de solução explícita para qualquer equação diferencial ordinária, mesmo de primeira ordem e por mais liberais que sejamos quanto às operações aceitáveis. Na verdade, poderíamos dizer que a quantidade de equações que possuem soluções explícitas é praticamente nula, se comparada àquelas que têm soluções. A importância do estudo de tais equações está no que podemos aprender delas e na utilização que delas fazemos para analisar as demais.

No estudo das equações de primeira ordem de forma geral

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ onde } f(x, y) \text{ é contínua em } (x, y)$$

além do método gráfico-geométrico que mencionamos, e que será mais desenvolvido durante o livro, dispomos dos Teoremas de Existência e Unicidade de soluções para problemas de valor inicial (T.E.U.)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Em geral, estes teoremas se referem à existência e unicidade de soluções locais para o problema, isto é, soluções definidas em algum intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ na vizinhança do ponto inicial. A continuação desta solução para intervalos de definição maiores é um outro problema e depende da região do plano onde está definida a função $f(x, y)$ e do seu comportamento. A solução pode deixar de existir além de x_1 se, por exemplo, $(x_1 > x_0)$ para $x \uparrow x_1$ o gráfico $(x, y(x))$ "escapa" da região de definição de $f(x, y)$.

No Modelo 12 (Transporte de Partículas – Secção 2.7.3) a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dx} = \sigma + \sigma R^2 \\ R(0) = 0 \end{cases}$$

onde $R(x) = \operatorname{tg} \sigma x$, não pode ser estendida além de $x_1 = \dfrac{\pi}{2\sigma}$ pois $R(x) \uparrow \infty$, ou seja, $(x, R(x))$ "escapa" da região de definição da equação diferencial.

A região de definição de uma equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ é sempre considerada como um conjunto aberto do plano $\mathbb{R}^2$. Um conjunto aberto A é aquele em que para todo ponto $(x_0, y_0) \in A$ existe um disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$, contido em A. Esta condição nos garante "espaço" para construir a solução local.

Existem basicamente três métodos para demonstrar construtivamente (por aproximação), a *existência de soluções* para o problema de Cauchy: Método de Euler, Método de Expansão em Séries e Método Iterativo*.

O *Método de Euler* e suas modificações (Runge-Kutta e outros) são métodos discretos apropriados para o cálculo numérico de soluções e costumam ser tratados nas disciplinas deste mesmo nome. A aproximação da solução pelo Método de Euler é feita através de funções poligonais, isto é, o gráfico é constituído de segmentos de reta justapostos, cuja construção é simples, e baseado na seguinte observação: conhecendo $y(x_0) = y_0$ e sabendo que neste ponto a inclinação do gráfico da solução é dada por $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, aproximamos $y(x)$ pela sua tangente

$$\bar{y}(x) = y_0 + f(x_0, y_0)\,(x - x_0)$$

entre x_0 e um ponto próximo $x_1 = x_0 + h$, $h \in \mathbb{R}$.

---

* HENRICI, P. *Essentials of Numerical Analysis with a Pocket Calculator*. New York, Wiley, 1982.

Neste ponto corrigimos a direção da poligonal e de x_1 a $x_2 = x_0 + 2h$ consideramos o seguinte segmento de reta:

$$\bar{\bar{y}}(x) = \bar{y}(x_0 + h) + f(x_0 + h, \bar{y}(x_0 + h))\,(x - x_0 - h)$$

e daí por diante continuamos o processo.

Diminuindo o passo h teremos mais trabalho, mas também uma melhor aproximação (ver Figura 2.6).

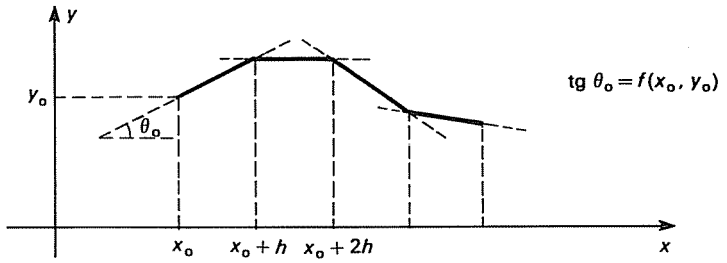


Figura 2.6

O *Método de Expansão em Séries* será estudado no capítulo seguinte (3.6.4) e consiste basicamente em supor que a solução do problema pode ser escrita na forma de séries de potências

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

desde que $f(x, y)$ também tenha uma expansão em série de potências de x e y. O objetivo, então, é calcular os números $\{a_k\}$ $k \geqslant 0$. A aproximação neste caso se faz por meio de polinômios (ver Capítulo 3).

O terceiro método, chamado *Iterativo*, parte do fato de que se $\varphi(x) = y$ for solução para o problema de Cauchy, então

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, \varphi(z))\,dz \tag{3}$$

(conforme o Teorema Fundamental do Cálculo). E vice-versa, se $\varphi(x)$ satisfizer esta condição sendo contínua, então será derivável e

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Obviamente, isto não resolve o problema, pois $\varphi(x)$ aparece dentro da integral em (3), e para calcular $\varphi(x)$ temos que conhecer os $\varphi(z)$, sendo $x_0 < z < x$ (caso x seja maior que x_0, por exemplo).

Mas a igualdade (3) nos dá um outro ponto de vista sobre o problema. Considere o lado direito desta igualdade como uma operação T sobre a função $h(z)$, contínua, não necessariamente solução do problema

$$T \cdot h(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, h(z))\,dz \tag{4}$$

Visto desta maneira, o que procuramos obter é um "ponto fixo" da operação T, isto é, uma função φ tal que $T \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$.

Então, o método iterativo constrói uma seqüência de funções por aplicações sucessivas da operação T, a partir de uma função bem simples; por exemplo, a função constante $h_0(z) = x_0$

$$h_1 = T \cdot h_0,\ h_2 = T \cdot h_1,\ \ldots,\ h_{n+1} = T \cdot h_n,\ \ldots$$

Formalmente, se a seqüência h_n convergir para uma função $\psi(x)$ observamos que $T \cdot \psi = \psi$ pois

$$\lim_n T \cdot h_n = \lim_n h_{n+1}$$

isto é, ψ deve ser solução do problema.

O método iterativo é muito utilizado para aproximação de raízes no cálculo numérico e os argumentos são semelhantes. A diferença é que a seqüência lá é formada de números e aqui de funções. A justificação deste método se faz sob determinadas condições, como no teorema abaixo:

Teorema de Existência e Unicidade de Solução para o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Suponha que:

1. $f(x, y)$ seja uma função contínua definida em um disco de raio r centrado no ponto (x_0, y_0)

$$D = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ exista e seja contínua em D.

Então existe um intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que as funções obtidas pelo processo iterativo $h_{n+1} = T \cdot h_n$

$$T \cdot h(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, h(z))\, dz$$

$h_0(x) = y_0$ e $| x - x_0 | < \delta$, estão aí definidas e convergem uniformemente para uma função contínua $\varphi(x)$.

A função $\varphi(x)$ é uma solução local única do problema de Cauchy.

A demonstração de um teorema mais geral,e que abrange este, será feita no Cap. 5.

EXEMPLO 4

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A solução explícita neste caso é obtida facilmente

$$y(x) = e^{x^2/2} \quad \text{(Verifique!)}$$

Como $f(x, y) = xy$ satisfaz as hipóteses do teorema em todo $\mathbb{R}^2$, podemos aplicar o esquema do método iterativo:

$$h_0(x) \equiv 1; \; T \cdot h(x) = 1 + \int_0^x z h(z) dz$$

$$h_1(x) = T \cdot h_0(x) = 1 + \int_0^x z \cdot 1 \cdot dz = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$h_2(x) = T \cdot h_1(x) = 1 + \int_0^x z \cdot \left(1 + \frac{z^2}{2}\right) dz = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4}$$

Neste caso simples é fácil prever que

$$h_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = \sum_0^\infty \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \Big/ n! = e^{x^2/2}$$

O método iterativo tem uma grande importância teórica, mas uma limitada importância prática. Na resolução de problemas por este método, a cada passo devemos calcular uma integral explicitamente, o que é uma tarefa raramente bem-sucedida.

EXERCÍCIO

1. Tomando passo $h = 0{,}1$, obtenha uma poligonal que aproxime a solução de

$$\frac{dy}{dx} = x + \operatorname{sen} y; \; y(1) = 0 \text{ e } 1 \leqslant x \leqslant 2$$

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS AUTÔNOMAS

Abordaremos agora o problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{1}$$

chamadas *autônomas*.

Utilizando a manipulação formal introduzida por Leibnitz, podemos escrever a equação (1) na forma

$$1\,\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)} \tag{2}$$

que é exatamente o tipo de equação tratado no item 2.1, e que sabemos resolver explicitamente.

Para justificarmos esta manipulação, a primeira condição de que necessitamos impor é, obviamente, que $\dfrac{1}{f(y)}$ seja bem definida no intervalo de interesse, isto é, que $f(y)$ não se anule e seja contínua, digamos, em (c, d).

Com esta hipótese podemos escrever a solução geral da equação diferencial (2)

$$x(y)=x(y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{1}{f(z)}\,dz, \qquad y_0\in(c,d) \tag{3}$$

Como $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(y)}\neq 0$ em (c, d) sabemos pelo teorema da função inversa do cálculo de uma variável† que *existe* a inversa da função $x(y)$ e que a sua derivada é a recíproca da derivada desta função, o que equivale a justificar o procedimento formal.

Portanto, a solução do problema

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{4}$$

é obtida pela solução do problema

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(y)}\\ x(y_0)=x_0\end{cases} \tag{5}$$

e pela inversão da função $x(y)$ encontrada, e vice-versa, a solução de (5) é obtida através da solução de (4) e da inversão de $y(x)$.

Podemos considerar este processo como uma regra para a solução explícita do problema, se as operações de integração de funções contínuas e inversão de funções com derivada contínua forem consideradas como tal. Sob as hipóteses de que $f(y)$ seja contínua e não se anule em (c, d), e que $y_0\in(c, d)$, concluímos então que o problema (4) tem solução, e é única. Observe que para utilizarmos o argumento acima, o intervalo de definição de $y(x)$ não pode incluir pontos onde $f(y(x))$ se anule.

Os pontos y^* onde $f(y^*)=0$ são chamados pontos *estacionários* ou *singulares* e o problema (4) com condição inicial $y(x)=y^*$ tem solução $y(x)=y^*$ (constante). (Verifique!)

---

† COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2v.

A solução é única? Esta é uma questão um pouco mais delicada e para garantir a unicidade da solução necessitamos da condição de que $f(y)$ tenha derivada contínua em uma vizinhança do ponto singular y^*.

No Teorema de Existência e Unicidade para o problema inicial de equações diferenciais ordinárias gerais esta afirmação está demonstrada. (Ver o Cap. 5.)

Mas, como sabemos, nem sempre a integral $\int \frac{dy}{f(y)}$ pode ser calculada em termos de funções elementares conhecidas, isto é, explicitamente. Neste caso, dispomos de um outro método de abordagem do problema que será utilizado amplamente no futuro e que faz uso da interpretação geométrica da equação.

Observe que a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(y)$ pode ser vista como uma condição sobre a inclinação da tangente ao gráfico de $y(x)$ em cada ponto $(x, y(x))$ do plano (x, y) por onde ele passa.

O que a equação impõe é que o gráfico de $y(x)$ deve se ajustar, em cada ponto (x, y) por onde passar, ao campo de inclinações pré-fixado neste ponto pela regra: no ponto (x, y) a tangente do ângulo de inclinação é $f(y)$.

Neste caso autônomo, as inclinações só dependem da ordenada y de cada ponto e, portanto, as outras soluções são paralelas em pontos de cada uma das retas horizontais fixadas. Por exemplo, se $f(y) = ky$, o campo de inclinação (representado por pequenos segmentos centrados no ponto) pode ser facilmente construído. Experimente, começando sempre pelo ponto $\left(\frac{1}{k}, y\right)$ e a inclinação do segmento que une a origem a este ponto. Faça com $k > 0$ e $k < 0$.

EXEMPLO 1

Como veremos nos diversos modelos deste capítulo, a equação diferencial autônoma para $f(y) = ky$ representa uma enorme variedade de situações. Sempre que uma lei afirma que a *taxa de variação de uma quantidade $y(t)$ é proporcional a esta mesma quantidade*, estamos diante de uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{6}$$

Como $f(0) = 0$, $y = 0$ é um ponto singular e, portanto, de acordo com os argumentos acima, devemos considerar a equação separadamente nos intervalos $-\infty < y < 0$ e $0 < y < +\infty$ e no ponto $y = 0$.

Considere então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(t_0) = y_0, \quad y_0 > 0 \end{cases}$$

e o problema inverso

$$\begin{cases} \frac{dt}{dy} = \frac{1}{ky} \\ t(y_0) = t_0 \end{cases}$$

cuja solução única sabemos ser

$$t(y) = t_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{ks} = t_0 + \frac{1}{k}(\ln y - \ln y_0)$$

Invertendo a função $t(y)$, o que neste caso felizmente pode ser feito explicitamente, temos

$$y(t) = y_0\, e^{k(t-t_0)}, \quad -\infty < t < +\infty$$

Esta é a solução única do problema.

Compare os gráficos das curvas das Figuras 2.7 e 2.8 com o campo de inclinação que você obteve para $f(y) = ky$.

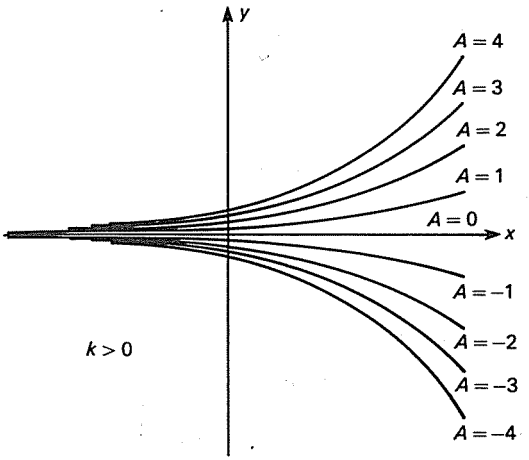


Figura 2.7

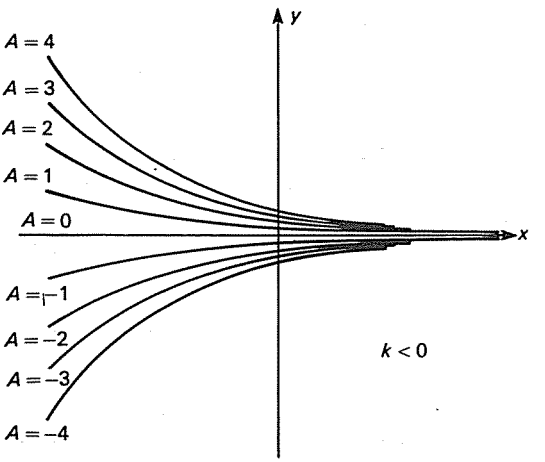


Figura 2.8 ■

EXEMPLO 2

Uma pequena variação da equação anterior (6) é o caso $\boxed{f(y) = ky + a}$, sendo a constante.

$$\frac{dy}{dx} = ky + a \tag{7}$$

Escrevendo $\frac{dy}{dx} = k\left(y + \frac{a}{k}\right)$, verificamos que $\frac{d(y + a/k)}{dx} = k\left(y + \frac{a}{k}\right)$ é exatamente a Equação (6) do exemplo anterior, se fizermos $z = y + a/k$.

Assim o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ky + a \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

se transforma em

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = kz \\ z(x_0) = y_0 + \dfrac{a}{k} = z_0 \end{cases}$$

cuja solução é:

(*i*) se $y_0 + a/k = 0$, temos $z(x) \equiv 0$ e $y(x) = -a/k$.

(*ii*) se $y_0 + a/k \neq 0$, $z(x) = (y_0 + a/k)\, e^{k(x-x_0)} = y(x) + a/k$ e, portanto,

$$y(x) = -a/k + \left(\frac{y_0 + a/k}{e^{kx_0}}\right) e^{kx}$$

■

As equações autônomas $\frac{dy}{dx} = f(y)$ quando $f(y) = ay$ ou $f(y) = ay + b$ são as mais importantes por serem mais freqüentes nos modelos simples. Entretanto, quando $f(y)$ for uma função qualquer contínua em algum intervalo, a equação autônoma pode ser sempre resolvida analiticamente, desde que saibamos integrar $\int \frac{dy}{f(y)}$. O seguinte exemplo serve de treino:

EXEMPLO 3

Encontre todas as soluções da E.D.O. autônoma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{2} \tag{8}$$

Solução: A função $f(y) = \frac{y^2}{2} - 2$ é contínua em toda reta $\mathbb{R}$, assim como $\frac{df}{ay} = y$.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade já apresentado, sabemos que dado um ponto qualquer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existirá sempre uma solução $y = \varphi(x)$ de (8), satisfazendo $y_0 = \varphi(x_0)$.

Como $f(y) = 0$ para $y = 2$ e $y = -2$, segue-se que as funções constantes $\varphi_1(x) = 2$ e $\varphi_2(x) = -2$ são soluções de (8).

Agora, com $f(y) \neq 0$ podemos escrever (8) na forma diferencial

$$\frac{2}{y^2 - 4}\, dy = dx \tag{9}$$

Integrando membro a membro (9), obtemos as soluções de (8) na forma implícita

$$\ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = x + c \quad \text{(sendo } c \text{ uma constante arbitrária de integração)}$$

$$\left| \frac{y-2}{y+2} \right| = Ae^x, \quad A = e^c$$

Para obter as soluções na forma explícita, consideremos

(*i*) $y < -2$, então $Ae^x = \frac{y-2}{y+2}$. Resolvendo para y, obtemos

$$y = \varphi(x) = \frac{2Ae^x + 2}{1 - Ae^x}$$

Observamos que $\varphi(x) \to -2$ quando $x \to +\infty$ e $\varphi(x) \to -\infty$ quando $x \to \ln \frac{1}{A}$

(*ii*) $y > 2$, então $Ae^x = \frac{y-2}{y+2}$, que nos dá

$$y = \varphi(x) = \frac{2Ae^x + 2}{1 - Ae^x}, \text{ como no caso } (i)$$

(*iii*) $-2 < y < 2$, então $Ae^x = \frac{2-y}{y+2}$ e

$$y = \varphi(x) = \frac{2 - 2Ae^x}{1 + Ae^x}$$

Neste caso, quando $x \to -\infty$, $\varphi(x) \to 2$ e quando $x \to +\infty$, $\varphi(x) \to -2$.

Ainda, se $x = \ln \frac{1}{A}$ então $\varphi(x) = 0$ (ver Figura 2.9).

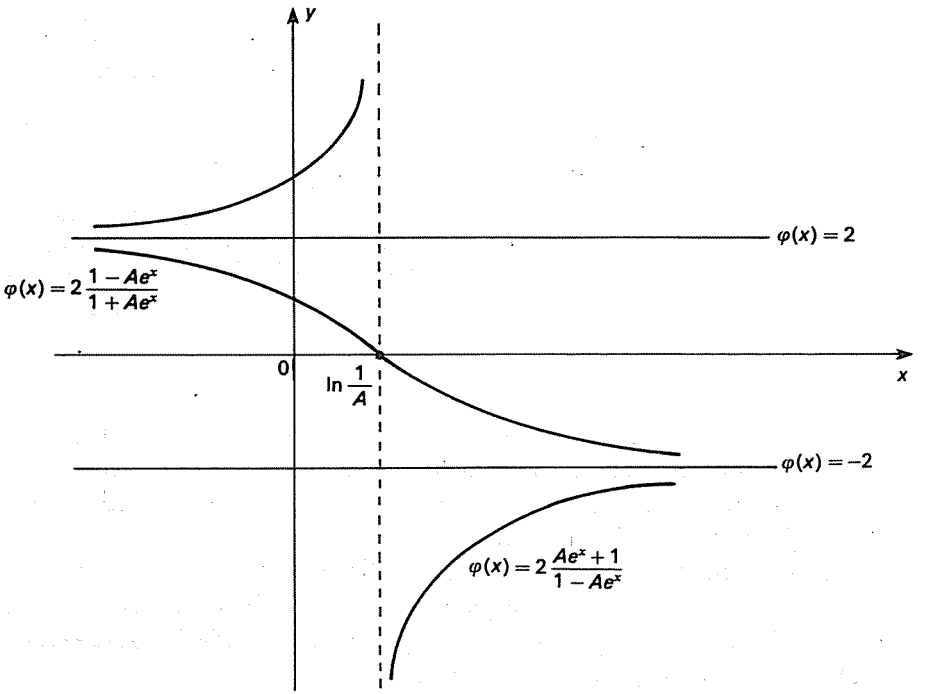


Figura 2.9 Para cada valor de $A > 0$ obtemos um trio de solução, uma em cada uma das faixas do plano limitadas pelas retas $y = 2$ e $y = -2$ ■

EXERCÍCIOS

1. Sem resolver, discuta o comportamento das soluções da equação $\frac{dy}{dx} = -ay + by^2$ (que é um exemplo de uma vasta classe de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, chamadas de Riccati; ver item 2.7.3) interpretando-as geometricamente nos casos

   (*i*) a, b positivos (*ii*) a, b negativos

2. Resolva o problema de valor inicial e estude geometricamente a equação diferencial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a + by + cy^2, & \text{onde } a, b, c \text{ são constantes não nulas} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3. Resolva a equação do exercício anterior dando valores arbitrários para as constantes.

4. Estude geometricamente as soluções da equação $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} y$.

2.3.1 Modelos Matemáticos Envolvendo Equações Autônomas

Modelo 1 CRESCIMENTO DE UMA CÉLULA

"Não há dúvida de que crescimento é um problema biológico, e que deve ser resolvido por experimentação, e não na mesa de um matemático. Mas, para se penetrar profundamente na natureza deste fenômeno, devemos combinar o método experimental com a teoria matemática. Uma possibilidade que tem sido desenvolvida por brilhantes pesquisadores. A combinação do método experimental com a teoria quantitativa é, em geral, uma das mais potentes ferramentas nas mãos da Ciência Contemporânea".

G.F. Gause (1934)

Supomos que a massa de uma célula seja função do tempo, isto é, $m = m(t)$ e que $m_0 = m(0)$ seja sua massa inicial no instante $t = 0$. Vamos supor também que o crescimento da célula seja determinado somente pela velocidade do metabolismo no seu interior.

Como o aumento (*output*) do metabolismo depende da massa das moléculas em atividade, devemos esperar que a razão de crescimento da massa celular seja proporcional à sua massa presente em cada instante – esta lei traduzida em linguagem matemática nos dá

$$\frac{dm}{dt} = km$$

onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade. Esta equação está sujeita à restrição $m < M$, pois quando a célula atinge um determinado tamanho, ela se divide.

Como já vimos, a solução geral da equação diferencial proposta é

$$m(t) = Ae^{kt}$$

Usando a condição inicial $m(0) = m_0$, obtemos a solução particular

$$m(t) = m_0 e^{kt} \quad \text{com} \quad m < M$$

Assim, a célula tem um crescimento exponencial até se dividir, isto é, enquanto $m_0 e^{kt} < M$, o que implica que $t < \frac{1}{k} \ln\left(\frac{M}{m_0}\right)$

Neste caso, o conceito de crescimento específico é muito importante, sendo definido por

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = k \quad \text{(constante)}$$

Assim, enquanto $\frac{dm}{dt}$ mede a velocidade do crescimento, k mede a velocidade de crescimento relativa à massa presente. Se pudéssemos transferir o modelo de crescimento de uma célula para o crescimento de uma planta, seria possível resolver o problema ilustrado a seguir.

EXEMPLO 4

Se uma planta de massa $m = 100$ g cresce 4 g nas próximas 24 horas, queremos determinar: (*i*) Em quanto tempo se tornará uma árvore de 100 kg? (*ii*) De quanto aumentará sua massa em 1 dia quando a planta estiver com 100 kg?

Solução: (*i*) A taxa média de crescimento é $\frac{4\text{ g}}{24\text{ h}}$. Supondo que esta taxa não varie com o tempo, podemos considerar que $\frac{1}{6}$ g/h seja uma boa aproximação de $\frac{dm}{dt}$ (taxa de crescimento instantâneo). A taxa de crescimento específico, neste caso, vale

$$\frac{1/6\text{ g/h}}{100\text{ g}} \cong 1{,}7 \times 10^{-3}\, h^{-1}$$

Então, usando $m_0 = 100\text{ g} = 0{,}1$ kg e $k = 1{,}7 \cdot 10^{-3} h^{-1}$, temos

$$100 = 0{,}1\, e^{0{,}0017t} \quad \text{ou} \quad 0{,}0017t = 1.000$$

e, portanto, $t = 588235{,}3\text{ h} = 24509{,}8\text{ dias} = 67{,}15$ anos.

(*ii*) Usando a solução $m(t) = m_0 e^{t/600}$ para $m_0 = 100$ kg, obtemos

$$m(t) = 100\, e^{24/600} = 104{,}08$$

Portanto, a planta aumentará 4,08 kg em um dia. ■

Entretanto, o crescimento de uma planta ou animal não é tão simples como descrito no problema acima.

A divisão das células em um organismo não é um processo contínuo. A descontinuidade surge inicialmente em algum órgão; no caso de plantas pode surgir talvez na origem de uma folha.

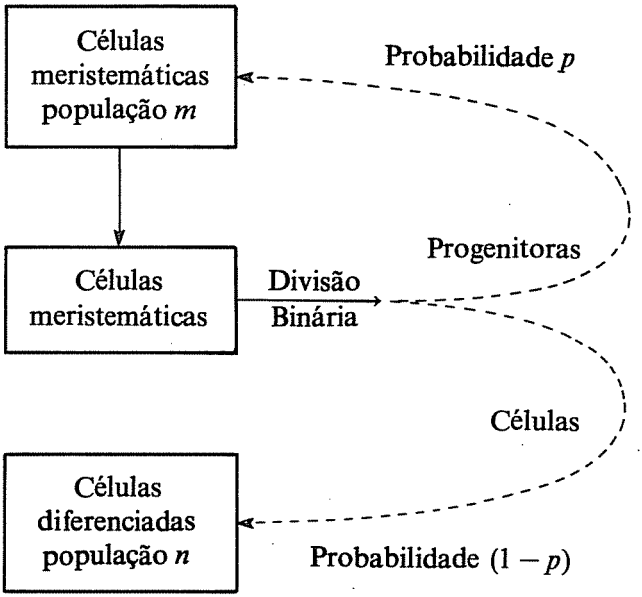
Podemos supor que no início exista apenas uma quantidade m_0 de células meristemáticas (aquelas que se reproduzem por divisão), responsáveis pelo crescimento de uma planta.

Se as células provenientes da divisão de uma meristemática também forem meristemáticas, o processo de divisão continuará, e o modelo que descreve este crescimento será dado por

$$\frac{dm}{dt} = \gamma m, \quad \text{com} \quad m(0) = m_0 \quad \text{(ver Modelo 1)} \tag{10}$$

Se supusermos agora que as células originadas com a divisão de uma meristemática terão probabilidade p de serem meristemáticas, e $(1-p)$ de serem indivisíveis (ou diferenciadas), o modelo proposto por Tornley será dado por

$$\frac{dm}{dt} = \gamma m \left(1 + \frac{\ln p}{\ln 2}\right), \quad m(0) = m_0 \tag{11}$$



Neste modelo podemos observar que

$$1+\frac{\ln p}{\ln 2}<0 \quad \text{se} \quad 0<p<\frac{1}{2}$$

$$=0 \quad \text{se} \quad p=\frac{1}{2}$$

$$>0 \quad \text{se} \quad \frac{1}{2}<p<1$$

$$=1 \quad \text{se} \quad p=1$$

Logo, quando p varia de 1 a 0, a população meristemática passará por um período de crescimento seguido por um declínio e posterior extinção; tal processo é acompanhado pela produção de células diferenciadas.

A parte fundamental neste modelo consiste em determinar o comportamento de $p=p(t)$, e uma primeira aproximação pode ser dada por

$$\frac{dp}{dt}=-kp \quad (k \text{ é a taxa de diferenciação das células}), \text{ onde } p(0)=1 \tag{12}$$

ou seja, $p(t)=e^{-kt}$. Substituindo esta função em (11), temos

$$\frac{dm}{dt}=\gamma m\left(1-\frac{kt}{\ln 2}\right) \tag{13}$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$m(t)=m_0\, e^{\gamma\left(1-\frac{kt}{2\ln 2}\right)t}=m_0 \exp\left[\gamma\left(1-\frac{kt}{2\ln 2}\right)t\right]$$

Analisando esta função, concluímos que o máximo valor de m ocorre quando

$$1-\frac{kt}{\ln 2}=0, \text{ isto é, } t^*=\frac{\ln 2}{k}, \text{ e}$$

$$m(t^*)=m_0\, e^{\frac{\gamma}{2k}\ln 2}=m_0\, e^{\frac{1}{2}\gamma t^*}$$

Também

$$\frac{d^2m}{dt^2}=\gamma\frac{dm}{dt}\left(1-\frac{kt}{\ln 2}\right)-\frac{\gamma mk}{\ln 2}$$

e, portanto,

$$\frac{d^2m}{dt^2}=0 \text{ quando } t=\frac{\ln 2}{k}\left(1\pm\sqrt{\frac{k}{\gamma \ln 2}}\right)=t^*[1\pm(\gamma t^*)^{1/2}]$$

que são pontos de inflexão da curva-população das células meristemáticas (ver Figura 2.10).

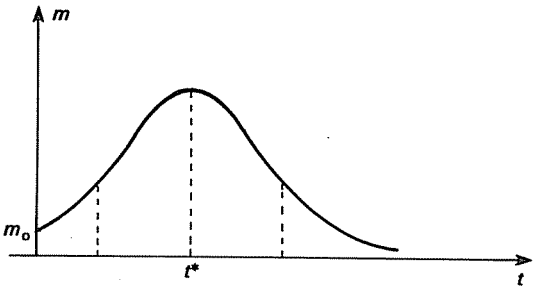


Figura 2.10 População meristemática

A produção de células diferenciadas depende do valor $(1-p(t))$ e sua população $n=n(t)$ é dada pela equação

$$\frac{dn}{dt}=\gamma m-\gamma m\left(1+\frac{\ln p}{\ln 2}\right) \quad \text{(diferença entre o crescimento normal das meristemáticas (Equação (10)) e o crescimento com diferenciação)} \tag{14}$$

ou

$$\frac{dn}{dt}=-\frac{\ln p}{\ln 2}\gamma m \quad \text{com} \quad n(0)=0 \tag{14'}$$

Usando o valor de $m=m(t)$ obtido anteriormente da Equação (13) em (14'), temos

$$\frac{dn}{dt}=\left(\frac{\gamma m_0}{t^*}\right)t\exp\left[\gamma\left(1-\frac{t}{2t^*}\right)t\right], \quad n(0)=0 \tag{15}$$

Integrando esta equação obtemos, depois de algum esforço,

$$n(t)=m_0\left\{1-\exp\left[\gamma\left(1-\frac{t}{2t^*}\right)\right]+\left(\frac{\pi\gamma t^*}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\gamma t^*}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\gamma t^*\right)^{\frac{1}{2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\operatorname{sg}(t-t^*)\cdot\operatorname{erf}\left[\left(\frac{\gamma}{2t^*}\right)^{\frac{1}{2}}|t-t^*|\right]\right\}\right\}$$

onde

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}\,dt \text{ (função erro) e } \operatorname{sg}(x)=\text{sinal de } x\ (=0 \text{ se } x=0)$$

Uma análise qualitativa da função n é mais simples, considerando que

$$\frac{dn}{dt}=0 \text{ se } t=0 \text{ ou } t\to+\infty \text{ e } \frac{d^2n}{dt^2}=0 \text{ quando } t=t^*=\frac{k}{\ln 2}$$

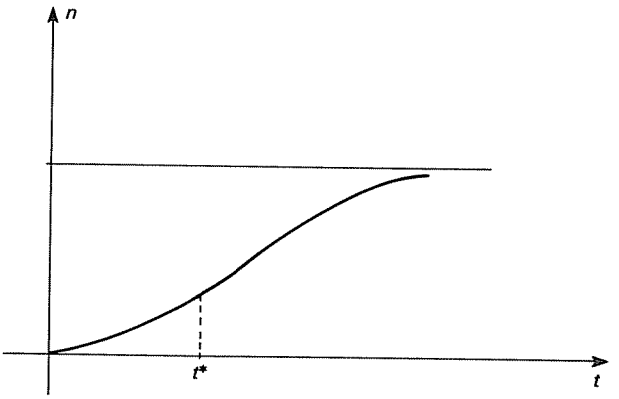


Figura 2.11 População de células diferenciadas

Portanto, o crescimento de uma planta se estabiliza depois de algum tempo! (ver Figura 2.11).

A apresentação de um estudo mais aprofundado deste modelo vai além dos objetivos deste livro. Aqueles que estiverem interessados poderão consultar o livro de J.H.M. Tornley*.

Modelo 2 JUROS COMPOSTOS E INFLAÇÃO

Em um hipotético país instável economicamente, onde a inflação ultrapassa a casa dos 200% ao ano, um problema sério, principalmente da classe média que consegue a duras penas economizar alguns trocados, é como "investir" esta poupança, pelo menos para que não seja corroída pela própria desvalorização do dinheiro. A atração maior parece ser a Caderneta de Poupança que "rende juros e correção monetária". Para ilustrar tal situação, consideremos o exemplo a seguir.

EXEMPLO 5

Um típico investidor "bem-sucedido" foi despedido em junho/84 e recebeu como fundo de garantia o valor de 3 milhões de cruzeiros. Neste mês, a Caixa Econômica de São Paulo estava pagando 0,5% de juros e 9,7% de correção monetária ao mês. Nosso amigo resolveu colocar seu capital na Caixa, na esperança de dias melhores. Suponhamos, por absurdo e generosidade, que logo em seguida ele tenha conseguido um novo emprego, não dependendo mais, portanto, do dinheiro depositado, que permaneceu rendendo normalmente na mesma taxa. Se a inflação acumulada nos 12 meses seguintes foi de 230%, o investidor teve lucro ou prejuízo?

Solução: Seja $C_0 = 3$ seu capital inicial e $r = 9{,}7\%$ a taxa mensal de rendimento; no 1.º mês terá

$$C(1) = C_0 + r\,C_0 = C_0\,(1 + r)$$

* TORNLEY, J.H.M. *Mathematical Model in Plant Physiology*. New York, Academic Press, 1976.

Logo

$$C(1) = 3 \cdot 1{,}097 = 3.291 \text{ milhões}$$
$$C(2) = C_0(1+r) + rC_0(1+r) = C_0(1+r)^2$$
$$C(2) = 3 \cdot (1{,}097)^2 = 3.610 \text{ milhões}$$

De uma maneira geral:

$$\boxed{C(t) = C_0(1+r)^t}$$

para $t = 12$, $C(12) \cong 9{,}112$ milhões.

No entanto, se a inflação real no ano foi de 230%, o investidor perdeu 788 mil cruzeiros. É fácil verificar que o depositante não teria nenhum prejuízo se a taxa mensal da Caixa fosse 10,461%. (É fácil mesmo, mas você precisará de sua calculadora. Faça-o!)

A fórmula $C(t) = C_0(1+r)^t$ fornece, pois, o capital acumulado até o mês t. Agora, se a correção for feita duas vezes ao mês, então

$$C(t) = C_0\left[\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)\right]^t = C_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$$

e, em geral, se a correção for feita n vezes ao mês, o capital será

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Se aproximarmos a situação real por um modelo matemático no qual se considera a correção composta *continuamente*, teríamos

$$C(t) = \lim_{n\to\infty} C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = C_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt} = C_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}$$

tomando $\frac{r}{n} = \frac{1}{h}$, vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h} = e$$

e portanto

$$C(t) = C_0 e^{rt} \text{ e quando } t = 12 \Rightarrow C(12) = 3e^{12 \cdot 0{,}097} = 9.492 \text{ milhões}$$

Desta forma podemos propor como lei de investimento que: "A razão de variação do capital é proporcional ao próprio capital em cada instante", isto é, "dinheiro faz dinheiro continuamente" e, portanto:

$$\frac{dC}{dt} = rC \quad \text{(sendo } r \text{ a taxa de correção mensal)}$$

Se C_0 for o capital inicial, a solução será dada por

$$\boxed{C(t) = C_0\, e^{rt}}$$

EXERCÍCIO

1. Verifique se nos últimos 12 meses um investimento na Caderneta de Poupança deu lucro ou prejuízo. Se você acha que já sabe a resposta, calcule então quanto o investimento ficou abaixo ou acima da inflação.

PROJETO 1 CONTROLE DA DÍVIDA EXTERNA

O controle da dívida externa de um país, segundo o Modelo de Domar, consiste na interação de duas equações simples, obtidas das seguintes suposições

(*i*) A variação da dívida é proporcional à renda do país (PIB)
(*ii*) A variação da renda é proporcional à própria renda

1. Justifique tais suposições e dê seus modelos matemáticos. Resolva o sistema de equações diferenciais do modelo supondo que $D(t_0) = D_0$ seja a dívida inicial e $R(t_0) = R_0$ a renda inicial, tomando $t_0 = 0$.

Sugestão: Integre a equação obtida de (*ii*) e substitua na equação proveniente de (*i*).

Um parâmetro que mostra o controle ou não da dívida externa de um país é o valor da razão $\frac{D(t)}{R(t)}$ quando t cresce.

Calcule este valor para o modelo de Domar.

2. Dizem que a dívida externa brasileira está "fora de controle" – Por "fora de controle" entende-se que a razão $\frac{D(t)}{R(t)} > 0{,}3$, isto é, a dívida externa é 30% do PIB. Calcule os coeficientes de proporcionalidade das equações (Modelo de Domar) e faça um estudo da dívida brasileira.

Governo	*Ano*	*Dívida*	*Governo*	*Ano*	*Dívida*
Vargas (1951/54)	1955	1,79	C. Silva (1967/69)	1970	5,29
Juscelino (1956/61)	1960	1,95	Médici (1969/74)	1974	17,16
Goulart (1961/64)	1964	2,50	Geisel (1974/79)	1979	49,80
C. Branco (1964/67)	1967	3,33	Figueiredo (1979/84)	1984	100,80

Dívida Externa Brasilieira nos últimos 30 anos – fonte: *Retrato do Brasil*. Editora Três-Política Editora, 1 v., fascículo 3, SP, 1984, pp. 19-24.

Modelo 3 DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA

A atividade de uma substância radioativa é medida pelo número de desintegrações por unidade de tempo. Este fenômeno é devido à emissão de três tipos de radiações: partículas α (núcleos de hélio), partículas β (elétrons) e raios γ (ondas eletromagnéticas de alta freqüência). Os principais experimentos de que resultaram tal compreeensão foram realizados por Rutheford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie no final do século passado e no início deste, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante. A formulação matemática desta afirmação segue de maneira bastante simples:

Se $N = N(t)$ é o número de átomos radioativos na amostra no instante t, e N_0 a quantidade inicial destes átomos, isto é, $N(0) = N_0$, então

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

onde $\lambda > 0$ é a constante de desintegração (usamos o sinal negativo porque o número de átomos diminui com o passar do tempo e, portanto, $\frac{dN}{dt} < 0$).

A solução particular da equação é dada por

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Levando em conta que $N = \frac{N_A}{A} m$, onde A é o número de massa do elemento radioativo e N_A é o número de Avogadro que vale $6{,}02 \times 10^{23}$ mols^{-1}, a razão $\frac{N_A}{A}$ é constante para cada elemento e mede o número de átomos em um grama deste elemento. Assim, em termos da massa do material radioativo, a lei da atividade pode ser expressa por

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

A constante λ é determinada experimentalmente. Verificamos que durante um tempo t_1, determinado elemento decaiu uma porcentagem α da quantidade original; logo

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-\lambda t_1}$$

donde

$$-\lambda t_1 = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{-1}{t_1} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)$$

O tempo necessário para que uma quantidade inicial de material radioativo m_0 decaia para a metade $\frac{m_0}{2}$ é denominado *meia-vida* do elemento e denotado por $t_{1/2}$. Para calcular $t_{1/2}$ fazemos

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\lambda t_{1/2}}, \text{ o que implica: } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

A constante de desintegração λ, característica de cada elemento radioativo, permite dizer se este elemento tem vida curta ou longa. Alguns exemplos:

Urânio	U^{238},	$t_{1/2} = 4{,}56 \times 10^9$ anos	$\Rightarrow \lambda_{238} = 0{,}152 \times 10^{-9}$ ano^{-1}
Urânio	U^{235},	$t_{1/2} = 7{,}13 \times 10^8$ anos	$\Rightarrow \lambda_{235} = 0{,}972 \times 10^{-9}$ ano^{-1}
Argônio	Ar^{40},	$t_{1/2} = 1{,}27 \times 10^{-9}$ anos	$\Rightarrow \lambda_{40} = 0{,}546 \times 10^{-9}$ ano^{-1}
Rádio	Ra^{226},	$t_{1/2} = 1.575$ anos	$\Rightarrow \lambda_{226} = 0{,}440 \times 10^{-3}$ ano^{-1}
Chumbo	Pb^{210},	$t_{1/2} = 22$ anos	$\Rightarrow \lambda_{210} = 0{,}315 \times 10^{-1}$ ano^{-1}
Carbono-14	C^{14},	$t_{1/2} = 5.730$ anos	$\Rightarrow \lambda_{14} = 0{,}121 \times 10^{-3}$ ano^{-1}
Bário	Ba^{140},	$t_{1/2} = 13$ dias	$\Rightarrow \lambda_{140} = 19{,}461$ ano^{-1}

Embora a equação diferencial que modela o fenômeno da radioatividade seja bastante simples, a dificuldade maior está em realizar as contagens, objeto dos radioquímicos.

EXEMPLO 6

Se 100 miligramas de tório^{234} são reduzidos a 97,21 miligramas em um dia, calcule a taxa de desintegração deste material e sua meia-vida.

Solução: Seja $m(t)$ a quantidade de tório presente no instante t, com $m_0 = 100$ e $m(1) = 97{,}21$ (o tempo está medido em dias). Então

$$97{,}21 = 100\, e^{-\lambda}, \text{ logo } \lambda = -\ln \frac{97{,}21}{100} = 0{,}0283 \text{ dias}^{-1} \text{ e } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0{,}0283} = 24{,}5 \text{ dias}$$ ■

A presença de chumbo radioativo Pb^{210} e traços de rádio Ra^{226} em pinturas permitem estabelecer se não houve falsificação recente dos quadros.*

Ainda em relação à desintegração radioativa para estabelecer idades até 40.000 anos, o método mais importante foi desenvolvido pelo químico americano W.F. Libby em 1947, tendo recebido o Prêmio Nobel em 1960 por este feito. Este método consiste em utilizar o carbono-14 como material radioativo e se baseia no seguinte: a fotossíntese faz com que todos os vegetais vivos estejam em equilíbrio com o $C^{14}O_2$ atmosférico. Um animal que se alimenta desses vegetais absorve o C^{14} e a proporção deste elemento se mantém constante em seus tecidos. Quando este animal morre, o carbono-14 que estava em equilíbrio em seu corpo começa a se desintegrar. A suposição feita é que a atividade da amostra no momento da morte no passado é igual à atividade de uma amostra semelhante viva hoje (o mesmo acontece quando uma planta morre). Este método é muito utilizado para se datar eventos ocorridos num passado não muito distante e de grande interesse para a arqueologia; vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO 7

Para se poder estimar a época em que foram feitas as pinturas que decoram as paredes da caverna de Lascaux, na França, foi analisada uma amostra do carvão utilizado nos desenhos. Esta análise revelou uma atividade de decomposição de 0,97 dpm/g (decomposição por minuto em um grama). Semelhante análise do carvão produzido da madeira viva mais abundante na região, feita em 1950, apresentou um resultado de 6,68 dpm/g. Estimar a idade das pinturas.

Solução: Usando $t_{1/2} = 5.730$ anos para o carbono-14, obtemos $\lambda = \dfrac{\ln 2}{5.730} \cong 0{,}000121 \cdot \text{ano}^{-1}$ e, então, da equação

$$m(t) = m_0\, e^{-\lambda t},$$

sendo conhecidos

$$m(t) = 0{,}97$$
$$m_0 = 6{,}68$$
$$\lambda = 0{,}000121$$

* BRAUN, M. *Equações Diferenciais e suas Aplicações*. Rio de Janeiro, Campus, 1979, pp. 31-32.

obtemos

$$0{,}97 = 6{,}68\, e^{-1{,}21 \times 10^{-4} t}$$

ou

$$\ln\left(\frac{0{,}97}{6{,}68}\right) = -1{,}21 \times 10^{-4} t \Rightarrow t = 15.947 \text{ anos}$$

Logo, tais pinturas devem ter aproximadamente 16.000 anos. ■

Muitos elementos radioativos, quando decompostos, formam novas substâncias radioativas, como por exemplo U^{235} que decai transformando-se no tório^{234}, que por sua vez decai tornando-se em paládio e assim por diante. A passagem do urânio^{235} a tório^{234} leva aproximadamente $4{,}6 \times 10^9$ anos (isto é, cerca de quatro bilhões e 600 milhões de anos!), enquanto que a passagem do tório^{234} para o paládio^{234} leva cerca de 25 dias. "O mundo real tem desses péssimos hábitos: além de surpreender-nos, mistura valores enormes e minúsculos de modo quase leviano..."*. Se considerarmos um "elemento-mãe" com meia-vida $\mathcal{T}_1$ e o "elemento-filho", formado pela decomposição, com meia-vida $\mathcal{T}_2$, verificamos que:

Como $\lambda_1 = \dfrac{\ln 2}{\mathcal{T}_1}$, podemos escrever para o elemento-mãe $M(t) = M_0 e^{-\frac{\ln 2}{\mathcal{T}_1} t}$ e, então, a taxa de perda de massa deste elemento será:

$$\frac{dM}{dt} = -M_0 \frac{\ln 2}{\mathcal{T}_1} e^{-\frac{\ln 2}{\mathcal{T}_1} t} = M \frac{\ln 2}{\mathcal{T}_1} \tag{16}$$

Supomos que para cada átomo do elemento-mãe decaído, um átomo-filho seja produzido. Indicamos por $m(t)$ a massa do novo elemento formado num instante t; supondo que a taxa de variação de m seja igual à diferença entre o número de átomos provenientes da desintegração de átomos-mãe e o número de átomos-filho que se desintegram, obtemos

$$\frac{dm}{dt} = M \frac{\ln 2}{\mathcal{T}_1} - m \frac{\ln 2}{\mathcal{T}_2} \tag{17}$$

As equações simultâneas (16) e (17) são conhecidas como equações de Bateman, e podem ser reunidas numa única equação diferencial linear

$$\frac{dm}{dt} + \frac{\ln 2}{\mathcal{T}_2} m = M_0 \frac{\ln 2}{\mathcal{T}_1} e^{-\frac{\ln 2}{\mathcal{T}_1} t} \tag{18}$$

que será estudada na Secção 2.6. Adiantamos por hora que sua solução é dada por

$$m(t) = \frac{M_0 \mathcal{T}_2}{\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2} \left(e^{-\frac{\ln 2}{\mathcal{T}_1} t} - e^{-\frac{\ln 2}{\mathcal{T}_2} t}\right) + m_0 e^{-\frac{\ln 2}{\mathcal{T}_2} t} \tag{19}$$

* MEYER, J.F.A. (Matemático do IMECC-UNICAMP).

Este modelo matemático é bastante útil para determinar a idade de rochas formadas há bilhões de anos, considerando na época de sua formação o urânio-238 (elemento-mãe), e no presente o urânio não decomposto e o chumbo Pb^{206} (elemento-filho) que sendo estável possui $\lambda = \dfrac{\ln 2}{\tau_2} = 0$.

EXERCÍCIOS

1. Nas escavações arqueológicas da cidade de Nipur (antiga Babilônia) foi encontrada uma viga carbonizada com uma atividade de 4,09 dpm/g. Usando para o carvão recente a atividade de 6,7 dpm/g, calcule quando se deu tal incêndio na antiga cidade.
2. A enorme mesa redonda presa às paredes do castelo de Winchester – e que é mostrada aos crédulos turistas como sendo a famosa "Távola Redonda" do Rei Arthur – apresentou em 1977 uma atividade de 6,08 dpm/g. Sabendo que a atividade da madeira viva da região é de 6,68 dpm/g, verifique se esta mesa serviu de fato para os cotovelos do Rei e de seus lendários cavaleiros Lancelot, Galahad, Gwain, Percival etc. Do pouco que sabemos dessa fabulosa confraria, uma coisa é certa: viveram no século V.

Modelo 4 ABSORÇÃO DE DROGAS

Um problema fundamental em Farmacologia é saber como cai a concentração de uma droga no sangue de um paciente. O conhecimento deste fato permite estabelecer qual a dosagem a ser inserida e o intervalo de tempo que cada aplicação deve ser feita.

O modelo mais simples é obtido quando supomos que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração da droga na corrente sangüínea. Em termos matemáticos:

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

onde $k > 0$ é uma constante encontrada experimentalmente.

Suponhamos que seja dada ao paciente uma dose inicial y_0, absorvida pelo sangue instantaneamente, no instante $t = 0$. (O tempo de absorção da droga é geralmente muito pequeno, quando comparado com o tempo entre as aplicações das doses.)

A solução geral da equação é dada, então, por

$$y = y_0 e^{-kt}$$

Suponhamos que depois de um tempo T uma segunda dose de mesma quantidade y_0 seja administrada. Teremos então

$y(T_-) = y_0 e^{-kt}$ (quantidade de droga no sangue imediatamente antes da segunda dose)

e

$y(T_+) = y_0 e^{-kt} + y_0$ (quantidade da droga logo após a aplicação da segunda dose)

e, portanto, $y(t) = y_0\,(1 + e^{-kt})\,e^{-k(t-T)}$ nos dá a quantidade de droga no sangue no instante $t \geqslant T$.

Continuando o tratamento, pela injeção da quantidade y_0 no final de cada intervalo de tempo igual a T, obtemos

$$y(2T_-) = y_0\,(1 + e^{-kT})e^{-kT} \quad \text{e} \quad y(2T_+) = y_0\,(1 + e^{-kT})\,e^{-kT} + y_0$$

e

$$y(2T_+) = y_0\,(1 + e^{-kT} + e^{-2kT})$$

e portanto

$$y(t) = y_0\,(1 + e^{-kT} + e^{-2kT})\,e^{-k(t-2T)} \quad \text{para} \quad t \geqslant 2T.$$

Genericamente, depois da n-ésima aplicação, a quantidade de droga no sangue será

$$y(nT_+) = y_0\,(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \ldots + e^{-nkT}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ora, como $1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \ldots + e^{-nkT}$ é a soma de uma P. G. de $(n+1)$ termos, com o primeiro termo igual a 1 e razão e^{-kT}, temos

$$y(nT_+) = y_0 \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}}.$$

Então, quando n cresce, $e^{-(n+1)kT} \to 0$ e, portanto, $y(nT_+)$ tende a

$$\boxed{y_s = \frac{y_0}{1 - e^{-kT}}}$$

que é o nível de saturação da droga (ver Figura 2.12).

Observações:

a. Se sabemos o valor de y_0 (quantidade de cada dose) e o nível de saturação y_s, podemos determinar o intervalo de aplicação T

$$1 - e^{-kT} = \frac{y_0}{y_s} \Rightarrow e^{-kT} = 1 - \frac{y_0}{y_s} \Rightarrow T = -\frac{\ln\left(\dfrac{y_s - y_0}{y_s}\right)}{k}$$

b. Se temos y_s e T, podemos obter qual deve ser a dosagem y_0, isto é,

$$y_0 = y_s\,(1 - e^{-kT})$$

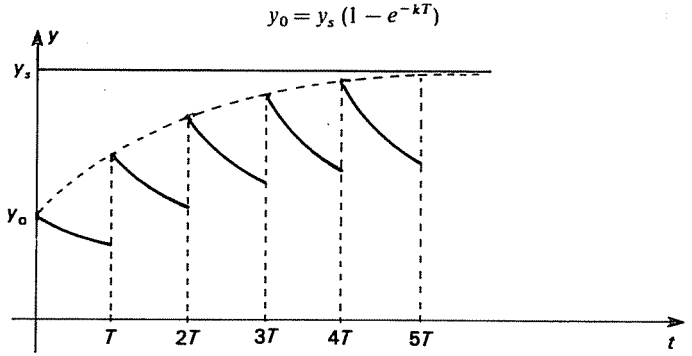


Figura 2.12

EXERCÍCIOS

1. Se a um paciente é dada uma dose inicial igual a y_s e a segunda dose, de quantidade y_r (no instante T), elevar o nível de droga no sangue novamente para y_s e assim sucessivamente, mostre que $y_r = y_s(1 - e^{-kT}) = y_0$. Calcule $y(t)$ num instante qualquer e faça o esboço da solução.
2. Se a primeira dose dada a um paciente for y_s, a segunda $y_s/2$ ... a n-ésima y_s/n, como devem ser os intervalos de tempo das aplicações para que $y(t) < y_s$ antes de cada aplicação e $y(t) = y_s$ logo após cada aplicação?

PROJETO 2

No modelo de absorção de drogas, muitas hipóteses simplificadoras foram inseridas.

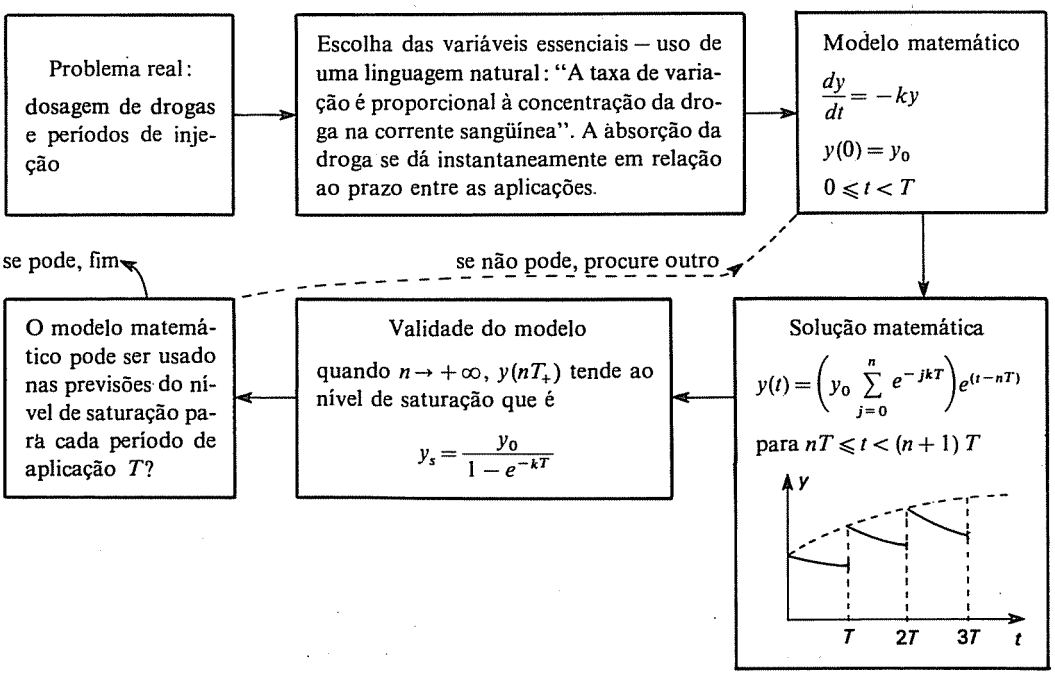
Converse com alguém do ramo e procure melhorar o modelo acrescentando outras considerações essenciais que, por motivos pedagógicos, foram omitidas.

Sugestão: Procure verificar as seguintes questões:

- A absorção de drogas é sempre semelhante?
- Os períodos entre aplicações podem ser variados?
- O comportamento do organismo do paciente pode ser modificado durante o tratamento?

Você vai observar que quanto mais rico o modelo, mais complexo. De qualquer forma, se o modelo não for validado, isto é, se não for coerente com os dados experimentais, deve ser modificado e melhorado.

O seguinte esquema poderá ajudá-lo:



Modelo 5 RESFRIAMENTO DE UM CORPO – DIFUSÃO DE CALOR

Um corpo que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em um meio ambiente na temperatura T, tende àquela do meio que o cerca T_a. Assim, se a temperatura $T < T_a$, este corpo se aquecerá e, caso contrário, se resfriará.

A temperatura do corpo, considerada uniforme, será pois uma função do tempo $T = T(t)$. Verifica-se experimentalmente que quanto maior for o valor $|T - T_a|$ mais rápida será a variação de $T(t)$.

Isto é evidenciado de forma precisa pela chamada *Lei de resfriamento* enunciada por I. Newton: "A taxa de variação da temperatura de um corpo (sem fonte interna) é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente".

Colocando em termos matemáticos

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda (T - T_a) \tag{1}$$

onde $\lambda > 0$ pois se $T > T_a$ então $\frac{dT}{dt} < 0$ e se $T < T_a$, $\frac{dT}{dt} > 0$ (ver Figura 2.13).

Observe que $T = T_a$ é solução da Equação (1) e significa que se a temperatura de um corpo for igual à temperatura ambiente, então ela não variará.

A solução geral da Equação (1) é dada por

$$T(t) = k\, e^{-\lambda t} + T_a, \quad (k \in \mathbb{R})$$

Usando $T(0) = T_0$, obtemos $k = T_0 - T_a$. Assim,

$$T(t) = (T_0 - T_a)\, e^{-\lambda t} + T_a \tag{2}$$

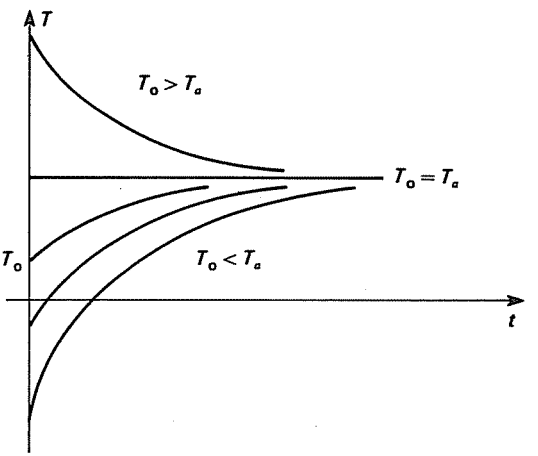


Figura 2.13

Neste modelo matemático, a temperatura do corpo só atinge a temperatura T_a no limite em que $t \to +\infty$; entretanto, na realidade, a temperatura ambiente é atingida num tempo finito!

No exemplo, podemos chamar de t_∞ o tempo necessário para que T atinja 99% de T_a. Em termos numéricos, isto significa que se o erro relativo for de 1% ou menos, podemos considerar $T(t)$ como sendo praticamente T_a. Assim,

$$\pm\frac{99}{100}T_a=(T_0-T_a)\,e^{-\lambda t_\infty}+T_a$$

$$e^{-\lambda t_\infty}=\left|\frac{1}{100}\cdot\frac{T_a}{(T_a-T_0)}\right|\Rightarrow -\lambda t_\infty=\ln\left|\frac{T_a}{100\,(T_a-T_0)}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_\infty=\frac{1}{\lambda}\ln\left|\frac{100\,(T_a-T_0)}{T_a}\right|$$

EXEMPLO 8

Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela secretária que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chega, 2 horas depois da chamada, examina o cadáver. Uma hora depois o detetive prende a secretária. Por quê?

Solução: A temperatura do escritório era de 20°C. Quando a polícia chegou, mediu a temperatura do defunto, achando 35°C; uma hora depois, mediu novamente obtendo 34,2°C. Supondo que a temperatura normal de uma pessoa viva seja constante e igual a 36,5°, temos

$$T(0)=36{,}5$$

$$T(t^*)=35$$

t^* tempo decorrido desde o instante da morte, e

$$T(t^*+1)=34{,}2$$

é a temperatura da vítima 1 hora depois que a polícia chegou.

A equação de resfriamento para este caso é

$$T(t)=(36{,}5-20)\,e^{-\lambda t}+20$$

Assim,

$$35=16{,}5e^{-\lambda t^*}+20\Rightarrow\frac{15}{16{,}5}=e^{-\lambda t^*}$$

$$34{,}2=16{,}5\,e^{-\lambda(t^*+1)}+20\Rightarrow\frac{14{,}2}{16{,}5}=e^{-\lambda(t^*+1)}$$

Resolvemos o sistema, dividindo membro a membro as equações, $\frac{15}{14{,}2}=\frac{1}{e^{-\lambda}}$, o que implica $e^{\lambda}=1.056.338$, donde $\lambda=0.05481$ e, portanto, $t^*=\dfrac{-\ln\left(\frac{15}{16{,}5}\right)}{\lambda}=1{,}73898$ h.

Podemos concluir, pois, que o assassinato ocorreu "exatamente" 1 hora, 44 minutos e 20 segundos antes de a polícia chegar; portanto, quando a secretária telefonou, seu chefe ainda estava vivo!

Este é um problema de ficção policial muito interessante e realmente impossível, pois os dados colhidos pelo legista estão completamente fora da realidade, uma vez que neste caso, o tempo necessário para o corpo atingir a temperatura de 19,8°C (equivalente a 99% da temperatura ambiente) seria $t_\infty=80{,}5$ horas, quando o valor normal para t_∞ é aproximadamente 6 horas! Concluindo, *nem sempre um problema com resposta convincente está baseado em dados reais.*

Perguntamos então: Quais seriam as medidas corretas obtidas pelo legista para termos uma melhor aproximação da realidade?

Tomamos $t_\infty = 6$ e obtemos λ da fórmula

$$6 = \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{100\,(20 - 36{,}5)}{20} \right|$$

ou seja, $\lambda = 1{,}36$.

Se quisermos obter $t^* = 1{,}7389$, fazemos

$$T(t^*) = 16{,}5\, e^{-1{,}36 \cdot 1{,}7389} + 20 \cong 21{,}55°C$$

e

$$T(t^* + 1) = 16{,}5 \cdot e^{-1{,}36 \cdot 2{,}7389} + 20 \cong 20{,}39°C$$

Por outro lado, *nem sempre um problema com dados convincentes é real.*

Agora, suponha ainda que o indivíduo assassinado estivesse com febre quando morreu; seria ainda possível descobrir o instante "exato" de sua morte? ■

Modelo 6 DIFUSÃO DE MOLÉCULAS ATRAVÉS DE UMA MEMBRANA CELULAR

O processo de difusão através de membranas celulares é bastante complicado. Faremos aqui uma aproximação simplificada da realidade baseada na *Lei de Fick*: "O fluxo através de uma membrana é proporcional à área da membrana e à diferença de concentração de ambos os meios separados por ela, se esta diferença de concentração for pequena".

Suponhamos que uma célula de volume constante V esteja mergulhada em um meio líquido homogêneo de concentração C_e. O processo de difusão garante que existe um fluxo de moléculas através da membrana da célula em ambas as direções, até que a concentração da solução em seu interior $C = C(t)$ seja igual a C_e (ver Figura 2.14).

Seja $m = m(t)$ a massa da solução no interior da célula, então pela definição de concentração,

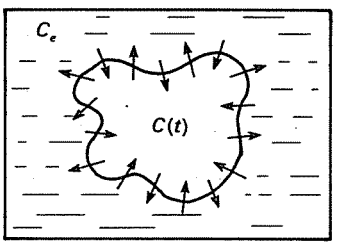


Figura 2.14

$$m(t) = V \cdot C(t) \tag{1}$$

O fluxo pode ser representado por $\frac{dm}{dt}$ (taxa de variação da massa). Assim, a lei de Fick é expressa matematicamente por:

$$\frac{dm}{dt} = kA\,(C_e - C). \text{ Como } \frac{dm}{dt} = V\frac{dC}{dt}, \text{ vem}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{kA}{V}(C_e - C) \tag{2}$$

onde A é a área da membrana (suposta constante) e k é a constante de *permeabilidade*, determinada para cada solução, estrutura e espessura da membrana.

Se $C_e > C(t)$ em cada instante t, o fluxo de moléculas será maior no sentido de fora para dentro da célula e, portanto, entram mais células do que saem. Isto implica que $C = C(t)$ é crescente, isto é, $\frac{dC}{dt} > 0$. O contrário ocorre quando $C_e < C(t)$ (ver Figura 2.15).

Desta forma, podemos considerar $k > 0$ em ambos os casos.

A solução geral da equação é dada por

$$C(t) = K e^{-\frac{kA}{V}t} + C_e \tag{3}$$

(K é a constante de integração)

Se a concentração inicial da solução no interior da célula for $C_0 = C(0)$ então

$$C(t) = (C_0 - C_e)\, e^{-\frac{kA}{V}t} + C_e \tag{4}$$

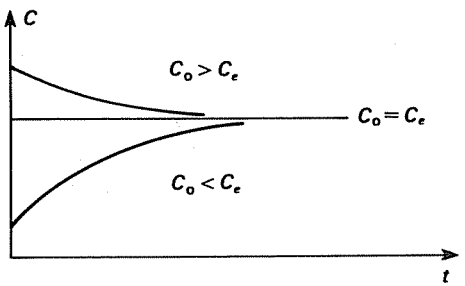


Figura 2.15

C_e é um ponto de equilíbrio da Equação (2). Se $C_0 = C_e$, então $C(t) = (C_e - C_e)\, e^{-\frac{kA}{V}t} + C_e = C_e$, para todo t e $\frac{dC}{dt} = 0$. Isto define uma das soluções da equação, obviamente aquela identificada por: "se as concentrações dentro e fora são iguais, nada muda".

Se, no entanto, $C_0 \neq C_e$, como $-\frac{kA}{V} < 0$, então

$$\lim_{t \to \infty} C(t) = C_e,$$

pois $e^{-\frac{kA}{V}t}$ tende a zero quando t cresce.

Será que a Lei de Fick se constitui numa simplificação exagerada? Como seria então uma equação que melhor representasse o processo de difusão? Seria razoável supor que o fluxo seja uma função da diferença de concentrações $F(C_e - C)$ e que $F(0) = 0$, pois se não há diferença de concentração, certamente não deve haver fluxo.

Supondo que F possa ser desenvolvida em série de Taylor, temos

$$F(C_e - C) = k_1\,(C_e - C) + k_2\,(C_e - C)^2 + \ldots$$

No exemplo acima, supusemos que a diferença de concentrações é pequena e, portanto, os termos de ordem superior seriam muito pequenos para terem uma influência notável, comparados com o termo de primeiro grau. Este é um procedimento muito comum por dois motivos: primeiro, os resultados obtidos com este modelo podem ser (e como já vimos, têm sido) uma boa descrição do fenômeno estudado e este é o teste decisivo para qualquer modelo; em segundo lugar, a obtenção experimental da constante k_2 não é trivial e a descrição completa da função $F(C_e - C)$ pode ser um trabalho experimental muito difícil. Isto quer dizer que formular um modelo muito detalhado de um problema, que exige dados impossíveis de serem obtidos, pode ser importante para a análise teórica do fenômeno, mas não para o estudo de um problema específico.

EXERCÍCIOS

1. Suponha que no problema de difusão acima, seu amigo citologista lhe garanta que pode obter a constante k_2 e você resolve considerar o problema com

$$F(C_e - C) \cong k_1 (C_e - C) + k_2 (C_e - C)^2.$$

Apoiado em sua experiência com os Exercícios 1 e 2, referentes ao Modelo 4, compare as soluções da equação

$$\frac{d(C - C_e)}{dt} = \frac{A}{V}[k_1 (C_e - C) + k_2 (C_e - C)^2]$$

com as do Modelo 6, tanto do ponto de vista matemático como do problema em questão.

Voltaremos a este problema de difusão sob outros aspectos nos Capítulos 3, 4 e 6.

Se você encontrar dificuldades neste exercício estude antes o modelo populacional que se segue e acrescente assim argumentos para a afirmação de que a matemática serve de síntese abstrata para idéias que surgem camufladas nas mais variadas formas.

2. "*A natureza tem por princípio ser econômica*".

Leonardo da Vinci

Veja, por exemplo, o formato do tronco de uma palmeira que pode ser considerada como uma viga de secção circular em posição vertical. Suponha que a única função do tronco seja suportar-se a si mesmo e que o material de que é constituído seja uniforme. Discuta a validade destas hipóteses para uma árvore frondosa!

A resistência de um material para suportar um peso sobre ele é medida pela pressão limite, isto é, o peso sustentável é proporcional à área da base de suporte. Partindo destas hipóteses, obtenha o perfil que se pode esperar do tronco de uma palmeira.

3. Suponha que a atmosfera sobre uma determinada região tenha temperatura uniforme e considere:

a. Lei de Boyle: a pressão P do ar é proporcional à sua densidade, se a temperatura for constante, e

b. A pressão atmosférica é igual ao peso de uma coluna vertical de ar sobre uma superfície de área unitária.

Obtenha a função que permite calcular a altura pela pressão atmosférica.

A que altitude a densidade do ar é a metade daquela da superfície da Terra? (O metro cúbico de ar pesa 1.250 g na superfície da Terra.)

I. M. E. C. C.
BIBLIOTECA

Modelo 7 DINÂMICA POPULACIONAL

Há muito tempo os cientistas de diversas áreas procuraram ferramentas matemáticas para poderem estimar o crescimento de uma população, planejar o uso correto de recursos públicos, programar a construção de postos de atendimento médico, a urbanização planificada de cidades em crescimento, alocação de salas de aula, turnos, dependências de lazer etc.

Também queremos avaliar o crescimento de populações para prever se uma temporada de pesca será boa ou má, ou preparar-nos para uma invasão de pernilongos, gafanhotos e outras pragas.

Mas é ainda mais urgente prever quantos seremos na Terra e quantos recursos teremos nas próximas décadas. Em quantos anos dobraremos nossa população nacional? Mundial? Quanto alimento seremos capazes de produzir? Considerando o ritmo de crescimento da população, o mercado de trabalho absorverá toda a mão-de-obra que se formará? Quantos estarão desempregados?

O economista e demógrafo inglês Thomas Robert Malthus foi responsável pela primeira tentativa de estimar o crescimento da população mundial. Seu trabalho, "An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society", publicado anonimamente em 1798, usou um modelo que estabelecia que o crescimento populacional se daria segundo uma progressão geométrica, se não fosse controlado, enquanto os meios de sobrevivência cresceriam em progressão aritmética. Malthus era pessimista como economista e, ao longo do tempo, publicou seu trabalho em sucessivas edições às quais ele acrescentou muitos dados factuais que ilustravam sua lei. Vamos tentar traduzir sua lei em termos de equações diferenciais, lembrando que seus trabalhos e seu alerta funcionaram muito eficientemente para refrear o desvairado otimismo econômico da época.

Seja, então, $P = P(t)$ o total da população de um país num instante t. Num intervalo de tempo Δt, a Lei de Malthus pressupõe que os nascimentos e as mortes são proporcionais ao tamanho da população e ao tamanho do intervalo, isto é,

$$\text{número de nascimentos} = \alpha P(t)\Delta t \text{ e número de mortes} = \beta P(t)\Delta t$$

onde α é o coeficiente de natalidade e β o de mortalidade.

Assim,

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha P(t)\Delta t - \beta P(t)\Delta t$$

$$\Delta P = (\alpha - \beta)P(t) \cdot \Delta t$$

ou

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t)$$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos, da equação de diferenças, a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P \tag{1}$$

"A taxa de variação de uma população é proporcional à população em cada instante". Já vimos algo parecido, não?

A solução de (1) será

$$P(t) = P_0\, e^{(\alpha-\beta)t}, \qquad P(0) = P_0 \tag{2}$$

Se $\alpha = \beta$ (o que significa que os índices de natalidade e mortalidade coincidem), $P(t) \equiv P_0$ e, portanto, a população não varia (ver Figura 2.16a).

Se $\alpha > \beta$ (isto é, o índice de natalidade é maior que o de mortalidade), a população cresce exponencialmente com o tempo (ver Figura 2.16b).

Se $\alpha < \beta$, a população diminui e tende à extinção à medida que t cresce (ver Figura 2.16c).

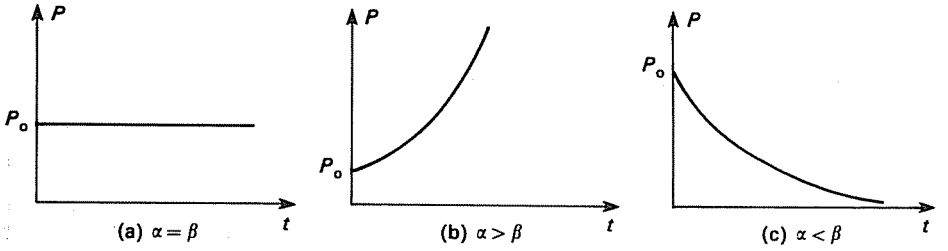


Figura 2.16

Em retrospectiva, o modelo malthusiano acabou não se revelando eficiente para estimativas populacionais em países desenvolvidos. Não obstante, seu alerta continuou influenciando o pensamento econômico durante muito tempo. A Lei de Malthus serve, no entanto, para estimativas populacionais a curto prazo em países do terceiro mundo, além de se mostrar apropriada para certas populações de microrganismos em períodos limitados de tempo. No entanto, o modelo malthusiano falha pelo fato de prever crescimentos populacionais cada vez maiores, o que não representa a realidade. Malthus sustentava que a população cresceria até um limite de subsistência e, então, devido à fome, à guerra, às condições sanitárias, à miséria, não mais aumentaria. De fato, estes fatores citados — além de outros, como precárias situações de moradia e poluição ambiental — afetam de modo sistemático o crescimento populacional. Para Malthus, estas "condições" funcionariam como "mecanismo" ativado para manter a população em um nível aceitável. Isto aparece em (2), na forma de $\lambda = \alpha - \beta$.

Levando em conta os fatores inibidores, Verhulst propôs, em 1837, uma modificação na equação original de Malthus. Este modelo de Verhulst supõe que a população de uma certa espécie, vivendo num determinado meio, atinja um limite máximo sustentável, dado por $P_\alpha = \lim_{t\to\infty} P(t)$; considera ainda que a variação de população esteja sujeita a um fator de proporcionalidade inibidor. Ou seja, é preciso que a equação incorpore a queda de crescimento, à medida que a população cresce.

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot f(P)$$

com

$$f(P) = \lambda\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right), \quad \lambda > 0$$

Pode-se observar que quanto menor o valor de P, maior será o de $f(P)$ e quando P se aproxima do limite P_∞, $f(P)$ se torna bem pequeno. Explicitando $f(P)$ na equação diferencial, obtemos a equação na forma

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) \tag{3}$$

que, comparada à Equação (1) de Malthus, nos permite observar que a taxa de crescimento $\alpha - \beta = \lambda - \dfrac{\lambda}{P_\infty} \cdot P$ decresce linearmente com a população, e tende a zero quando $t \to \infty$.

A Equação (3) é também conhecida como equação logística e foi utilizada em 1920 por Pearl e Reed no estudo da população norte-americana.

Antes de procurar soluções mais completas (e bem mais complicadas!) verificamos que tanto $P(t) \equiv 0$ quanto $P(t) \equiv P_\infty$ são soluções da Equação (3). Não havendo mais soluções "simples" a verificar e considerando $P(t) \neq 0$ e $P(t) \neq P_\infty$, temos

$$\int \frac{dP}{P\,(1 - P/P_\infty)} = \int \lambda dt$$

Usando a técnica de frações parciais para resolver a integral do 1.º membro, obtemos

$$\int\left(\frac{1}{P} + \frac{1/P_\infty}{1 - P/P_\infty}\right) dP = \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right| = \ln\left|\frac{P}{1 - P/P_\infty}\right|$$

Logo

$$\ln\left|\frac{P}{1 - P/P_\infty}\right| = \lambda t + A$$

Se, quando $t = 0$, $P(0) = P_0$, temos ainda

$$A = \ln\left|\frac{P_0}{1 - P_0/P_\infty}\right| = \ln\left|\frac{P_\infty P_0}{P_\infty - P_0}\right|$$

e portanto

$$\ln\left|\frac{P}{1 - P/P_\infty}\right| = \lambda t + \ln\left|\frac{P_\infty P_0}{P_\infty - P_0}\right|$$

ou seja

$$\ln\left|\frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)}\right| = \lambda t$$

Daí, vem sucessivamente

$$\frac{P}{P_\infty - P} = \frac{P_0}{P_\infty - P_0} e^{\lambda t}$$

$$P(P_\infty - P_0) = P_0(P_\infty - P) e^{\lambda t}$$

$$P(P_\infty - P_0 + P_0 e^{\lambda t}) = P_0 P_\infty e^{\lambda t}$$

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty e^{\lambda t}}{P_\infty - P_0 + P_0 e^{\lambda t}} = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0) e^{-\lambda t} + P_0}$$

e, finalmente,

$$P(t) = \frac{P_\infty}{\left[\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right] e^{-\lambda t} + 1} \tag{4}$$

Assim, vê-se que a população depende dos parâmetros λ, P_0, P_∞ que estabelecem a equação diferencial e a condição inicial, e é uma função do tempo, como era esperado.

Observamos que $P(0) = P_0$ e $\lim_{t \to \infty} P(t) = P_\infty$. Também $P(t) \equiv 0$ e $P(t) \equiv P_\infty$ são soluções da equação e, então, para esboçar um gráfico das soluções, devemos comentar que:

1. se $P_0 > P_\infty$, então $P(t)$ tende a P_∞, decrescendo (verifique que, neste caso, $\frac{dP}{dt} < 0$;

2. se $0 < P_0 < P_\infty$, $P(t)$ tende a P_∞, de modo crescente*. Agora podemos traçar o gráfico... Mas isto ainda é uma tarefa difícil; é melhor estudarmos antes o comportamento de $P(t)$. Voltando à expressão de $\frac{dP}{dt}$, obteremos a variação de $\frac{dP}{dt}$ com relação a P:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P - \frac{\lambda}{P_\infty} P^2$$

Isto é, $\frac{dP}{dt}$ como função de P é uma parábola de concavidade para baixo e cujas raízes $P = 0$ e $P = P_\infty$ recebem o nome de "pontos de equilíbrio" da equação diferencial, pois aí $\frac{dP}{dt} = 0$ e, portanto, $P(t)$ é constante. Como $\lambda > 0$, então teremos $\frac{dP}{dt}$ crescente para $0 < P < \frac{P_\infty}{2}$ e $\frac{dP}{dt}$ decrescente se $\frac{P_\infty}{2} < P < P_\infty$ (ver Figura 2.17).

---

* Verifique agora, que o aparente "esquecimento" do módulo é razoável, no processo de explicitação de $P(t)$.

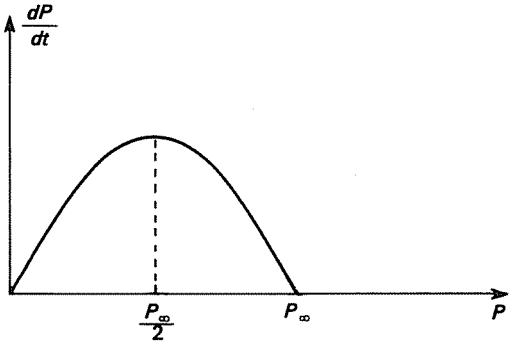


Figura 2.17

O valor máximo de $\frac{dP}{dt}$ relativamente a P é atingido quando $P(t)=\frac{P_\infty}{2}$, isto é, quando a população for igual à metade da população limite teremos aí a maior taxa de variação populacional. Substituindo este valor na expressão $P(t)$, poderemos obter este instante de máxima variação:

$$\frac{P_\infty}{2}=\frac{P_0\,P_\infty}{(P_\infty-P_0)\,e^{-\lambda t}+P_0}$$

ou

$$(P_\infty-P_0)\,e^{-\lambda t}=2P_0-P_0$$

portanto,

$$e^{\lambda t}=\frac{P_\infty-P_0}{P_0}$$

e, então,

$$t_M=\frac{1}{\lambda}\ln\left|\frac{P_\infty-P_0}{P_0}\right|$$

onde t_M é o instante em que a variação da população é máxima, considerando $P_0<P_{\infty/2}$.

Neste instante t_M, verificamos que

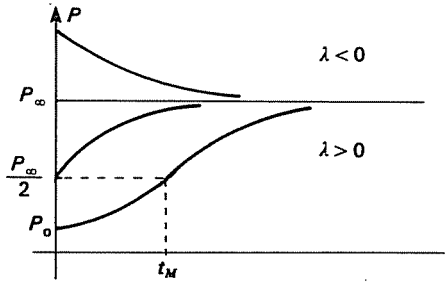
$$\frac{dP}{dt}=\lambda\frac{P_\infty}{4}\neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2P}{dt^2}=0$$

Logo, $t=t_M$ é um ponto de inflexão de $P(t)$. Desta forma, se

$$P_0=\frac{P_\infty}{2}, \text{ então } t_M=0$$

Se $P_0>\frac{P_\infty}{2}$, a curva $P(t)$ não tem ponto de inflexão, e a população cresce (ou decresce) para P_∞, sem mudar de concavidade (ver Figura 2.18).

A vantagem do modelo de Verhulst sobre o de Malthus está principalmente no fato de incorporar os efeitos da superpopulação e, em conseqüência, $P(t)$ tende a um valor P_∞ fixado.



- se $P_0 > P_\infty$ a população decresce exponencialmente tendendo a P_∞
- se $0 < P_0 < P_\infty$ a população cresce para P_∞
- se $P_0 = 0$ ou $P_0 = P_\infty$ a população não varia

Figura 2.18 Curva logística

Outros modelos também levam em conta o efeito da superpopulação:

Modelo de Gompertz (1825): $\dfrac{dP}{dt} = \lambda P \ln \dfrac{P_\infty}{P}$, $\lambda > 0$;

Modelo de Smith (1963): $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{\lambda P (P_\infty - P)}{P_\infty + aP}$, λ e a são constantes positivas;

Modelo de Goel, Maitra e Montroll (1971): $\dfrac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\dfrac{P}{P_\alpha}\right)^\alpha\right]$; λ, $\alpha > 0$;

Modelo de Ayala, Ehrenfeld, Gilpin (1973): $\dfrac{dP}{dt} = P(\lambda - aP + be^{-P})$; a, b, $\lambda > 0$.

Há ainda outros mais recentes (Monod, Engel etc.).

Entretanto, ao examinarmos o crescimento populacional na Terra, vemos um comportamento diferente dos modelos que indicam uma população limite. Ocorre que P_∞ é constante ao longo de determinados períodos da História, aumentando seu valor com o progresso da população. Assim, antes do advento das ferramentas (até aproximadamente 10.000 anos atrás), $P_\infty \cong 10^7$, passando a $P_\infty = 10^8$ com a Revolução Agrícola e a $P_\infty = 5 \cdot 10^9$ com a Revolução Industrial. E agora, com o escasseamento dos recursos renováveis principais, qual será o valor de P_∞? (ver Figura 2.19).

Voltaremos ao problema de dinâmica populacional em outras oportunidades, quando tivermos mais "ferramentas" (teorias) matemáticas à nossa disposição.

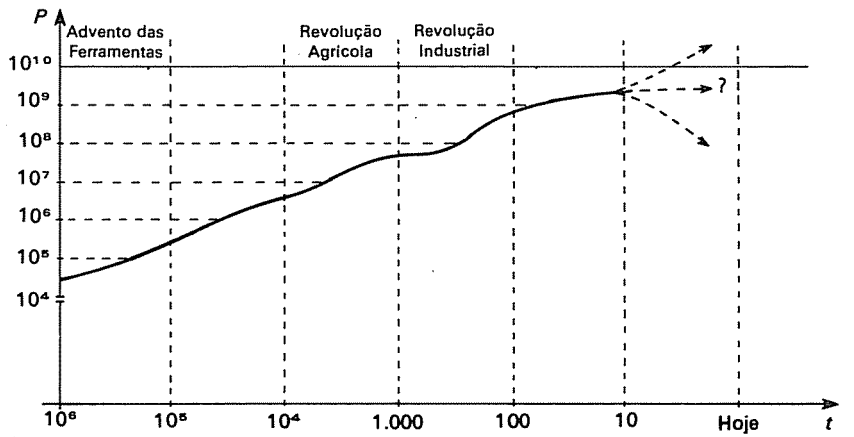


Figura 2.19 População mundial

PROJETO 3

Analise cada um dos modelos alternativos para crescimento populacional limitado (Gompertz, Smith, Goel, Ayala), comparando os resultados obtidos com o modelo de Verhulst – Todas as equações diferenciais que comparecem nestes modelos podem ser resolvidas como caso particular da equação autônoma geral $\frac{dy}{dx} = f(y)$.

PROJETO 4

Sem levar em consideração eventuais erros cometidos nos recenseamentos, a população do Brasil apresentou os valores fornecidos na Tabela 2.1:

1. Calcule o coeficiente λ da equação de Verhulst e estime o valor de P_∞. Qual a época em que se deu a maior variação populacional? A que acontecimentos históricos corresponde este período?
2. Calcule o coeficiente λ e o expoente α do modelo de Goel para a população brasileira.
3. Suponha que com a "retomada da democracia" a população cresça a 10% do crescimento atual; qual seria o próximo P_∞?
4. Faça um gráfico da população real e compare com as soluções das equações de Verhulst e Goel.
5. Utilize outros modelos sugeridos anteriormente (ou crie algum) que melhor se adaptem à situação brasileira.
6. Compare os crescimentos dos diversos países da Tabela 2.1 com o crescimento geral da América Latina.
7. Utilize dados atualizados para melhorar o modelo.

"A rapidez sem interrupção de seu crescimento é a primeira e mais notável característica da população das nações e territórios da América Latina, em todo o século XX.

As estatísticas do registro civil das populações latino-americanas são bem precárias e incompletas, comparadas à grande maioria dos países, particularmente antes dos anos de 1920. Todavia, com as poucas informações disponíveis dignas de fé, e com a aplicação de modernas técnicas de melhoria dos dados por meios indiretos, pode-se reconstruir, com razoável margem de precisão, as tendências e a dinâmica demográfica dos países da América Latina".*

Tabela 2.1 População de alguns países da América Latina de 1920 a 1975 (em milhões de habitantes)*

Países e Territórios	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1975
Argentina	8.861	11.896	14.169	17.085	20.850	24.352	26.262
Brasil	27.404	33.568	41.233	52.326	70.327	93.245	107.508
Paraguai	699	880	1.111	1.337	1.740	2.419	2.888
Peru	4.862	5.651	6.681	7.968	10.024	13.586	15.869
Uruguai	1.391	1.704	1.947	2.198	2.542	2.889	3.066
América Latina	88.854	107.408	129.589	163.270	214.352	284.151	328.059

Quanto ao comportamento geral do aumento da população no Brasil, a taxa de incremento era de 2,8% ao ano entre 1960/1970, tendo caído para 2,4% entre 1970/80, devendo se manter em torno de 2% entre 1980/2000.

* MARCÍLIO, M.L. A População da América Latina de 1900 a 1975. In *Ciência e Cultura*. São Paulo, SBPC, 32(9), 1980.

A projeção do Banco Mundial é que no ano 2000 a população brasileira deverá ser de 181 milhões, contra os 127 milhões em 1982 e, apesar da forte redução da taxa de natalidade, continuará crescendo ao longo dos anos, chegando ao ano 2050 com 279 milhões de habitantes. A estabilidade da população brasileira deve ser em torno de 304 milhões (Relatório do BIRD). Use estas afirmações para melhorar seu modelo matemático ou use seu modelo para refutar tais afirmações!

PROJETO 5 DIFUSÃO DE RUMORES, IDÉIAS, NOTÍCIAS, DOENÇAS ETC.

"Una notizia un pò originale non ha bisogno di alcun giornale – come una freccia dell'arco scocca, vola veloce di bocca in bocca".

F. de André
Bocca di Rosa

O processo de difusão de rumores está associado ao encontro entre indivíduos de uma população. Mas nem todos estes encontros resultam em uma transmissão do rumor, pois, para isto, é necessário que o encontro seja entre uma pessoa depositária da informação e outra não ciente e que, ainda neste caso, haja comunicação entre as duas pessoas.

Este processo não é simples e tem sido estudado por sociólogos e epidemiólogos. O problema de difusão de nêutrons que guarda uma certa semelhança de idéias com este problema será visto no Modelo 12 (ver Secção 2.7.3).

Partindo de uma hipótese bastante simplificadora, suponha que 20% dos possíveis encontros entre a população ciente e a não ciente sejam efetivamente bem-sucedidos na transmissão de um rumor (boato).

1. Obtenha o tempo necessário para que 90% da população tome conhecimento do fato, se apenas 1 pessoa inicia o rumor em uma população de 3.000 pessoas.
2. Calcule ainda o instante em que o rumor é espalhado com maior velocidade e verifique quantas pessoas tomaram conhecimento dele neste instante.
3. Exercite a sua curiosidade e imaginação neste problema, tanto nas hipóteses quanto nas perguntas, consultando pessoas interessadas.

2.4 EQUAÇÃO COM SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Considere uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\, g(x), \tag{1}$$

onde f e g são funções contínuas em algum intervalo de $\mathbb{R}$.

Dizemos que esta equação é "separável" ou "tem variáveis separáveis".

Utilizando o formalismo de Leibnitz separamos as variáveis

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\, dx$$

e integramos

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{f(s)} = \int_{x_0}^{x} g(z)\, dz, \text{ obtendo } F(y) = G(x)$$

Se pudermos inverter a função F, a solução formal será $y = F^{-1}(G(x))$.

EXEMPLO 1

Na equação

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3(1+y)$$

temos $f(y) = 1 + y$ e $g(x) = 4x^3$, logo

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{1+s} = \int_{x_0}^{x} 4z^3 dz$$

ou

$$\ln|1+y| = x^4 + C' \quad (C' \text{ constante})$$

Para $y > -1$,

$$\ln(1+y) = x^4 + C'$$

e, invertendo,

$$F(y) = \ln(1+y) = G(x)$$

Portanto, temos

$$y = C\,e^{x^4} - 1 \quad (C = e^{C'})$$

Obtenha solução para $y < -1$.

Para justificarmos o procedimento formal do Exemplo 1 necessitamos inverter a função $\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{f(s)} = F(y)$ e, como sabemos, isto pode ser feito se $\frac{dF}{dy} \neq 0$ em um intervalo. Como $\frac{dF}{dy} = \frac{1}{f(y)}$, basta que consideremos o intervalo onde $f(y) \neq 0$, para que $\frac{dF}{dy}$ seja bem definida.

Pela escolha adequada das constantes de integração, $G(x)$ pode ser considerada no campo de valores de $F(y)$ e, assim, podemos fazer a composição $F^{-1}[G(x)] = y(x)$, de onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF^{-1}}{dG}\,\frac{dG}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dF}{dy}}\,\frac{dG}{dx} = f(y)\,g(x)$$

Se (x_0, y_0) está no campo de definição da equação diferencial e y_0 está em um intervalo (c, d), onde $f(y) \neq 0$, então fica claro que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(y)\,g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem solução e é única.

Se agora $f(y_0) = 0$, então é óbvio que $y(x) = y_0$ é solução do problema. Para que haja unicidade, pelo Teorema de Existência e Unicidade (ver Secção 2.2), é necessário que $\frac{df}{dy}$ exista e seja contínua em uma vizinhança de y_0.

EXERCÍCIO

1. Obtenha as soluções para a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(y^2-1)}{xy}$$

Modelo 8 CRESCIMENTO ESPECÍFICO OU LEI DA ALOMETRIA

Nem todas as partes do corpo de um indivíduo têm em cada instante um desenvolvimento proporcional. A cabeça de uma criança cresce mais lentamente que seu corpo. O rápido crescimento dos pés de um adolescente, comparado com o resto de seu corpo, causa muitas vezes alguns transtornos. A *Alometria* estuda estes diferentes padrões de crescimento.

O *tamanho* de um órgão pode ser a medida do seu volume, peso, comprimento ou área lateral.

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ os tamanhos de órgãos ou partes do corpo distintos de um mesmo indivíduo, num instante t.

Dizer que uma parte cresce mais rapidamente que a outra é o mesmo que colocar

$$\frac{dx}{dt} > \frac{dy}{dt}$$

Uma maneira melhor para se poder relacionar diferentes crescimentos é através do crescimento específico ou relativo de cada órgão, definido por $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$. Assim, se o crescimento absoluto for exponencial, seu crescimento específico será constante (verifique!).

A Lei da Alometria estabelece que, no mesmo indivíduo, "os crescimentos específicos de seus órgãos são proporcionais". O modelo matemático é, pois,

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = k\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

com $x > 0$ e $y > 0$ e k constante (taxa de crescimento relativo).

Nesta equação x e y são variáveis equivalentes. Usando a Regra da Cadeia podemos escrever

$$\frac{dx}{dy} = k\frac{x}{y} \quad \text{(de maneira análoga vale } \frac{dy}{dx} = k'\frac{y}{x} \tag{2}$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\ln x = k \ln y + \ln c, \; c > 0 \tag{3}$$

ou

$$x = cy^k \; (x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0) \tag{4}$$

Na prática é comum usar a Equação (3); tomamos

$$X = \ln x \text{ e } Y = \ln y, \text{ e então, } X = kY + c$$

e, assim, num gráfico log-log os tamanhos se correlacionam na equação de uma reta!

O mesmo mecanismo da Lei da Alometria, isto é, a proporcionalidade entre crescimentos específicos, é usado no estudo do metabolismo, das diferenças raciais etc. Um exemplo de aplicação da Equação (4) foi dado por Bertalanffy (1973) relacionando o peso $W(t)$ e o comprimento $\ell(t)$ de peixes

$$W(t) = W_\infty \left(\frac{\ell(t)}{\ell_\infty}\right)^3$$

2.5 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Uma função $h(x, y)$ é dita homogênea de grau n se

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x, y)$$

se $h(x, y)$ é homogênea de grau zero, então

$$h(x, y) = h\left(1, \frac{y}{x}\right) = H\left(\frac{y}{x}\right)$$

Em analogia a esta definição, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = h(x, y)$$

é dita homogênea de grau n quando $h(x, y)$ for homogênea de grau n. As equações homogêneas mais freqüentes em modelos matemáticos são as de grau zero e, por isto mesmo, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = H\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

é simplesmente dita homogênea. Para solucionarmos equações deste tipo utilizamos o procedimento descrito a seguir.

Como o 2.º membro depende apenas da expressão $\frac{y}{x}$, o caminho natural é fazer a mudança de variável $z = \frac{y}{x}$ ou $y = zx$ e, portanto, $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. Substituindo esta expressão em (1), temos $x\frac{dz}{dx} + z = H(z)$, ou

$$\frac{dz}{dx} = \frac{H(z) - z}{x} \tag{2}$$

que é resolvida separando-se as variáveis.

EXEMPLO 1

Resolva a equação $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

Solução: $h(x, y)=\frac{x+y}{x-y}$ é uma função homogênea de grau zero, pois

$$h(\lambda x, \lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}=\frac{x+y}{x-y}=h(x, y)$$

Tomando a mudança de variáveis $y=zx$, a equação original se transforma em $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\ \frac{1+z^2}{1-z}$, que pode ser resolvida separando as variáveis, isto é,

$$\frac{1-z}{1+z^2}\,dz=\frac{1}{x}\,dx$$

Integrando, obtemos

$$\operatorname{arc\,tg} z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln x+c$$

Retornando à variável y, a solução da equação diferencial vem dada na forma implícita

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c$$

Observamos que a função $h(x, y)=\frac{x+y}{x-y}$ é descontínua sobre a reta $y=x$; assim não devemos esperar que existam soluções passando por pontos sobre esta reta. ■

EXEMPLO 2

Uma equação diferencial do tipo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y} \tag{3}$$

onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são constantes, com a_2 ou b_2 não nulas, é homogênea.

Se considerarmos a equação

$$\frac{dx}{dy}=\frac{a_2x+b_2y}{a_1x+b_1y} \tag{3'}$$

verificamos que (3) e (3') têm a mesma solução geral nos pontos em que forem simultaneamente definidas as funções

$$h(x, y)=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y} \quad \text{e} \quad \frac{1}{h(x, y)}=\frac{a_2x+b_2y}{a_1x+b_1y}$$

As Equações (3) e (3') são ditas *equivalentes* e o ponto (0, 0) é o único ponto de descontinuidade simultânea para ambas as equações; por isto é denominado *ponto singular isolado*. O estudo das soluções nas vizinhanças deste ponto singular é de grande interesse nos problemas de estabilidade ou de comportamento assintótico das soluções (ver Capitulo 5 – Estudo Qualitativo das Equações Diferenciais).

Para resolvermos a Equação (3) ou sua equivalente (3'), fazemos a mesma mudança de variável $y=zx$, obtendo uma equação em variáveis separadas:

$$\frac{(a_2+b_2z)dz}{a_1+(b_1-a_2)z-b_2z^2}=\frac{dx}{x} \tag{4}$$

A integração do 1.º membro de (4) é feita geralmente pelo método das frações parciais. ■

2.5.1 Equações Quase Homogêneas

Equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \tag{5}$$

onde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ são constantes, não são homogêneas, mas uma mudança de variáveis que leva o ponto singular $\left(\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1}\right)$ na origem $(0, 0)$, isto é,

$$\begin{cases} x = u + \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1} \\ y = v + \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2} \end{cases}$$

transforma a Equação (5) numa equação homogênea, desde que $b_1a_2 \neq b_2a_1$! Se $b_1a_2 = b_2a_1$, basta considerar a mudança de variáveis

$$a_1x + b_1y = z$$

EXEMPLO 3

Encontre a curva integral que passa pelo ponto $(1, -3)$ e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 2}{x + 1}$$

nos pontos em que $x \neq -1$.

Solução: As funções $h(x, y) = \frac{x + y + 2}{x + 1}$ e $\frac{dh}{dy} = \frac{1}{x + 1}$ são descontínuas no conjunto

$$A = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \in \mathbb{R}\},\ \text{como}\ (1, -3) \notin A,$$

o T.E.U. garante que existe uma única solução $y = \varphi(x)$ com $\varphi(1) = -3$.

A equação inicial é quase homogênea; portanto, se escolhermos convenientemente os parâmetros α e β na mudança de variáveis $x = u + \alpha$ e $y = v + \beta$ podemos torná-la homogênea.

Como $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}$, a equação inicial pode ser escrita por

$$\frac{du}{dv} = \frac{(v + \beta) + (u + \alpha) + 2}{v + \beta + 1} = \frac{v + u + (\beta + \alpha + 2)}{v + \beta + 1}$$

Escolhemos então α e β de modo que

$$\beta + \alpha + 2 = 0 \quad \text{e} \quad \beta + 1 = 0$$

Ou seja, $\beta = -1$ e $\alpha = -1$. Agora temos a equação homogênea

$$\frac{du}{dv} = \frac{v + u}{v} = 1 + \frac{u}{v}$$

Fazendo $z=\frac{u}{v}$, obtemos

$$\frac{dz}{dv}=\frac{h(z)-z}{v}=\frac{1+z-z}{v}=\frac{1}{v}$$

Integrando, chegamos a

$$z=\ln|v|+c \quad \text{ou} \quad \frac{u}{v}=\ln A|v|$$

onde $A=\ln c$, ($c>0$, c é a constante arbitrária de integração). Voltando às variáveis originais x e y, podemos escrever a solução geral da equação inicial:

$$y+1=(x+1)\ln A|x+1| \qquad (x\neq -1)$$

ou

$$y=\varphi(x)=(x+1)\ln(A|x+1|)-1$$

Usando a condição inicial $\varphi(1)=-3$, obtemos $A=\frac{1}{2e}$ e a solução geral procurada é

$$y=(x+1)\left[\ln\frac{|x+1|}{2}-1\right]-1 \qquad (x\neq -1)$$

EXEMPLO 4

Encontre a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y+2}{2x-4y+1}$$

Solução: Esta equação admite solução única para todos os pontos (x, y) que não satisfazem a equação da reta $2x-4y+1=0$ (por quê?)

A mudança de variáveis $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$ não produz nenhum resultado positivo, uma vez que o sistema

$$\begin{cases}\beta-2\alpha+2=0\\ 2\beta-4\alpha+1=0\end{cases}$$

é impossível.

Neste caso, a mudança de variável que dá bom resultado é $x-2y=z$, que nos leva a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{dz}{dx}\right)$$

E a equação inicial modificada pode ser escrita como

$$1-\frac{dz}{dx}=2\left[\frac{z+2}{2z+1}\right]$$

ou

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-3}{2z+1}$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$z^2+z=-3x+c$$

Retornando à variável y, temos como solução geral a família de parábolas

$$4y^2-4xy+x^2+4x-2y=c$$

EXEMPLO 5

Estude a equação homogênea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y}$$

e sua equivalente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{y}$$

Solução: Os pontos singulares da equação, isto é, onde $\frac{y}{x-y}$ não é contínua, satisfazem a equação da reta $y = x$. Na equação equivalente os pontos singulares se encontram na reta $y = 0$ (eixo-x). A intersecção das retas singulares nos dá o *ponto singular isolado* $(0, 0)$ (ver Figura 2.20).

Tomando $y = zx$ na inicial, obtemos

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{1-z},$$

ou

$$z\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{1-z},$$

separando as variáveis, temos

$$\frac{1-z}{z^2}dz = \frac{dx}{x},$$

integrando,

$$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|x| + \ln A,$$

simplificando,

$$\frac{1}{z} = -\ln|Axz| = \ln\frac{1}{Axz},$$

ou

$$ze^{1/z} = \frac{1}{Ax}.$$

Retornando à variável y, temos

$$y = \frac{1}{A}e^{y/x}$$

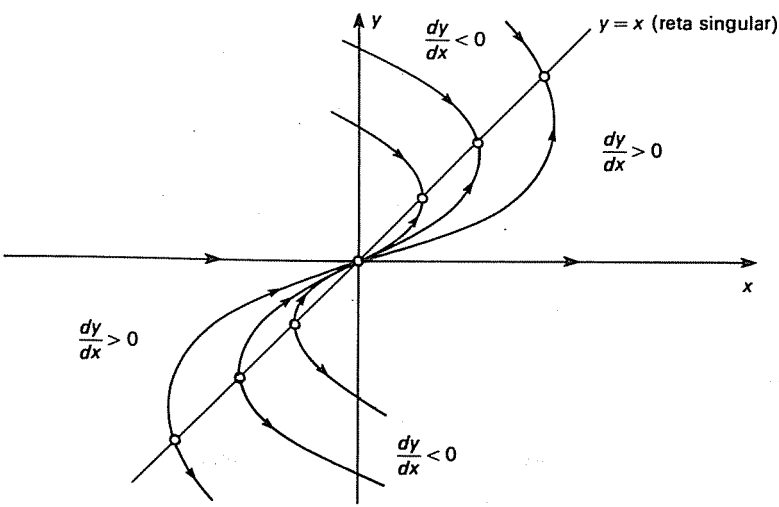


Figura 2.20

Observações:

a. $\frac{dy}{dx} > 0$ (y é crescente) se $\frac{y}{x-y} > 0$, isto é, $y>0$ e $y<x$ ou $y<0$ e $y>x$.

b. $\frac{dy}{dx} < 0$ se $y>0$ e $y>x$, ou se $y<0$ e $y<x$.

c. $\frac{dy}{dx} \to \infty$ quando $y-x \to 0$, isto é, quando $y \to x$.

d. As semi-retas $y=0$ e $x<0$, $y=0$ e $x>0$ são soluções da equação inicial.

Analogamente, para resolver a equação equivalente, $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{y}$, fazemos $x=zy$ e obtemos

$$y\frac{dz}{dy} + z = z - 1 \quad \text{ou} \quad dz = -\frac{1}{y}dy$$

Logo, $z = -\ln|y| + \ln A$ e, portanto, $\frac{x}{y} = \ln\left[\frac{A}{y}\right]$, donde,

$$\boxed{x = y \ln\left|\frac{A}{y}\right|}$$

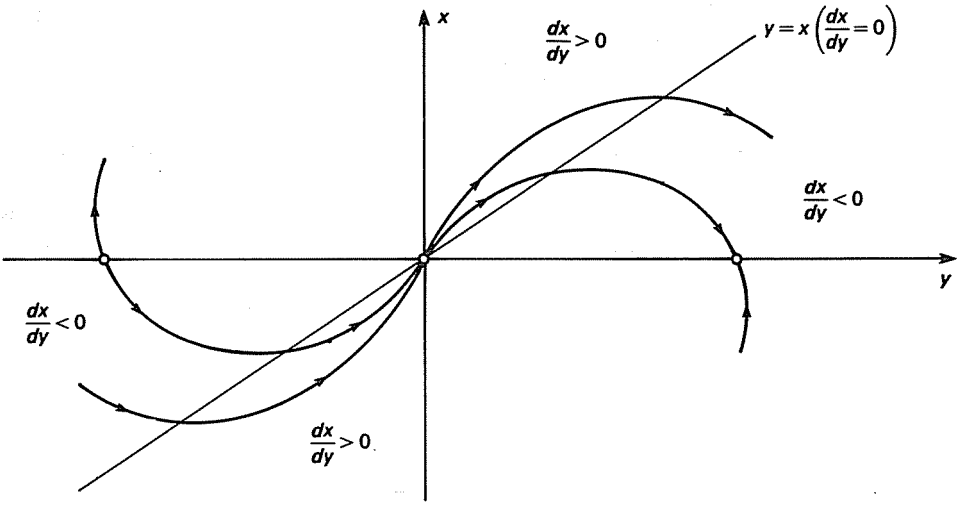


Figura 2.21

Observações:

a. $\frac{dx}{dy} > 0$ se $y>0$ e $x>y$, ou se $y<0$ e $x<y$.

b. $\frac{dx}{dy} < 0$ se $y>0$ e $x<y$, ou se $y<0$ e $x>y$.

c. Os pontos críticos (máximos, mínimos) relativos, de cada curva integral, são obtidos na intersecção destas curvas com a reta $x=y$, pois neste caso $\frac{dx}{dy} = 0$ e $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{y}$. Se $y>0$ temos os pontos de máximo e se $y<0$, pontos de mínimo.

d. $x \to 0$ quando $y \to 0$ ou $y \to \infty$.

EXERCÍCIOS

1. Estude a equação $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y-x}$ e sua equivalente $\frac{dx}{dy}=\frac{y-x}{x}$

2. Estude a equação $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y+x}$.

2.6 EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

O tipo de equação que consideraremos agora é simples na sua forma e na sua teoria, mas apresenta várias idéias que serão generalizadas mais tarde, o que torna o seu estudo muito importante. A equação

$$\frac{dy}{dx}+h(x)\,y=g(x) \tag{1}$$

é chamada linear porque a operação efetuada sobre $y(x)$

$$\left[\frac{d}{dx}+h(x)\right]y(x) \tag{2}$$

é uma operação linear, isto é,

$$\left[\frac{d}{dx}+h(x)\right](\alpha y_1+y_2)=\alpha\left[\frac{d}{dx}+h(x)\right]y_1+\left[\frac{d}{dx}+h(x)\right]y_2$$

Observe agora que a expressão $\frac{dy}{dx}+h(x)y$ é "quase" a derivação de um produto. Se assim fosse, a solução da equação estaria reduzida a uma integração.

Suponha que exista uma função $\lambda(x)$ que multiplicada pela expressão (2) nos dê:

$$\lambda(x)\frac{dy}{dx}+\lambda(x)\,h(x)y=\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\,y(x)\right)$$

Neste caso deveríamos ter

$$\frac{d\lambda}{dx}=\lambda h(x)$$

de onde tiramos que $\lambda(x)=e^{\int^x h(z)dz}$ e $\lambda(x)$ é chamado *fator de integração*. Portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int^x h(z)dz}\right)=e^{\int^x h(z)dz}\,g(x)$$

de onde

$$ye^{\int^x h(z)dz}=\int^x e^{\int^s h(z)dz}\,g(s)ds+c \qquad \text{e}$$

$$y(x)=e^{-\int^x h(z)dz}\int^x e^{\int^s h(z)dz}\,g(s)ds+ce^{-\int^x h(z)dz}$$

que é a solução geral da equação.

Não é difícil verificar que todas as operações efetuadas são válidas se $h(x)$ e $g(x)$ forem contínuas, e o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = h(x)y + g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

tem solução *única* dada por

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} h(z)dz} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} h(z)dz} g(s)ds + y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} h(z)dz} \tag{4}$$

EXEMPLO 1

Resolver a equação linear

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1}y = (x+1)^2 \qquad (x > -1)$$

Solução: Multiplicando ambos os membros da equação por $e^{-\int^{x} \frac{ds}{1+s}} = e^{-\ln(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$, vem

$$\frac{1}{x+1}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{(x+1)^2}y = x+1$$

o mesmo que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}y\right) = x+1$$

e portanto

$$\frac{1}{x+1}y = \frac{x^2}{2} + x + c$$

donde

$$y(x) = (x+1)\left(\frac{x^2}{2} + x + c\right)$$

■

Observações:

a. Quando $g(x) = 0$ a Equação (1) é chamada linear homogênea. (Cuidado com o termo "homogêneo" que aparece com vários significados!)

b. A solução geral da equação $\left[\dfrac{d}{dx} + h(x)\right] y = g(x)$ é dada por uma solução geral da equação homogênea. Este fato se dá devido à linearidade da operação L:

$$L = \frac{d}{dx} + h(x)$$

A solução geral de $Ly = g$ é dada por

$$y = y_p + y_h$$

onde $Ly_p = g$ e $Ly_h = 0$.

Isto significa que para obtermos a solução geral de equações não homogêneas $Ly = g$, sabendo a solução geral da homogênea $Ly = 0$, basta obtermos uma solução particular de $Ly = g$.

c. Se y_1 e y_2 são soluções de $Ly_1 = g_1$, $Ly_2 = g_2$, então

$$\lambda y_1 + y_2 \text{ é solução de } Ly = \lambda g_1 + g_2$$

Este fato é chamado propriedade de superposição das soluções e significa que se soubermos resolver $Ly = g_k$ para uma base $\{g_k\}$ de um espaço vetorial de funções, então saberemos resolver $Ly = g_k$ para qualquer g neste espaço vetorial.

Este fato generalizado para somas infinitas (séries) tem importância fundamental na teoria das equações lineares.

d. Se $y(x, \alpha)$ for uma família de soluções dependentes do parâmetro α, então

$$Ly = g(x; \alpha)$$

e, por superposição contínua, $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y(x, \alpha)\rho(\alpha)d\alpha$ será solução da equação $Ly = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(x, \alpha)\rho(\alpha)d\alpha$ sob certas condições bem gerais de continuidade das funções $g(x, \alpha)$ e $\rho(\alpha)$ (ver Capítulo 3).

EXERCÍCIOS

Nos Exercícios de 1 a 4, obtenha as soluções gerais das equações:

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} - y = \cos 2x$

3. $\dfrac{dy}{dx} + xy = 1$

4. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} - xy = 1$

5. Mostre que a solução de $\begin{cases} Ly = g(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, onde $L = \left[\dfrac{d}{dx} + h(x)\right]$, pode ser escrita como $y = y_1 + y_2$, sendo

$$\begin{cases} Ly_1 = g(x) \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Ly_2 = 0 \\ y_2(0) = y_0 \end{cases}$$

6. Obtenha a solução de $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + ay = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 y dx = c \end{cases}$

7. Mostre que a solução geral de $\dfrac{dy}{dx} + ay = P(x)$, sendo $P(x)$ um polinômio de grau n em x, é um polinômio de grau n, se $a \neq 0$. Analise o caso $a = 0$.

8. Considere os problemas $\begin{cases} Ly_1 = g_1(x) \\ y_1(0) = y_{01} \end{cases}$ $\begin{cases} Ly_2 = g_2 \\ y_2(0) = y_{02} \end{cases}$ para $L = \left|\dfrac{d}{dx} + h(x)\right|$.

a. se $y_{01} > y_{02}$ e $g_1 = g_2$, mostre que $y_1(x) > y_2(x)$ para $x \geqslant 0$.
b. se $y_{01} = y_{02}$ e $g_1 > g_2$, mostre que $y_1(x) > y_2(x)$ se $x > 0$.
c. se $y_{01} > y_{02}$ e $g_1 > g_2$, mostre que $y_1(x) > y_2(x)$ se $x \geqslant 0$.

Faça um esboço gráfico de cada caso.

9. Mostre que se $\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} \leqslant k\varphi(x) & k > 0 \\ \varphi(0) = 0 & \text{então } \varphi(x) \equiv 0 \end{cases}$

Modelo 9 DESPOLUIÇÃO DE LAGOAS

As nações em desenvolvimento, por falta de recursos suficientes ou mesmo por negligência na fiscalização do governo, estão sujeitas à constante poluição do ar e da água.

Nos restringiremos neste modelo às formas de despoluição de lagos e lagoas, uma vez que no caso dos rios, quando a poluição ainda não causou danos extremos, eles próprios podem se auto-reparar, bastando para tanto que se tenha uma diminuição no lançamento de poluentes em suas águas. Já no caso de lagoas (ou lagos) o processo de despoluição é mais lento, podendo ser efetivado caso ainda não estejam "mortas". Tal mecanismo de limpeza consiste em substituir sua água gradualmente.

Nos modelos propostos, encaramos o fluxo da água na lagoa como um problema de diluição de substâncias, não levando em consideração a sedimentação dos poluentes, sua ação biológica etc. Faremos agora as "hipóteses" simplificadoras:

1. Existe um fluxo de água que entra na lagoa, proveniente de um riacho ou "minas", e uma vazão para outro riacho. As vazões de entrada e saída são iguais e constantes, valendo $r(\ell/s)$ (r litros por segundo).

2. Quando a água entra na lagoa, se mistura rapidamente e de maneira homogênea, havendo uma distribuição uniforme dos poluentes.

3. O volume da lagoa é constante (a quantidade de água de chuva se equilibra com a que se evapora) e igual a V litros.

4. Os poluentes são retirados da lagoa somente através do fluxo de saída.

5. A poluição provém de uma indústria instalada na margem da lagoa ou do riacho que a alimenta.

Se a quantidade de poluentes existente na lagoa é prejudicial ao desenvolvimento da vida aquática ou mesmo à recreação, quais os mecanismos existentes para se efetuar sua limpeza?

Consideremos primeiramente o caso em que a indústria cessa totalmente a poluição da lagoa, colocando filtros especiais existentes no mercado e que por lei federal* deveriam ser usados.

Seja P_0 a quantidade de detritos químicos existentes na lagoa no instante em que cessou a poluição, $t = 0$; $P = P(t)$ é a quantidade de poluente dissolvida na água no tempo t. Como o volume da lagoa é constante e as vazões dos riachos também, então é razoável supor que a variação da quantidade de poluentes por unidade de tempo seja proporcional à quantidade total existente na lagoa em cada instante, de modo que

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{rP}{V} \tag{1}$$

* Lei 6.938 da Política Nacional do Meio Ambiente: é uma lei federal de 31/8/81 que foi gerada na UNICAMP.

onde $r > 0$ é a vazão de cada rio.

Com $P_0 = P(0)$ a solução de (1), como já vimos, é

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{rt}{V}}$$

Neste caso, a quantidade de poluentes diminui rapidamente no princípio e depois lentamente; de qualquer forma $P \to 0$ quando t cresce. Assim, o problema pode ser solucionado e um aumento na vazão dos dois riachos acelera a despoluição.

Se, por outro lado, a indústria continuar poluindo, apesar dos protestos populares, o modelo matemático é modificado. Consideremos $Q = Q(t)$ a quantidade total de poluentes acumulados na lagoa pela indústria desde o instante $t = 0$ até o tempo t. Então, $P_i(t) = \dfrac{dQ}{dt}$ é sua variação por unidade de tempo.

A Equação (1) anterior deve ser modificada para

$$\frac{dP}{dt} = P_i(t) - \frac{r}{V} P(t), \text{ com } r > 0 \text{ e } P(0) = P_0 \tag{2}$$

A Equação (2) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, cuja solução é dada por

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{rt}{V}} + e^{-\frac{rt}{V}} \int_0^t e^{-\frac{rt}{V}} P_i(s)\,ds$$

Observação:

A primeira parcela de $P(t)$, isto é, $P_0 e^{-\frac{rt}{V}}$ é independente do termo proveniente da nova poluição $P_i(t)$ e para t suficientemente grande seu valor é desprezível, o que equivale a dizer que a poluição inicial não afeta sensivelmente a quantidade total de poluentes.

Vamos analisar agora alguns casos particulares, dependendo da maneira como os poluentes são lançados nas águas da lagoa.

a. Se a indústria deposita continuamente uma quantidade constante de poluentes, então $P_i(t) = P_{i_0}$ (constante). A Equação (2) é dada por

$$\frac{dP}{dt} = P_{i_0} - \frac{rP}{V}(t) \tag{2.1}$$

que pode ser reescrita por $\dfrac{dP}{dt} + \dfrac{rP}{V} = P_{i_0}$ (linear com coeficientes constantes). Sua solução será

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{r}{V}t} + \frac{VP_{i_0}}{r}(1 - e^{-\frac{r}{V}t}) = \left(P_0 - \frac{VP_{i_0}}{r}\right) e^{-\frac{r}{V}t} + \frac{V}{r} P_{i_0}$$

e quando t cresce, $P(t)$ tende a se estabilizar no ponto de equilíbrio $\frac{VP_{i_0}}{r}$.

Se $P_0 = \frac{VP_{i_0}}{r}$, a quantidade de poluentes no lago permanece inalterada.

Se $P_0 < \frac{VP_{i_0}}{r}$, a quantidade $P(t)$ cresce até o valor limite $\frac{VP_{i_0}}{r}$.

Se $P_0 > \frac{VP_{i_0}}{r}$, a quantidade $P(t)$ diminui com o tempo, ainda tendendo a $\frac{VP_{i_0}}{r}$; neste caso se a vida aquática for compatível com o nível $\frac{VP_{i_0}}{r}$, ela poderá ser restaurada depois de algum tempo, conforme está ilustrado na Figura 2.22.

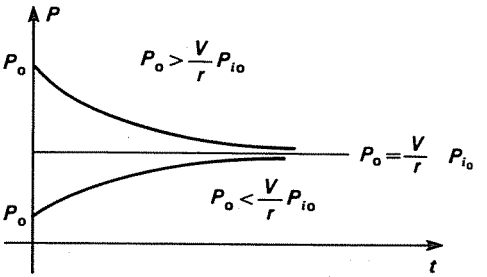


Figura 2.22

Se utilizarmos a concentração de poluentes, em vez da sua quantidade, isto é, $C(t) = \frac{P(t)}{V}$, a solução da Equação (2.1) vem dada por

$$C(t) = (C_0 - C_{i_0})e^{-\frac{r}{V}t} + C_{i_0}.$$

É uma forma mais prática e mais utilizada.

b. Suponhamos agora que a indústria continue poluindo a lagoa, mas numa forma decrescente, isto é, lançando cada vez menos poluentes por unidade de tempo. Por exemplo, $P_i(t) = P_{i_0}\, e^{-bt}$ $(b > 0)$. Neste caso,

$$\frac{dP}{dt} = P_{i_0}\, e^{-bt} - \frac{r}{V} P(t) \qquad (2.2)$$

A solução desta equação linear é dada por

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{P_{i_0}}{\frac{r}{V} - b} \right) e^{-\frac{r}{V}t} + \frac{P_{i_0}}{\frac{r}{V} - b} e^{-bt} \qquad \text{se } \frac{r}{V} \neq b$$

ou

$$P(t) = P_0\, e^{-\frac{r}{V}t} + P_{i_0}\, e^{-\frac{r}{V}t} = (P_0 + P_{i_0})\, e^{-\frac{r}{V}t}, \qquad \text{se } \frac{r}{V} = b$$

Em ambos os casos, $P(t)$ tende a zero quando t cresce e, portanto, a lagoa será despoluída depois de algum tempo (ver Figura 2.23).

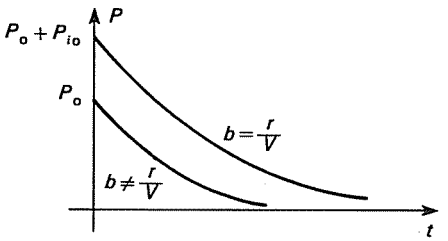


Figura 2.23

c. Se a indústria tem um sistema periódico de descargas, intensificando-as em certas ocasiões e reduzindo-as em outras, uma tentativa para $P_i(t)$ pode ser

$$P_i(t) = P_{i0}\,(1 + \operatorname{sen} wt), \qquad w > 0$$

Neste caso, colocando $\lambda = \dfrac{r}{V}$, obtemos

$$\frac{dP}{dt} = P_{i0}\,(1 + \operatorname{sen} wt) - \lambda P(t) \tag{2.3}$$

cuja solução é dada por

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{P_{i0}}{\lambda} + \frac{P_{i0}\,w}{\lambda^2 + w^2}\right) e^{-\lambda t} + \frac{P_{i0}}{\sqrt{\lambda^2 + w^2}} \operatorname{sen}(wt - \theta) + \frac{P_{i0}}{\lambda}$$

onde θ é tal que $\cos\theta = \dfrac{r}{\sqrt{\lambda^2 + w^2}}$.

Assim, quando t cresce $(t \to +\infty)$, $P(t)$ é governado pela função

$$\frac{P_{i0}}{\lambda} + \frac{P_{i0}}{\sqrt{\lambda^2 + w^2}} \operatorname{sen}(wt - \theta)$$

que oscila em torno do valor $\dfrac{P_{i0}}{\lambda}$ com a mesma freqüência de $P_i(t)$. O valor mínimo desta oscilação ocorre quando $\operatorname{sen}(wt - \theta) = -1$, e neste instante ainda $P(t) > 0$ pois $\dfrac{P_i}{\lambda} > \dfrac{P_{i0}}{\sqrt{\lambda^2 + w^2}}$.

O valor máximo assumido por $P(t)$ não supera $\dfrac{2\,P_{i0}}{\lambda} = \dfrac{2\,P_{i0}V}{r}$ (ver Figura 2.24). Com estas informações, o valor de P_{i0} pode ser ajustado para que ocorra uma despoluição!

Em relação à despoluição do ar, o processo é análogo ao dos lagos. Pode ocorrer por mecanismos naturais: época de ventos e chuva, ou mecanismos programados: proibição de construção de indústrias poluidoras em regiões fechadas (tipo Cubatão), colocação de filtros especiais, programação de descargas etc.

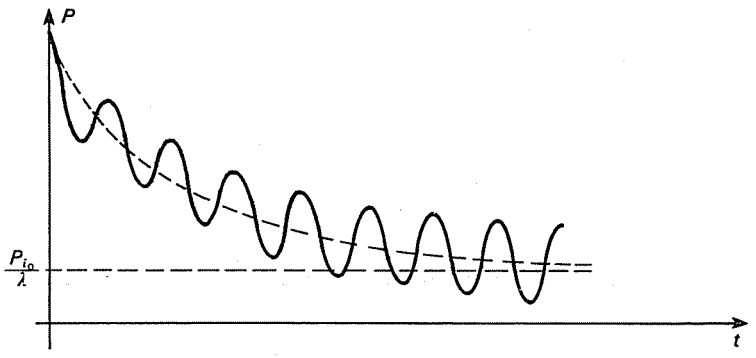


Figura 2.24

"A ecologia tornou-se um movimento político de pessoas que pretendem que o trabalho e a produção transcorram em consonância com o equilíbrio da Natureza e as necessidades básicas do cidadão. Por isso a ecologia e a democracia das bases são temas associados".*

EXERCÍCIOS

1. Resolva as equações diferenciais (2.1), (2.2) e (2.3).
2. Suponha que uma fábrica poluidora de um lago pare de funcionar quando a quantidade de poluentes depositada for P_0; em quanto tempo $P(t)$ será a metade de P_0?
3. Um lago de volume $3 \cdot 10^6\ m^3$ é abastecido por um riacho cuja vazão é de $50\ m^3/h$. Um curtume é instalado na beira deste riacho poluindo-o na ordem de $25\ kg/m^3$. Se a quantidade máxima de poluentes suportável no lago é do nível de $15\ kg/m^3$, pergunta-se:

   a. Até quando o curtume pode funcionar sem causar danos para a vida aquática?

   b. Qual a concentração de poluentes no lago depois de 1 ano ($\cong 8.760$ horas)?

   Sugestão: Use $P_{i_0} = rC_{0_i} = 50\ m^3/h \cdot 25\ kg/m^3$ e

   $$\frac{dP}{dt} = P_{i_0} - \frac{P(t)}{V} \cdot r \quad \text{(tome } r = 50\ m^3/h \text{ como vazão do lago).}$$

4. A descarga de poluentes em um lago é feita segundo uma função $P_i(t)$ descontinua, dada no gráfico abaixo (ver Figura 2.25):

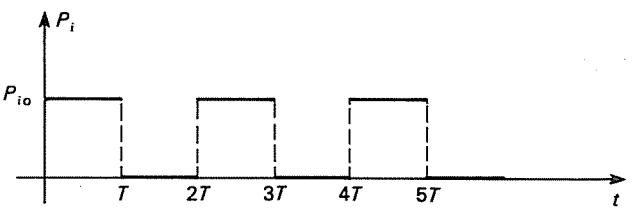


Figura 2.25

   a. Analise o sistema de descarga desta fábrica.

   b. Monte a equação que traduza a quantidade de poluentes em cada instante. (Você pode resolvê-la?)

---

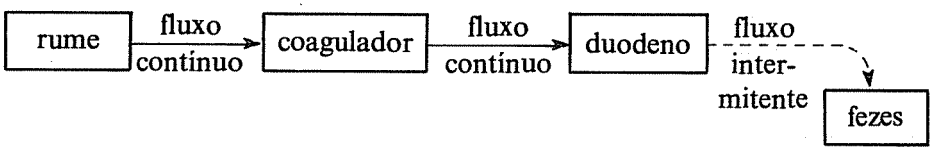
* Deputado Willi Hoss, do Partido Verde RFA. In *Folha de São Paulo*, 4/6/84.

Modelo 10 DIGESTÃO DE RUMINANTES

Os animais ruminantes, tais como carneiro, bode, veado, boi etc., possuem um mecanismo complicado para realizar sua disgestão. Simplificando, podemos dizer que eles engolem os alimentos sem mastigar, indo para a primeira cavidade do estômago, chamada rume. Após serem ruminados, estes alimentos seguem para o abomaso (coagulador), a quarta cavidade do estômago, onde são digeridos. Seguem posteriormente para o duodeno, o primeiro segmento do intestino. Em seguida, na forma de fezes são eliminados de maneira intermitente.

Sabemos que o fluxo do rume para o abomaso e deste para o duodeno é aproximadamente contínuo.

Num esquema simplificado temos



O modelo matemático, proposto por Blaxter, Graham e Wainman (1956), é o seguinte:

Seja

$x = x(t)$ a quantidade de alimento no rume, no instante t
$y = y(t)$ a quantidade no coagulador, no instante t
$z = z(t)$ a quantidade que chegou no duodeno até o instante t

Se a quantidade de alimento engolida pelo animal no instante $t = 0$ é q (este alimento vai diretamente para o rume), então $x(0) = q$, e $y(0) = z(0) = 0$.

Também, em qualquer instante t, temos $x(t) + y(t) + z(t) = q$ (constante).

As hipóteses formuladas para o fluxo do alimento consistem de duas propostas arbitrárias e análogas:

Primeira, o alimento sai do rume numa razão proporcional à quantidade de alimento que está nesta cavidade, isto é, a taxa de decrescimento $\frac{dx}{dt}$ é proporcional a x.

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x \qquad (k_1 > 0) \tag{1}$$

Segunda, o alimento sai do coagulador numa taxa proporcional à quantidade que aí está. Assim, é bastante razoável supor que

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y \quad (k_1 > 0 \text{ e } k_2 > 0) \tag{2}$$

pois no mesmo instante entra $k_1 x$ e sai $k_2 y$.

Resolvendo primeiramente a Equação (1), temos $x(t) = k\,e^{-k_1 t}$ e como $x(0) = q$, vem $x(t) = q\,e^{-k_1 t}$.

Substituindo este valor na Equação (2), temos

$$\frac{dy}{dt} = -k_2 y + k_1 q\,e^{-k_1 t} \text{ (equação linear não homogênea)} \tag{3}$$

cuja solução já conhecemos. Usaremos agora, para exemplificar, um outro método de resolução das equações lineares não homogêneas: *método da variação de parâmetros*.

Supomos que $y(t) = u(t) \cdot v(t)$, onde uma destas funções pode ser arbitrária, enquanto a outra será determinada da Equação (3).

Então,

$$\frac{dy}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$$

Comparando com a Equação (3), procuramos escolher u e v de modo que

$$u\frac{dv}{dt} = k_1 q\,e^{-k_1 t} \tag{4}$$

e

$$v\frac{du}{dt} = -k_2 y = -k_2 uv \Rightarrow \frac{du}{dt} = -k_2 u \tag{5}$$

logo, c_1 é uma constante arbitrária.

$$u(t) = c_1 e^{-k_2 t}$$

Substituindo isto na Equação (4), resulta

$$c_1 e^{-k_2 t}\frac{dv}{dt} = k_1 q\,e^{-k_1 t}$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k_1 q}{c_1} e^{(k_2 - k_1)t},$$

Se $k_1 \neq k_2$, integrando temos

$$v(t) = \frac{k_1 q}{c_1(k_2 - k_1)} e^{(k_2 - k_1)t} + c_2$$

onde c_2 é a constante de integração.

Então, $y(t) = u(t) \cdot v(t) = \dfrac{k_1 q}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + c_1 c_2 e^{-k_2 t}$.

Usando a condição inicial $y(0) = 0$, temos $c_1 c_2 = -\dfrac{k_1 q}{k_2 - k_1}$. Assim,

$$y(t) = \frac{k_1 q}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \quad (k_1 \neq k_2) \tag{6}$$

Se $k_1 = k_2$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k_1 q}{c_1} \Rightarrow v = \frac{k_1 q}{c_1} t + c_2$$

e portanto

$$y(t) = u \cdot v = k_1 q t e^{-k_1 t} + c_2 c_1 e^{-k_1 t}$$

com $y(0) = 0$ temos

$$y(t) = k_1 q t e^{-k_1 t} \quad (k_1 = k_2) \tag{7}$$

Para calcular a quantidade de alimento que chega no duodeno até o instante t, usamos

$$z(t) = q - [x(t) + y(t)] \tag{8}$$

Se $k_1 \neq k_2$,

$$z(t) = q - q e^{-k_1 t} - \frac{q k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

isto é,

$$z(t) = q - \frac{q}{k_2 - k_1} (k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}) \tag{9}$$

Se $k_1 = k_2$,

$$k_1 = k_2, \; z(t) = q - q e^{-k_1 t} - q k_1 t \, e^{-k_1 t}$$

ou seja

$$z(t) = q \, [1 - e^{-k_1 t} \, (1 + k_1 t)]. \tag{10}$$

Quando $t \to \infty$, $z \to q$, isto é, quando t for suficientemente grande, todo alimento chega no intestino (ver Figura 2.26).

Aparentemente, este modelo é apenas curioso; no entanto, sua importância consiste em se poder estabelecer o valor nutricional de vários alimentos selecionados, assim como sua granulação adequada para serem melhor aproveitados na digestão.

O método consiste simplesmente em se medir a excreção fecal, dando-a como função do tempo depois que o animal foi alimentado com uma quantidade constante q.

Sabemos que $z(t)$ é o total de alimentos que chegou no duodeno até o instante t, incluindo o alimento que já foi excretado. Desde que a excreção não é um processo contínuo, não vamos aqui representar tal fenômeno por uma equação diferencial.

Notamos que quando o alimento chega no intestino ele é excretado depois de um certo tempo. Suponhamos que em média cada excreção se dê num intervalo de tempo igual a T, ou seja, a quantidade de fezes produzida no instante $t > T$ é, em média, a quantidade de alimentos que che-

gou no intestino até o tempo $t-T$. Se indicamos por $f(t)$ a quantidade de fezes produzida até o instante t, temos

$$f(t) \cong z(t-T) \qquad \text{para todo } t > T$$

Se $k_1 \neq k_2$,

$$f(t) \cong q - \frac{q}{k_2 - k_1}\left[k_2\, e^{-k_1(t-T)} - k_1\, e^{-k_2(t-T)}\right]$$

para todo $t \geqslant T$.

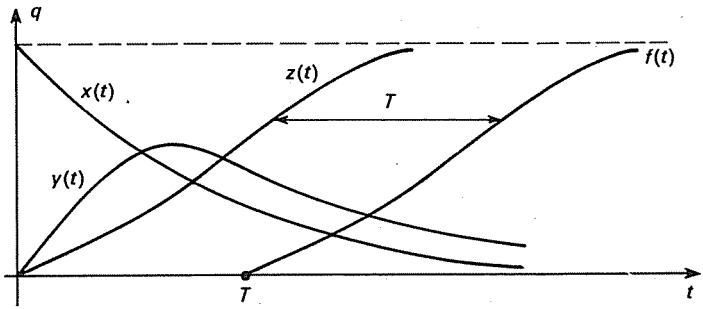


Figura 2.26 Digestão de um ruminante

Observação:

A permanência de um alimento no sistema digestivo é um dos fatores responsáveis pelo melhor aproveitamento deste alimento. Assim, uma simples análise gráfica da excreção fecal via modelo matemático pode fornecer um método eficiente na preparação de alimentos*.

EXEMPLO 2 Problema dos Quatro Besouros

A curiosidade do problema que vamos propor não está tanto na situação analisada quanto nas suas múltiplas maneiras de resolvê-lo. A solução fornecida pela Mecânica Clássica é muito elegante mas, usando equações diferenciais e variáveis complexas a solução é obtida de maneira mais prática.

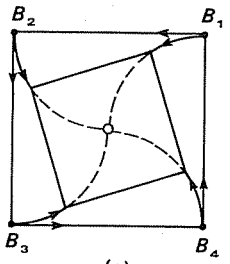
Quatro besouros estão colocados nos vértices de um mesmo quadrado e caminham para o centro, obedecendo às seguintes condições:

a. Em cada instante as velocidades dos quatro besouros são iguais em módulo.
b. Cada besouro caminha olhando para o seguinte em cada instante do trajeto (ver Figura 2.27a).

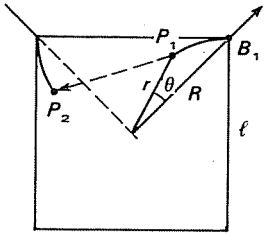
Demonstre que

1. O poligono formado em cada instante, tendo um besouro em cada vértice, é um quadrado.
2. A curva que cada besouro descreve é uma espiral.
3. A distância total que cada besouro percorre é igual ao lado do quadrado inicial.

* Veja The Digestive Process of Sheep, de Horelick e Koot. In *EDC/Projet Calc.* unit 69, ou então Some Observations on the Digestibility of Food by Sheep, and on Related Problems, de Blaxter, Graham e Wainman. In *Brit. J. Nutr. 10*, 69-91, 1956.



(a)



(b)

Figura 2.27

Solução: Na formulação matemática do problema consideraremos cada besouro como um ponto do plano de coordenadas e usaremos coordenadas polares tomando o pólo no centro do quadrado inicial e o eixo principal na linha que passa pelo pólo e pelo vértice B_1 (onde está situado o primeiro besouro).

As condições, sendo iguais para os quatro besouros, permitem que se estude somente um deles (as trajetórias dos outros são análogas).

Seja $P_1(t) = (r(t), \theta(t))$ a posição do besouro B_1 no instante $t \geqslant 0$.

O lado do quadrado é $\ell = \sqrt{2}\,R$ (ver Figura 2.27b).

Como as trajetórias dos quatro besouros são similares, suas posições relativas não mudam com o tempo; logo, formam sempre um quadrado.

A posição de B_1, $P_1(t) = (r, \theta)$ pode ser dada no plano complexo por $r(t)e^{i\theta(t)}$. Como os quatro estão num quadrado centrado no pólo, o besouro B_2 está deslocado 90° em relação a B_1 e sua posição será $P_2(t)$: $ir(t)e^{i\theta(t)}$. A velocidade de B_1 é a derivada da posição em relação ao tempo, isto é,

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\, e^{i\theta(t)} + ir(t)\, e^{i\theta(t)}\, \frac{d\theta}{dt}$$

A condição que B_1 "olhe" B_2 é expressa pelo fato que a velocidade de B_1 é um múltiplo do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$, ou seja, existe um número real $k > 0$ tal que

$$k\left(\frac{dr}{dt}\, e^{i\theta} + ir\, e^{i\theta}\, \frac{d\theta}{dt}\right) = ir\, e^{i\theta} - re^{i\theta}$$

Cancelando $e^{i\theta}$, obtemos as equações diferenciais a coeficientes reais

$$\begin{cases} k\,\dfrac{dr}{dt} = -r & \text{(parte real da equação)} \\[2ex] kr\,\dfrac{d\theta}{dt} = r & \text{(parte imaginária da equação)} \end{cases}$$

Somando-as membro a membro, vem

$$k\left(\frac{dr}{dt} + r\,\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

e como $k \neq 0$, temos

$$\frac{dr}{dt} = -r\,\frac{d\theta}{dt}$$

e integrando em t, obtemos

$$\theta(t) = -\ln r(t) + c$$

Usando a condição inicial $\theta(0) = 0$, $r(0) = R$ que é a posição de B_1 quando $t = 0$, temos $c = \ln R$; logo, $r(t) = Re^{-\theta(t)}$, que é efetivamente a equação de uma espiral convergindo para $r = 0$ (centro do quadrado) quando t cresce.

Para calcular a distância total percorrida por um besouro, basta tomar $z = \displaystyle\int_0^{t^*} |\,\vec{v}\,|\, dt$, onde t^* é o tempo gasto para chegar no centro.

Temos que

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{rd\theta}{dt}\right)^2} = -\sqrt{2}\left|\frac{dr}{dt}\right| \quad \left(\text{pois } r\frac{d\theta}{dt} = -\frac{dr}{dt} \text{ e } r(t) \text{ é decrescente}\right)$$

Assim,

$$z = \int_0^{t^*} |\vec{v}|\, dt = \int_R^0 -\sqrt{2}\, dr \quad \text{(para } t=0,\ r=R \text{ e para } t=t^*,\ r=0)$$

ou seja, $z = \sqrt{2}\,R = \ell$ que é o lado do quadrado inicial.

Observação:

A velocidade não é importante, isto é, a maneira como $|\vec{v}|$ varia não influi no problema. ■

EXERCÍCIOS

Os exercícios 1, 2 e 3 são relativos ao Modelo 10.

1. Encontre os pontos de máximo de $y(t)$ e de inflexão de $z(t)$.
2. Se $k_1 = 2$ e $k_1 = 1$, calcule depois de quanto tempo 90% de q foi excretado. Neste tempo, quanto alimento existe no rume, no abomaso e no intestino?
3. Resolva a equação diferencial da digestão dos ruminantes

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 q\, e^{-k_1 t}$$

pelo método do fator integrante, quando $k_1 = k_2$ e $k_1 \neq k_2$. Compare o método de resolução utilizado no Modelo 10 – Secção 2.6 (variação dos parâmetros) e do fator integrante, e escolha o mais interessante e/ou conveniente.

4. Resolva as equações lineares:

   a. $\frac{dy}{dx} - 2y = 1$ *b.* $\frac{dy}{dx} + y = \operatorname{sen} x$ *c.* $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^4$

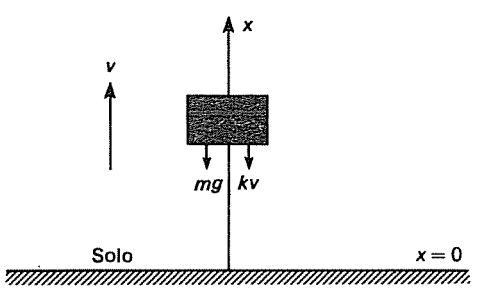
5. Resolva os problemas de valores iniciais:

   a. $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ com $y(\pi/2) = 1$

   b. $\frac{dy}{dx} + xy = x$ com $y(1) = 0$

6. Um corpo de massa m é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial v_0. Se a resistência do ar é proporcional à velocidade, determine:

   a. A equação do movimento num sistema de coordenadas sugerido pela figura abaixo.
   b. Uma expressão para a velocidade do corpo no instante t.
   c. O instante em que o corpo atinge a altura máxima.



7. Uma reunião realizada num ambiente sem muito arejamento pode causar perigo à saúde dos participantes quando, com a tensão natural provocada pela discussão acalorada, os fumantes injetam no ambiente fumaça contendo 4% de CO, à taxa de 0,0005 m^3/min. A mistura bem distribuída sai da sala na mesma taxa. Sabendo-se que uma exposição prolongada à concentração de 0,012% de CO causa dano à saúde das pessoas:

   a. Determine o instante em que a reunião deveria terminar.
   b. Qual a concentração de CO depois de 2 horas?

2.7 EQUAÇÕES ESPECIAIS: BERNOULLI, CLAIRAUT E RICCATI

Resolvemos até o momento um número bastante reduzido de tipos de equações diferenciais de primeira ordem, e na verdade existem poucos tipos destas equações que podem ser resolvidas por métodos analíticos. Às vezes, é possível resolver uma equação não linear efetuando uma mudança conveniente da variável dependente, que a transforma numa equação linear. Veremos um conjunto muito importante de equações não lineares que têm essa característica.

2.7.1 Equações de Bernoulli (em Homenagem a Jacob Bernoulli — 1654-1705)

Esta equação aparece naturalmente no estudo do crescimento de peixes (Modelo 11).

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)y^n \tag{1}$$

onde g e h são funções contínuas de x em $(a, b) \subset \mathbb{R}$ e n é uma constante qualquer.

Observações:

a. Se $x_0 \in (a, b)$, então o problema de valor inicial (x_0, y_0) sempre tem uma única solução, se $n \geqslant 1$ ou $n = 0$ (por quê?)
b. Se $n = 0$, (1) é uma equação linear.
c. Se $n = 1$, (1) é uma equação a variáveis separadas.
d. Se $n \neq 0$ e 1, então a mudança de variável $z = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli (1) a uma equação linear (método proposto por Liebnitz-1696).

De fato, temos que $y = 0$ é a solução trivial da Equação (1). Se $y \neq 0$, podemos escrever (1) na forma

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + g(x)y^{1-n} = h(x)$$

Tomando $z = y^{1-n}$, segue que $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ que, substituído em (1), nos dá:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,g(x)\,z = (1-n)\,h(x) \qquad \text{(equação linear)} \tag{2}$$

Veremos, como exemplo, um modelo para ilustrar a importância de tais equações.

Modelo 11 CRESCIMENTO DE PEIXES (VON BERTALANFFY)

A pesca sempre foi um elemento importante para a sobrevivência de muitas raças. Com o desenvolvimento de materiais sofisticados e muitas vezes predatórios, o estoque de peixes diminuiu muito, até mesmo causando o perigo de extinção de algumas espécies. Atualmente existem leis internacionais que definem a maneira como a pesca deve ser efetuada, impondo controle sobre o tamanho das redes, tamanho das malhas e períodos de aprisionamento. Os modelos matemáticos podem ser utilizados para se medir o efeito de tais controles e estabelecer em que condições o peixe pode ser capturado. O peso $p(t)$ de cada espécie é dado pela equação de von Bertalanffy (obtida experimentalmente):

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p \tag{1}$$

a qual estabelece que o aumento do peso de um peixe é proporcional à área de sua superfície (α é a constante de anabolismo, representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal). β é a constante de catabolismo, representando a taxa de diminuição da massa por unidade de massa.

A Equação (1) é uma equação de Bernoulli com $n = \frac{2}{3}$, isto é

$$\frac{dp}{dt} + \beta p = \alpha p^{2/3}$$

Fazendo a substituição $z = p^{1-2/3} = p^{1/3}$, vem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3} p^{-2/3} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{3} p^{-2/3} (\alpha p^{-2/3} - \beta p) = \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} z$$

ou seja

$$\frac{dz}{dt} + \frac{\beta}{3} z = \frac{\alpha}{3} \qquad \text{(equação linear)}$$

cuja solução é dada por

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/3} \qquad \text{(verifique!)}$$

Portanto

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{C\beta}{\alpha} e^{-\beta t/3}\right)^3$$

Quando $t=0$, o valor de p é insignificante. Usamos $p(0)\cong 0$ e obtemos

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3\left(1+\frac{C\beta}{\alpha}\right)^3=0, \text{ e então } 1+\frac{C\beta}{\alpha}=0 \text{ ou } \boxed{C=-\frac{\alpha}{\beta}}$$

Assim, $p(t)=\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3(1-e^{-\beta t/3})^3$.

Quando t cresce, p tende a $P_\infty=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$. Tomando $k=\frac{\beta}{3}$, temos

$$p(t)=P_\infty(1-e^{-kt})^3 \tag{2}$$

que fornece o peso do peixe em cada instante t.

A Equação (2) é chamada *Equação de von Bertalanffy* para o aumento de peso do peixe. Um estudo desta equação nos fornece algumas informações interessantes:

Derivando (2) em relação a t, obtemos

$$\frac{dp}{dt}=3k\,P_\infty(1-e^{-kt})^2e^{-kt}$$

Derivando mais uma vez,

$$\frac{d^2p}{dt^2}=3k^2\,P_\infty\,e^{-kt}(1-e^{-kt})(3\,e^{-kt}-1)$$

Agora, $\frac{dp}{dt}=0$ quando $t=0$ ou quando $t\to+\infty$ e $\frac{d^2p}{dt}=0$ se $t=0$, ou $t\to+\infty$, ou $t=\frac{\ln 3}{k}$.

Ainda, se $p\neq 0$ então $\frac{dp}{dt}>0$, ou seja, o peso é sempre crescente, tendo um valor limite P_∞. Matematicamente P_∞ é "atingido" quando $t\to+\infty$, mas na realidade este "tempo infinito" é de aproximadamente 10 anos! Esta contradição pode ser minorada se, por exemplo, estabelecermos que 99% do peso limite de um peixe é atingido depois de 10 anos.

Por outro lado, $t^*=\frac{\ln 3}{k}$ é um ponto de inflexão da curva obtida de (2) e $p(t^*)=P_\infty(1-e^{-\ln 3})^3=0{,}296\;P_\infty$. O valor $t^*=\frac{\ln 3}{k}$ é o instante de maior variação de peso do peixe, pois $\frac{dp}{dt}$ atinge seu valor máximo em $t=t^*$ (ver Figura 2.28).

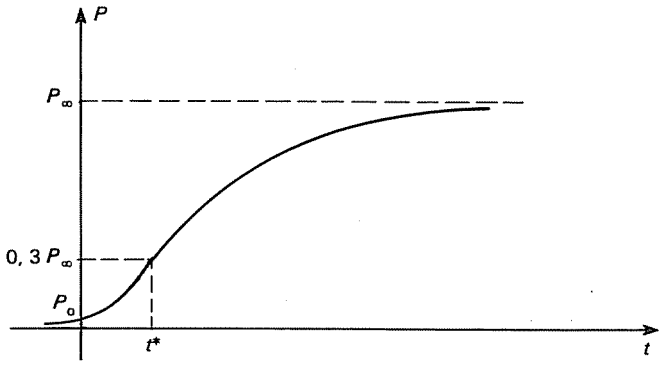


Figura 2.28 Curva de von Bertalanffy para crescimento em peso de peixes

Do principio da Alometria (ver Modelo 8 – Secção 2.4) sabemos que o crescimento do organismo é proporcional à superfície do corpo; então, podemos escrever a Equação (1) na forma

$$\frac{dp}{dt} = \alpha S - \beta p \tag{3}$$

sendo S a superfície fisiológica do organismo.

Para expressarmos S e p em termos do comprimento linear ℓ do organismo, assumimos que este cresce isometricamente e tem uma constante específica gravitacional. Assim,

$$S = a\ell^2 \text{ e } p = b\ell^3 \quad (a \text{ e } b \text{ constantes})$$

Portanto

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(b\ell^3) = 3b\ell^2 \frac{d\ell}{dt}$$

Estes valores, substituidos na Equação (3) nos dão

$$3b\ell^2 \frac{d\ell}{dt} = \alpha a\ell^2 - \beta b\ell^3$$

ou seja

$$\frac{d\ell}{dt} = \lambda - k\ell, \text{ onde } \lambda = \frac{a}{3b} \text{ e } k = \frac{\beta}{3} \tag{4}$$

A Equação (4) é autônoma e sua solução é dada por

$$\ell(t) = \frac{\lambda}{k} - C\, e^{-kt}$$

Usando a condição inicial $\ell(0) \cong 0$, obtemos $C = \frac{\lambda}{k}$.

Por outro lado, o comprimento limite ℓ_∞ é dado quando $t \to \infty$, isto é $\ell_\infty = \dfrac{\lambda}{k}$. Desta forma, obtemos a expressão

$$\ell(t) = \ell_\infty (1 - e^{-kt}) \tag{5}$$

denominada equação de von Bertalanffy para o crescimento, em comprimento, do peixe.

Observação:

Uma maneira de se estimar os valores ℓ_∞ e k, quando se tem uma tabela de valores experimentais, consiste em se tomar a reta $y = mx + n$ pela regressão linear dos valores $\ell(t)$ e $\ell(t+1)$, isto é,

$$\ell(t+1) = m\ell(t) + n, \text{ onde } m = e^{-k} \text{ e } n = \ell_\infty (1 - e^{-k})$$

Considerando que quando $t \to \infty$, $\ell(t+1) \cong \ell(t) \cong \ell_\infty$, obtemos

$$\ell_\infty = m\ell_\infty + n, \text{ isto é, } \ell_\infty = \frac{n}{1-m}$$

e de $m = e^{-k}$, tiramos $k = \ln m$. Este processo para o cálculo de k e ℓ_∞ é atribuído a Ford-Walford.

PROJETO 1 CRIAÇÃO DE AVES PARA CORTE

A criação de frangos em granjas, para o mercado de carne, é um empreendimento bem rendoso quando o abate é efetuado no instante correto. A tabela abaixo é um "controle de manejo", onde aparece seu crescimento semanal em peso, seu índice de mortalidade e a quantidade necessária para sua alimentação:

Idade (semanas)	Peso da Ave (média) (em kg) P_i	$P_i + 1$	Mortalidade (%)	Nutrimento Acumulado por Ave (em kg)
01	0,060	0,110	0,75	0,060
02	0,110	0,170	0,25	0,175
03	0,170	0,256	0,20	0,344
04	0,256	0,345	0,20	0,563
05	0,345	0,434	0,20	0,832
06	0,434	0,525	0,20	1,150
07	0,525	0,610	0,20	1,530
08	0,610	0,690	0,20	1,930
09	0,690	0,760	0,20	2,380
10	0,760	0,820	0,20	2,840
11	0,820	—	0,30	3,320

a. Calcule P_α e k para estes dados.

Sugestão: Use ajuste linear para os pontos (P_i, P_{i+1}), obtendo a reta $P(t+1) = mP(t) + b$, com

$$m = \frac{n \Sigma P_i P_{i+1} - \Sigma P_{i+1}}{n \Sigma P_i^2 - \Sigma P_0} \quad \text{e} \quad b = \bar{P}_{i+1} - m\bar{P}_i$$

onde $\bar{P}_i$ e $\bar{P}_{i+1}$ são as médias dos valores P_i e P_{i+1}.

b. Determine na equação de von Bertalanffy (1) os parâmetros α e β.

c. Determine o instante ideal para o abate (maior lucro) e procure saber se coincide com o que, em geral, ocorre na prática.

PROJETO 2

A "tilápia do Nilo" é um peixe originário da Costa do Marfim e foi introduzido no Brasil em 1971, no Nordeste, pelo DNOCS.

Os machos crescem muito mais rapidamente que as fêmeas. A tabela abaixo fornece os dados experimentais obtidos com machos albinos de tilápia do Nilo pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas de Pentecostes (CE):

Tempo t (mês)	ℓ: Comprimento médio (cm)	p: Peso Médio (g)	Consumo de Ração (g)
0	11,0	26,0	
1	15,0	59,5	12,3
2	17,4	105,4	27,9
3	20,5	200,0	49,8
4	22,7	239,5	56,7
5	25,3	364,3	65,4
6	27,4	421,7	95,6
7	28,0	476,0	106,3
8	29,3	488,2	128,5

Com base na tabela:

a. Mostre que $\ell(t+1) = 5{,}4 + 0{,}8\ell(t)$ (use ajuste linear).

b. Calcule ℓ_∞ e k.

c. Se $t_0 = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{\ell_\infty - \ell_0}{\ell_\infty}\right)$, deduza a equação de von Bertalanffy (Equação (5)) para crescimento (em tamanho)

$$\ell(t) = \ell_\infty [1 - e^{k(t-t_0)}]$$

O peso do peixe é dado, da equação de alometria, por

$$p(t) = \alpha[\ell(t)]^\beta \quad \text{ou} \quad \ln p = \ln \alpha + \beta \ln \ell$$

Escreva a equação diferencial para o peso do peixe.

d. Calcule o instante t^* em que se tem variação máxima do peso p.

e. Faça os gráficos de $\ell(t)$ e $p(t)$.

2.7.2 Equações de Clairaut

As chamadas equações de Clairaut deram origem ao estudo das soluções singulares. A forma geral destas equações é

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{6}$$

sendo f uma função derivável.

Para resolvermos uma equação deste tipo, o procedimento a ser utilizado é a substituição de $p = \frac{dy}{dx}$. Então, a Equação (6) vem escrita na forma

$$y = xp + f(p) \tag{7}$$

Derivando (7) em relação à variável x, obtemos

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

ou

$$\frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0 \tag{8}$$

Assim, $\frac{dp}{dx} = 0$ ou $x + f'(p) = 0$.

Se $\frac{dp}{dx} = 0$, então $p = c$ (constante). Substituindo este valor em (7), temos $y = cx + f(c)$ que é uma família de retas.

Se $x = -f'(p)$, a Equação (7) fica

$$y = -p\,f'(p) + f(p)$$

A solução singular da equação de Clairaut é dada na forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = f(t) - tf'(t), \text{ onde } t \text{ é o parâmetro} \end{cases}$$

Observação:

A *envoltória* de uma família de curvas $\varphi(x, y, t) = 0$, onde t é um parâmetro arbitrário, é definida pelas equações

$$\varphi(x, y, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Assim, se tivermos a família de retas dadas por $y = tx + f(t)$, sua envoltória, na forma paramétrica, será dada por

$$y = tx - f(t) \quad \text{e} \quad x = -f'(t)$$

Portanto, a solução singular da equação de Clairaut é a envoltória da família de retas soluções de (6).

EXEMPLO 1

Resolva a equação

$$y = x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{1.1}$$

Solução: Tomando $p = \frac{dy}{dx}$, podemos escrever a equação inicial na forma

$$y = xp - p^2 \tag{1.2}$$

Derivando em relação a x, obtemos

$$p = x\frac{dp}{dx} + p - 2p\frac{dp}{dx}, \text{ ou } \frac{dp}{dx}(x - 2p) = 0, \text{ donde}$$

$p = c$ (constante) ou $x = 2p$. Substituindo $p = c$ em (1.2) obtemos

$$y = xc - c^2 \quad \text{(equação do feixe de retas)}$$

A solução singular da Equação (1.1) é dada, então, por

$$\begin{cases} x = 2c \\ y = c^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad y = \frac{x^2}{4}$$

que é uma parábola que envolve as retas $y = cx - c^2$ (ver Figura 2.29).

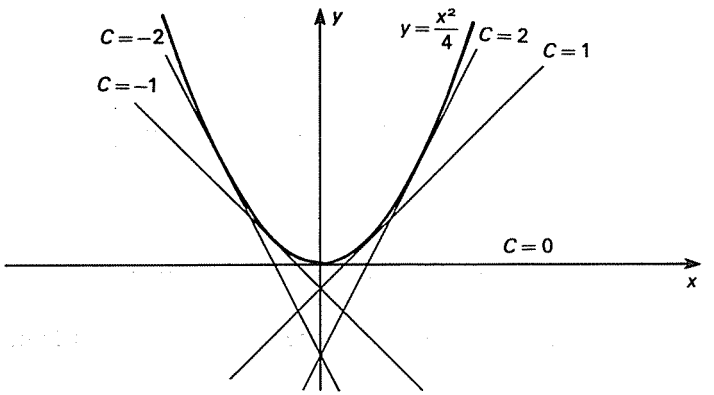


Figura 2.29

EXEMPLO 2

Encontre as soluções da equação

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

Solução: Fazendo $\frac{dy}{dx} = p$

$$y = xp + p^3$$

Derivando em relação a x, obtemos

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + 3p^2\frac{dp}{dx}$$

ou

$$0 = \frac{dp}{dx}(x + 3p^2)$$

então, $\frac{dp}{dx} = 0$ ou $x + 3p^2 = 0$

Assim, a solução geral é dada pelo feixe de retas

$$y = cx + c^3$$

e a envoltória (solução singular) é dada na forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = -3t^2 \\ y = -2t^3 \end{cases} \text{ ou, eliminando o parâmetro } t,$$

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{-\frac{x}{3}}$$

2.7.3 Equação de Riccati

Uma aplicação prática da equação

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) + f_2(x)y + f_3(x)y^2 \tag{9}$$

denominada equação de Riccati, será vista no Modelo de Transportes de Partículas.

Para resolvê-la, devemos supor que uma solução particular y_p desta equação seja conhecida. A solução geral é obtida quando fazemos a substituição em (9):

$$y = y_p(x) + \frac{1}{v(x)}$$

Obtemos

$$\frac{dy_p}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = (f_1(x) + f_2(x)y_p + f_3(x)y_p^2) + \frac{1}{v}f_2(x) + \frac{2}{v}f_3(x)y_p + \frac{1}{v^2}f_3(x)$$

Simplificando, temos

$$\frac{dv}{dx} = -(f_2(x) + 2f_3(x)y_p) - f_3(x) \tag{10}$$

A Equação (10) obtida desta forma é linear de primeira ordem, podendo ser resolvida como na Secção 2.6.

Modelo 12 TRANSPORTE DE PARTÍCULAS

Este tipo de problema surge em vários estudos relacionados com teoria eletroquímica de células combustíveis, reatores nucleares etc. Como exemplo simples imaginemos uma barra longa com uma extremidade em 0 (origem) e outra em x_0, com $x_0 > 0$.

As partículas podem viajar para a esquerda ou direita com velocidade fixa e são indistinguíveis; apenas podemos determinar o sentido de seu movimento. A única modificação possível se verifica quando uma partícula colide com um núcleo atômico da barra e, neste caso, dá origem a duas outras partículas, uma para cada direção.

Em um intervalo pequeno de comprimento Δ esta colisão se dá, aproximadamente, para uma quantidade $\sigma\Delta$ das partículas que o atravessam (existe uma quantidade desprezível de colisões secundárias).

O nosso problema é obter a função $R(x)$, igual ao número de partículas que escapam à direita de uma barra de comprimento x para cada partícula que entra por aquela extremidade, chamada função de reflexão.

Suponha que N partículas entrem pela extremidade em $x + \Delta$:

1. $\sigma\Delta N$ colidem e dão origem a $\sigma\Delta N$ que escapam em $x + \Delta$.
2. $\sigma\Delta N$ que entram em x.
3. $(1 - \sigma\Delta)N$ chegam incólumes até x e entram.

Logo, N partículas entram em x.

Pela definição de $R(x)$ temos que $NR(x)$ destas partículas voltam a escapar pela extremidade x.

Dessas últimas,

4. $NR(x)\,(1-\sigma\Delta)$ escapam incólumes em $x+\Delta$.
5. $NR(x)\sigma\Delta$ colidem e o mesmo número escapa em $x+\Delta$.
6. $NR(x)\sigma\Delta$ entram em x.

Somando (4) e (5) verificamos que $NR(x)$ escapam em $x+\Delta$ para as N partículas que entraram em x. Logo. das (6) $NR(x)\sigma\Delta$ que novamente entram em x darão origem a

7. $(\sigma\Delta NR(x))\,R(x)$.

que escapam em $x+\Delta$ e $(\sigma\Delta)^2 NR(x)$ voltam a x, e daí por diante.

Portanto, podemos escrever

$NR(x+\Delta)=$ número de partículas que escapam em $x+\Delta$ das N que lá entraram é igual a

$$\underset{①}{\sigma\Delta N}+\underset{④+⑤}{NR(x)}+\underset{⑦}{\sigma\Delta NR^2(x)}+\Delta^2\,(\ldots)$$

de onde

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{R(x+\Delta)-R(x)}{\Delta}=\sigma+\sigma R^2=\frac{dR}{dx}$$

A equação diferencial para $R(x)$ é, portanto,

$$\boxed{\frac{dR}{dx}=\sigma+\sigma R^2}$$ (uma equação de Ricatti)

e a condição inicial é obviamente $R(0)=0$, pois uma barra de comprimento zero não reflete partículas.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que a solução do problema apresentado no modelo acima é $R(x)=\operatorname{tg}\sigma x$.

2. Obtenha a equação diferencial para

$T(x)=$ número de partículas que escapam na extremidade $x=0$, para uma barra de comprimento x, para cada partícula que entra em x; T é chamada função de transmissão e a condição inicial adequada.

Para $x\to\pi/2\sigma$, $R(x)\to\infty$ e este comprimento $L=\pi/2\sigma$ é chamado crítico. Isto implica que algo está acontecendo perto de $x=\pi/2\sigma$ que o nosso modelo não descreve, mas sugere.

Procure saber sobre reatores nucleares e se esta "explosão matemática" da função corresponde a uma explosão mais concreta.

O argumento utilizado para a obtenção da equação de transporte de nêutrons é atribuído a R. Bellman e pode ser empregado em várias outras situações, fornecendo um ponto de vista quase sempre diferente e original sobre o problema estudado.

Considere, por exemplo, o problema elementar de calcular a altitude máxima que um projétil alcança em função da sua velocidade de saída v_0, supondo apenas a ação da gravidade. O procedimento usual é escrever a equação diferencial da trajetória $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$ cuja solução geral é $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + at + b$. Uma solução particular pode ser calculada de acordo com as condições iniciais

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0$$

e obtemos

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t$$

Para se obter max $x(t)$ não há maiores problemas, visto ser $x(t)$ uma parábola invertida $x_{\max} = v_0^2/2g$.

Observe, entretanto, que para obter a solução para a nossa questão inicial por este método, tivemos que calcular muito mais do que a resposta final: resolvemos um problema de Cauchy e calculamos o máximo da solução. Neste exemplo simples, isto não se constitui em um grande embaraço, mas em outras situações o trabalho extra exigido por um método não econômico pode significar a impossibilidade ou um excesso de cálculos na resolução do problema.

É uma boa regra, no estudo de modelos matemáticos, verificar em primeiro lugar quais as questões realmente importantes que devem ser analisadas e, a partir daí, tentar resolvê-las da forma mais "econômica".

Vejamos o argumento de Bellman para este exemplo. O objetivo é calcular a função $f(v_0)$ = altitude máxima atingida pelo projétil que parte com velocidade inicial v_0.

Após um pequeno intervalo de tempo da partida, o projétil se encontra no ponto P_0, a uma altura

$$H(\Delta) = \int_0^{\Delta} v(t)\, dt, \text{ com velocidade } v_0 - g\Delta$$

Vendo o problema agora como da obtenção da altura máxima atingida por um projétil, partindo de P_Δ com velocidade $v_0 - g\Delta$, pela própria definição de f temos

$$f(v_0 - g\Delta) = f(v_0) - H(\Delta)$$

ou

$$\frac{f(v_0 - g\Delta) - f(v_0)}{\Delta} = -\frac{H(\Delta)}{\Delta}$$

fazendo $\Delta \to 0$ temos

$$-gf'(v_0) = -v_0 \qquad \text{(verifique!)}$$

e como

$$f(0) = 1$$

temos

$$f(v_0) = \frac{v_0^2}{2g}$$

Suponha agora que se deseje calcular o tempo necessário para que o projétil atinja a máxima altitude e seja $T(v)$ esta função.

Utilizando argumentos análogos, mostre que

$$T(v) = \frac{v}{g}$$

Observe que o princípio básico deste argumento é estudar diretamente a função desejada e tentar obter uma relação recursiva a partir de sua própria definição, o que Bellman chama de *processo de múltiplos estágios**. Voltaremos a este assunto no decorrer do livro.

EXERCÍCIOS

1. Utilizando o método fornecido no início, resolva a seguinte equação de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$$

sabendo que $y_p(x) = \frac{1}{x}$ é uma solução particular.

2. Dê exemplo de uma equação de Riccati e resolva-a.

2.7.4 Equações Redutíveis às de Primeira Ordem

Algumas equações diferenciais de ordem superior podem ter sua ordem reduzida com a substituição de $\frac{dy}{dx} = p$

EXEMPLO 3

Resolver a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0 \tag{11}$$

(y não aparece explicitamente na equação).

---

* O leitor poderá aprofundar as suas informações em dois admiráveis pequenos livros: BELLMAN, R.E. *Some Vistas of Modern Mathematics*. Lexington, University of Kentuchy Press, 1968; e BELLMAN, R.E. et al. *Modern Elementary Equations*. New York, Addison-Wesley, 1971.

Solução: Tomando $\frac{dy}{dx}=p$, reescrevemos a equação de segunda ordem (11) por

$$\frac{dp}{dx}-p=0$$

cuja solução geral é dada por

$$p(x)=c_1e^x$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx}=c_1e^x$$

Integrando, obtemos

$$y=\varphi(x)=c_1e^x+c_2$$ ■

EXEMPLO 4

Resolver a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \tag{12}$$

(x não aparece explicitamente na equação).

Solução: Com $\frac{dy}{dx}=p$, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\,\frac{dp}{dy}$$

Substituindo na equação original (12), vem $p\frac{dp}{dy}+y=0$ (equação a variáveis separadas), cuja solução na forma implícita é dada por

$$\frac{p^2}{2}=-\frac{y^2}{2}+c \quad \text{ou} \quad p^2=-y^2+k_1^2 \qquad (R_1^2=2c)$$

Portanto, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{k_1^2-y^2}$. Separando as váriaveis e integrando, obtemos

$$\text{arc sen}\,\frac{y}{k_1}=\pm(x+k_2)$$

ou

$$y=k_1\,\text{sen}\,(x+k_2)=c_1\,\text{sen}\,x+c_2\cos x$$ ■

EXERCÍCIOS

Resolva as equações:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$

Modelo 13 CORDA SUSPENSA (CATENÁRIA)

Uma corda homogênea, flexível e inextensível, suspensa por suas extremidades quando em equilíbrio sob a ação de seu peso, determina a configuração de uma curva muito parecida com uma parábola. Sua expressão correta se deve a Johann Bernoulli, sendo batizada de *catenária* por Leibnitz. Pode ser visualizada nos cabos de transmissão de energia elétrica entre dois postes consecutivos, ou no varal de pendurar roupas.

Como encontrar a solução da catenária (ver Figura 2.30):

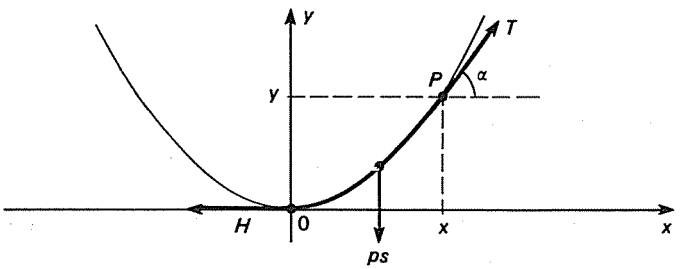


Figura 2.30 Catenária

Consideremos um sistema de coordenadas com a origem no ponto mais baixo da curva, e com a curva situada no plano-xy, sendo o eixo-y coincidente com a vertical.

Seja P um ponto genérico $P=(x, y)$ da corda, e vamos considerar o trecho OP que está em equilíbrio devido à ação das forças:

1. T: tensão atuando tangencialmente em P e formando um ângulo α com o eixo-x.

2. H: tensão da corda em seu ponto O, atuando horizontalmente.

3. ps: peso do pedaço OP da corda cujo comprimento é s, agindo verticalmente em sentido contrário do eixo-y (p é o peso por unidade de comprimento).

O equilíbrio do trecho OP implica que $H+T+ps=0$.

Decompondo esta equação sobre os dois eixos, temos

$$H = T\cos\alpha$$
$$ps = T\operatorname{sen}\alpha$$

Dividindo membro a membro estas equações, obtemos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ps}{H} = ks \qquad \left(k=\frac{p}{H}\right)$$

como $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx}$, vem $\dfrac{dy}{dx} = ks$. Derivando ambos os lados em relação a x, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = k\dfrac{ds}{dx}$ e como $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ (confira no texto de cálculo diferencial), obtemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \begin{pmatrix}\text{equação diferencial}\\ \text{da catenária}\end{pmatrix}$$

O artifício para sua resolução é o mesmo empregado na equação de Clairaut; tomamos $\frac{dy}{dp} = p$, o que nos leva à equação

$$\frac{dp}{dx} = k\sqrt{1+p^2} \qquad \text{(equação com variáveis separadas)}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k\,dx$$

Integrando, temos

$$\ln\,(p+\sqrt{1+p^2}) = kx + c_1$$

E como para $x=0$ temos $p(0)=y'(0)=0$, então $c_1=0$.
A solução do problema de valor inicial vem dada por

$$p+\sqrt{1+p^2} = e^{kx}$$

ou

$$1+p^2 = e^{2kx} - 2p\,e^{kx} + p^2 \Rightarrow 2p = (e^{2kx}-1)e^{-kx}$$

portanto

$$p = \frac{1}{2}\,(e^{kx} - e^{-kx})$$

Daí

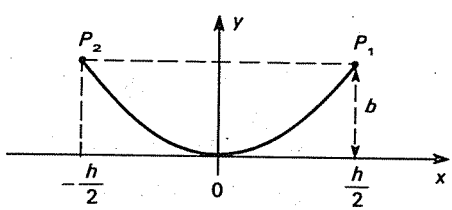
$$y = \frac{1}{2}\int (e^{kx} - e^{-kx})\,dx = \frac{1}{2k}\,(e^{kx} + e^{-kx}) + c_2$$

Como $y(0)=0$, temos $c_2 = -\frac{1}{k}$, logo

$$y = \frac{1}{k}\left(\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} - 1\right) = \frac{1}{k}\,(\cosh kx - 1) \qquad \begin{pmatrix}\text{equação da}\\ \text{catenária}\end{pmatrix}$$

EXERCÍCIO

1. Escreva a equação em termos de outros parâmetros, tais como:
   h: afastamento horizontal entre as duas extremidades da corda
   b: flecha da catenária
   ℓ: comprimento da corda
   na seguinte configuração:



2.8 EQUAÇÕES EXATAS

De todas as equações diferenciais de primeira ordem, a forma mais geral que podemos resolver é

$$\frac{d}{dx}[\varphi(x, y)] = 0 \tag{1}$$

para alguma função $\varphi(x, y)$.

Sua solução é simplesmente $\varphi(x, y) = k$ (constante) de onde, algumas vezes, se pode explicitar y como função de x. Assim, é muito importante reconhecer quando uma equação diferencial de primeira ordem tem a forma da Equação (1).

Como $\frac{d}{dx}\varphi(x, y(x)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ (diferencial total de $\varphi(x, y)$), então uma equação diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

pode ser escrita sob a forma $\frac{d}{dx}[\varphi(x, y)] = 0$ se, e somente se, existe uma função $\varphi(x, y)$ tal que

$$\omega = (x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{3}$$

Dizemos, neste caso, que (2) é *exata*.

O resultado seguinte nos dá condições para que uma forma diferencial

$$\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

seja a diferencial total de alguma função $\varphi(x, y)$.

2.8.1 Condição de Euler

Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções contínuas e com derivadas parciais contínuas num retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ e } c < y < d\}$. Existe uma função $\varphi(x, y)$ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x, y)$ se e somente se

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{4}$$

Dizemos que $M(x, y)$ e $N(x, y)$ satisfazem a *condição de Euler* se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Faremos, excepcionalmente, a demonstração deste resultado, por ser o mesmo processo de resolução das equações exatas.

Prova:

$M(x, y)=\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ para alguma função $f(x, y)$ se, e somente se,

$$\varphi(x, y)=\int M(x, y)dx + h(y) \tag{5}$$

onde $h(y)$ é uma função arbitrária de y, que deve ser determinada. Derivando parcialmente em relação a y ambos os membros de (5) vem,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\int \frac{\partial M\,(x, y)}{\partial y}\,dx+\frac{dh(y)}{dy}$$

Assim,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=N(x, y) \Rightarrow N(x, y)=\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx+\frac{dh}{dy}$$

e então

$$\frac{dh}{dy}=N(x, y)-\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \tag{6}$$

Como h é uma função apenas de y, então o segundo membro da Equação (6) só tem sentido se for também uma função de y apenas. Neste caso

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y)-\int \frac{\partial M\,(x, y)}{\partial y}\,dx\right]=0$$

Efetuando a derivação parcial, vem

$$\frac{\partial N\,(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial M\,(x, y)}{\partial y}=0$$

isto é, vale a condição de Euler.

Assim, se $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, então não existe $\varphi(x, y)$, tal que $M=\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $N=\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Reciprocamente, se $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ então

$$N(x, y)=\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + h(y);\ \text{logo}\ h(y)=N(x, y)-\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \tag{7}$$

E, portanto, se

$$\varphi(x, y)=\int M(x, y)dx+\int\left[N(x, y)-\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right]dy$$

então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=M \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial y}=N$$

Observações:

a. A região R definida em 2.8.1 não precisa ser necessariamente um retângulo aberto de $\mathbb{R}^2$, é suficiente que seja uma região do plano *simplesmente convexa*, isto é, se γ for uma curva fechada e contínua contida inteiramente em R, então seu interior também deverá estar contido em R.

Em outras palavras, R não deve ter "furos" em seu interior.

b. A equação geral de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ pode ser sempre escrita na forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Basta tomar $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$.

c. Se a equação $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ for exata, podemos também determinar $\varphi(x, y)$, colocando

$$\varphi(x, y) = \int N(x, y)dy + \int\left[M(x, y) - \int \frac{\partial N}{\partial x}dy\right]dx \tag{8}$$

EXEMPLO 1

Resolver a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x - y^2}$$

Solução: Para $x \neq y^2$, podemos reescrever a equação dada, colocando

$$-(x - y) + (x - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$M(x, y) = y - x \quad \text{e} \quad N(x, y) = x - y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, a condição de Euler é satisfeita em todo plano.

Tomamos pois

$$\varphi(x, y) = \int (y - x)dx + \int\left(x - y^2 - \int dx\right)dy = yx - \frac{x^2}{2} + \int [x - y^2 - x]dy = yx - \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + k$$

Observemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y - x = M(x, y)$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x - y^2 = N(x, y)$$

Logo, $\frac{d\varphi(x, y)}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$.

Assim $\varphi(x, y) = c$ é a forma implícita da solução geral da equação diferencial dada, ou seja

$$yx - \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c$$

Observação:

Apesar de $f(x, y) = \frac{x - y}{x - y^2}$ não ser contínua nos pontos $(x^2, x) \in \mathbb{R}^2$, da mesma forma que $\frac{\partial f}{\partial y}$, ainda assim existem soluções da equação $(y - x) + (x - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$, passando por estes pontos (justifique!). ■

EXEMPLO 2

Determine a solução do problema de valor inicial

$$(2x \operatorname{sen} y + e^x \cos y)dx + (x^2 \cos y - e^x \operatorname{sen} y)dy = 0,\ y(0) = \pi/4$$

Solução: $M(x, y) = 2x \operatorname{sen} y + e^x \cos y$ e $N(x, y) = x^2 \cos y - e^x \operatorname{sen} y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cos y - e^x \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cos y - e^x \operatorname{sen} y$$

Logo, a condição de Euler está satisfeita em todo $\mathbb{R}^2$; portanto, existe $\varphi(x, y)$, tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x, y)$

$$\varphi(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y) = \int (2x \operatorname{sen} y + e^x \cos y)dx + h(y) = x^2 \operatorname{sen} y + e^x \cos y + h(y)$$

Temos pois que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 \cos y - e^x \operatorname{sen} y + \frac{dh}{dy}$$

Por outro lado $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x, y)$, isto é

$$x^2 \cos y - e^x \operatorname{sen} y + \frac{dh}{dy} = x^2 \cos y - e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow \frac{dh}{dy} = 0$$

e, portanto, $h(y) = k$ constante. Então,

$$\varphi(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + e^x \cos y + k$$

A solução geral da equação diferencial é dada pela família de curvas

$$x^2 \operatorname{sen} y + e^x \cos y = c.$$

Para $y(0) = \frac{\pi}{4}$, calculamos $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, portanto, a solução do problema de valor inicial é a curva

$$x^2 \operatorname{sen} y + e^x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

■

2.8.2 Fator Integrante

Em alguns casos em que a equação diferencial $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ não é exata, podemos encontrar uma função $I(x, y)$ tal que

$$I(x, y)\left[M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx}\right] = 0 \tag{9}$$

seja exata. Se $I \neq 0$, então as soluções de $M + N\frac{dy}{dx} = 0$ e $I\left(M + N\frac{dy}{dx}\right) = 0$ são as mesmas.

A função $I(x, y)$, não identicamente nula, que torna a Equação (9) uma equação diferencial exata, é denominada *fator integrante*. (Este método já foi utilizado no estudo das equações lineares, Secção 2.6.)

Infelizmente não existe uma regra geral para se encontrar o fator integrante de uma dada equação. De qualquer maneira, para que (9) seja exata, deve satisfazer a condição de Euler:

$$\frac{\partial}{\partial y}[I(x, y)\, M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[I(x, y)\, N(x, y)]$$

ou seja

$$M\frac{\partial I}{\partial y} + I\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial I}{\partial x} + I\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{10}$$

Tal equação estabelece, pois, a condição necessária e suficiente para que $I(x, y) \neq 0$ seja fator integrante da equação $M + N\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Veremos em dois exemplos simples como aplicar este método.

EXEMPLO 3

Resolva a equação $(xy + x^2 + 1) + x^2\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Solução: Tal equação não é exata, pois $\dfrac{\partial M}{\partial y} = x$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$.

Notamos, no entanto, que

$$xy\,dx + x^2dy = x(ydx + xdy) = xd(xy)$$

Portanto, dividindo a equação original por x, obtemos

$$\left(y + x + \frac{1}{x}\right) + x\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{(que agora } \textit{é exata}\text{)}$$

$$ydx + xdy + \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = 0 \Leftrightarrow d(xy) + \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = 0$$

que integrando nos dá

$$xy + \frac{x^2}{2} + \ln|x| = c \quad \text{(solução geral)}$$

EXEMPLO 4

Resolva a equação diferencial

$$-ydx + (x - 2x^2 \operatorname{tg} y)dy = 0$$

Solução: Podemos reescrevê-la como: $xdy - ydx = 2x^2 \operatorname{tg} y\, dy$.

Notamos agora que $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$; portanto, tomamos $I(x, y) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{x^2}(xdy - ydx) = \frac{1}{x^2}\ 2x^2 \operatorname{tg} y\, dy$$

ou

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 2 \operatorname{tg} y\, dy$$

Integrando, vem

$$\frac{y}{x} = -2 \ln |\cos y| + c$$

e assim a solução geral é dada pela família de curvas

$$\frac{y}{x} + 2 \ln |\cos y| = c$$

Observação:

De uma maneira geral, para se encontrar o fator integrante de uma equação, basta conseguirmos reconhecer na equação uma das formas de uma diferencial:

$$d(xy) = xdy + ydx; \qquad d\left(\text{arc tg}\,\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}; \qquad \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = xdx + ydy \text{ etc.}$$

O método do fator integrante pode ser encarado como um método geral para se resolver equações da forma $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$; entretanto, por causa da dificuldade de se poder determinar qual é o fator integrante, dificuldade esta existente na maioria dos casos, este método só é usado em exemplos simples.

Modelo 14 ESPELHO PARABÓLICO

Os raios luminosos provenientes de uma fonte luminosa puntual incidem em um refletor espelhado, de modo que todos os raios refletidos saem paralelos. O problema é determinar a forma do refletor que tenha esta propriedade.

Consideremos a origem de um sistema cartesiano o ponto de onde partem os raios luminosos e o eixo das abscissas, disposto na mesma direção do feixe refletido.

Seja $P(x, y)$ o ponto de incidência sobre o refletor de um raio luminoso.

A Figura 2.31 representa uma secção do refletor pelo plano-xy que contém o eixo das abscissas e o ponto $P(x, y)$.

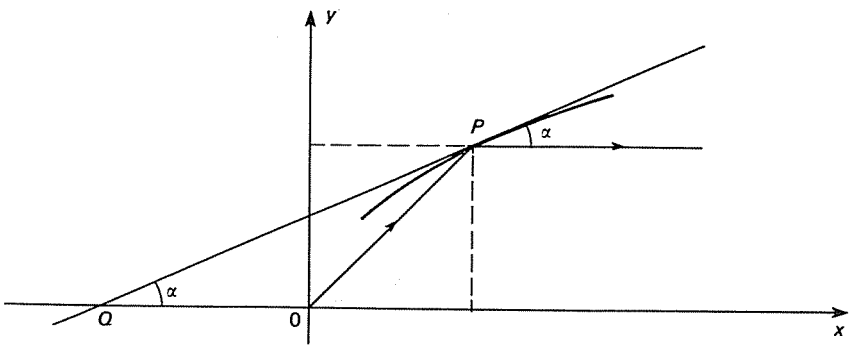


Figura 2.31 Espelho parabólico

Estamos supondo o refletor com uma superfície suave. Assim, podemos considerar a reta tangente no ponto P à curva, determinada pela intersecção do plano-xy com o refletor. Seja Q a intersecção desta reta com o eixo-x.

O triângulo PQO é isósceles porque o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão; então $\overline{QO} = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1}$$

Como $\operatorname{tg} \alpha$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = \varphi(x)$ no ponto $P(x, y)$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2}$$

que é uma equação homogênea, sugerindo a mudança da variável $z = \frac{y}{x}$ (ver Secção 2.5).

No entanto, se racionalizarmos o denominador da equação, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x - \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 - (x^2 + y^2)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \quad (y \neq 0) \tag{3}$$

ou

$$y dy + x dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx \tag{4}$$

que pode ser escrita ainda por

$$\frac{y dy + x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx \qquad \text{ou} \qquad d(\sqrt{x^2 + y^2}) = dx$$

Logo,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + c$$

ou

$$y^2 = 2cx + c^2 \quad (c \text{ constante})$$

que é uma família de parábolas com o foco na origem (fonte de luz). Se cada corte do espelho for uma parábola, a superfície procurada será um "paraboloide de revolução".

Você conhece a história de como Arquimedes ajudou a derrotar a poderosa esquadra romana que ameaçava a cidade de Siracusa?*

---

* Ver KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, Oxford University Press, 1972.

EXERCÍCIOS

Nos Exercícios de 1 a 4, encontre a solução de cada equação que for exata:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax^2 + bxy}{by^2 + axy}$
2. $(2y + x)\dfrac{dy}{dx} = 2x - y$
3. $(x \ln y + xy)dx + \ln x dy = 0,\ x > 0$ e $y > 0$
4. $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 - 2x$
5. Mostre que $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ é exata e, portanto, toda equação separável é exata.
6. Encontre o valor de p, de modo que a equação
$$(x + y)y^2 dx + (x^2 y + pxy^2)dy = 0 \quad \text{seja exata.}$$
7. Resolva a equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + xy}{x^2}$, usando $I(x, y) = \dfrac{1}{xy^2}$ como fator integrante.
8. Ache o fator integrante e resolva a equação diferencial
$$dx = \left(\text{sen } y - \frac{x}{y}\right)dy$$

IM/13438

2.9 MODELOS GEOMÉTRICOS — TRAJETÓRIAS

Dada uma curva $y = \varphi(x)$, a equação da reta tangente à curva num ponto (x_0, y_0) é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $m = \dfrac{dy}{dx}(x_0, y_0)$. A equação da reta normal à curva no mesmo ponto (x_0, y_0) tem o coeficiente angular igual a $-\dfrac{1}{m}$.

Suponhamos que $\varphi(x, y, c) = 0$ represente uma família de curvas. Uma *trajetória ortogonal* a esta família é uma curva que intercepta cada elemento da família num ângulo reto. Por exemplo, a família de circunferências $x^2 + y^2 = c^2$ tem como trajetória ortogonal qualquer reta que passa pela origem. Podemos também usar equações diferenciais para encontrar as trajetórias ortogonais a uma dada família.

Suponhamos que a família de curvas seja descrita pela equação

$$\varphi(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

Derivando esta equação, eliminamos o parâmetro c e temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} \tag{2}$$

onde $\dfrac{dy}{dx}$ é o coeficiente angular da reta tangente a algum membro da família $\varphi(x, y, c)$,

I. M. E. C. C.
BIBLIOTECA

num ponto arbitrário (x, y). A equação diferencial (2) tem como solução geral a família de curvas dada. Logo, as trajetórias ortogonais de $\varphi(x, y, c)$ são as curvas soluções da equação.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}} \tag{3}$$

EXEMPLO 1

Encontre as trajetórias ortogonais da familia de elipses concêntricas

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = c^2$$

Solução: Escrevemos a equação diferencial da família de elipses

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y/2} = -\frac{4x}{y}$$

Logo, a equação diferencial das trajetórias ortogonais é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{4x}$$

Separando as variáveis, temos

$$4\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integrando, obtemos

$$4 \ln |y| = \ln |x| + \ln c \quad \text{ou} \quad y^4 = cx$$

como mostra a Figura 2.32.

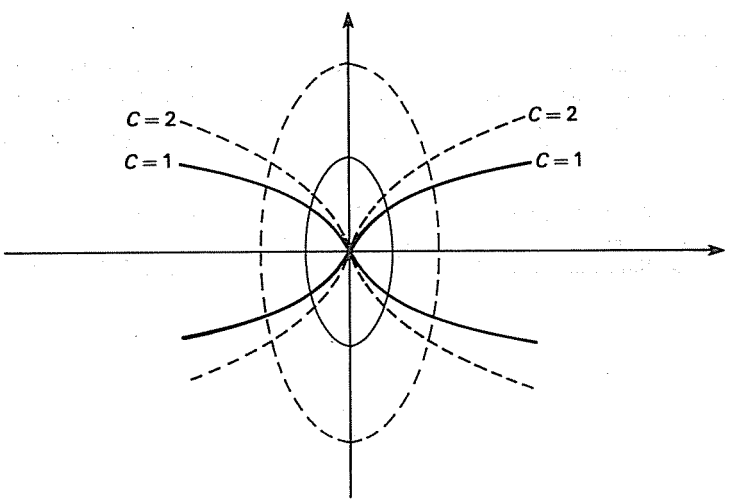


Figura 2.32 Trajetórias ortogonais

EXEMPLO 2

Seja $xy = k \neq 0$ uma família de hipérboles. Esboce a família de trajetórias ortogonais.

Solução: Seja $\varphi(x, y, c) = xy - k = 0$

então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\frac{y}{x}$$

Logo, a família de trajetórias ortogonais será dada pela equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

ou seja

$$y^2 - x^2 = c \quad \text{(família de hipérboles; ver Figura 2.33)}$$

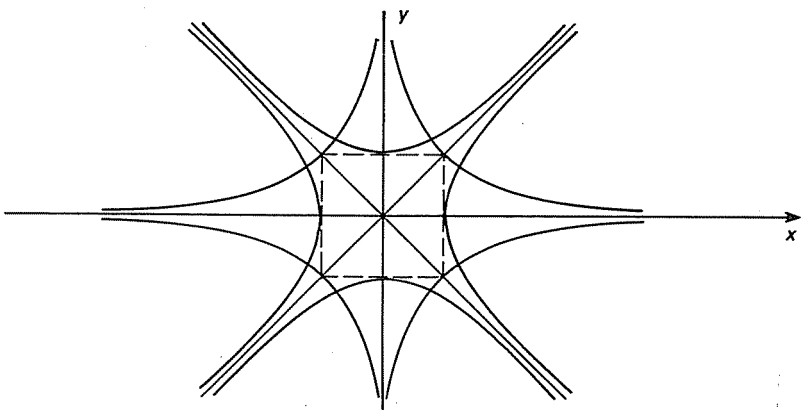


Figura 2.33 Hipérboles ortogonais ■

EXEMPLO 3 Linhas de fluxo e linhas equipotenciais

O fluxo do fluido em um plano-xy é definido quando em cada ponto (x, y) sabemos qual é o vetor velocidade $v(x, y)$ do movimento. O movimento é estacionário se v depende somente da posição do ponto, e não do tempo. Vamos supor que num movimento estacionário exista um potencial de velocidades, isto é, uma função $u(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = v_x$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = v_y$ onde v_x e v_y são as projeções do vetor $v(x, y)$ nos eixos coordenados.

As curvas da família $u(x, y) = c$ são chamadas linhas *equipotenciais*. As *linhas de fluxo* são tais que em cada ponto a reta tangente tem a mesma direção de $v(x, y)$.

Mostrar que as linhas de fluxo são trajetórias ortogonais à família de linhas equipotenciais (ver Figura 2.34).

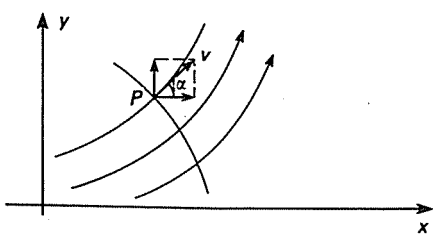


Figura 2.34 Linhas de fluxo

Solução: Seja $P(x, y)$ um ponto arbitrário de uma linha de fluxo e α o ângulo formado pelo vetor velocidade com o eixo-x.

Então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = |v| \cos\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = |v| \operatorname{sen}\alpha \tag{4.1}$$

O coeficiente angular da tangente à linha equipotencial é obtido calculando $\frac{dy}{dx}$ na equação $u(x, y) = c$, então

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{donde} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} \tag{4.2}$$

De (4.1) concluímos que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$ (coeficiente angular da reta tangente à linha de fluxo).

Portanto, as linhas de fluxo e as equipotenciais são mutuamente ortogonais. ■

EXERCÍCIOS

1. (Problema de De Beaune) Encontre uma curva tal que num ponto qualquer $P(x, y)$, a subtangente esteja para a ordenada do ponto, assim como um comprimento dado m está para a diferença entre a ordenada e a abscissa. Assim,

$$\frac{PM}{y} = \frac{m}{y - x}$$

Use o fato que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx}$.

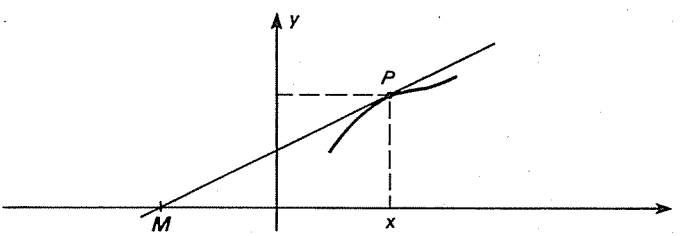


Figura 2.35

2. O raio de curvatura de uma curva plana num ponto $P(x, y)$ é dado por

$$r(x, y) = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

Determine a equação da curva cujo raio de curvatura é constante para todos os seus pontos.

Sugestão: Use $p = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = p\dfrac{dp}{dy}$.

Resolva $p\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{1}{r}(1+p^2)^{3/2}$, $r=$ constante, como uma equação com variáveis separadas e obtenha $p=\dfrac{\sqrt{r^2-(k_1-y)^2}}{k_1-y}=\dfrac{dy}{dx}$.

Mostre que a família de circunferências $(x-k_2)^2+(y-k_1)^2=r^2$ é a solução procurada.

3. Encontre as trajetórias ortogonais às circunferências

$$(x-c)^2+y^2=c^2 \quad \text{(ver Figura 2.36)}$$

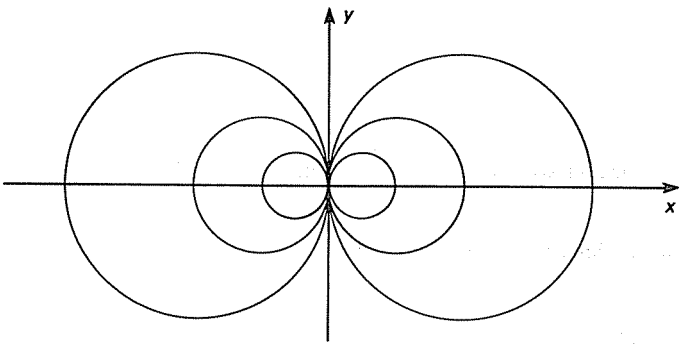


Figura 2.36

2.10 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS DE PRIMEIRA ORDEM

Se as variáveis mudam discretamente ou são descontínuas, o uso das equações diferenciais para estabelecer seus modelos de variações pode ser muitas vezes inconveniente e mesmo desnecessário. Nestes casos, as equações de diferenças podem traduzir melhor a situação, além de serem operacionalmente mais simples. Vejamos num exemplo como tais equações aparecem.

EXEMPLO 1

Seja C_0 um determinado valor depositado na Caixa Econômica, no início de cada mês. Supondo que $r=10\%$ seja a taxa média (juro mais correção monetária) que incide mensalmente sobre o capital acumulado no início de cada mês, calcule qual será o capital no final de um ano.

Solução: Temos

$C_1=C_0+rC_0=C_0(1+r)$ (capital no final do primeiro mês)
$C_1'=C_0(1+r)+C_0=C_1+C_0$ (capital no início do segundo mês)
$C_2=(rC_0(1+r)+rC_0)+C_0(1+r)+C_0$
$\quad=C_0(1+r)^2+C_0(1+r)$ (capital no final do segundo mês)
$C_2'=C_0(1+r)^2+C_0(1+r)+C_0=C_2+C_0$ (capital no início do terceiro mês)
$C_3=C_0(1+r)^3+C_0(1+r)^2+C_0(1+r)$
$C_3'=C_3+C_0$

De uma maneira indutiva podemos escrever

$$C_t = C_0 \sum_{i=1}^{t} (1+r)^i \quad \text{e} \quad C_t' = C_t + C_0 \tag{1}$$

então

$$C_t = C_0 \frac{(1+r)\,[(1+r)^t - 1]}{r} \text{ pois } \sum_{i=1}^{t} (1+r)^i$$

é a soma de uma progressão geométrica finita.

Neste exemplo, temos a seguinte relação entre dois capitais consecutivos.

$$C_{t+1} - C_t = C_0(1+r)^{t+1} \quad \text{para todo } t \geqslant 1 \tag{2}$$

onde (2) é uma equação de diferenças e (1) é sua solução.

No caso específico do problema proposto, inicialmente temos $r = 0{,}1$ e $t = 12$. Então

$$C_{12} = C_0 \frac{(1{,}1)[(1{,}1)^{12} - 1]}{1{,}1 - 1} = 23{,}5227\, C_0$$

será o capital no final do ano.

No final de 10 anos, será

$$C_{120} = C_0 \frac{(1{,}1)\,[(1{,}1)^{120} - 1]}{1{,}1 - 1} = 1.019.788{,}8 C_0$$

Existe uma analogia muito forte entre as equações de diferenças (caso discreto) e as equações diferenciais (caso contínuo).

Seja

$$\Delta y = y_{x+\Delta x} - y_x = y(x + \Delta x) - y(x) \qquad (\Delta x > 0)$$

Então

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{x+\Delta x} - y_x}{\Delta x}$$

dá a variação média de y no intervalo $(x, x + \Delta x)$

e $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dá a variação instantânea de y no ponto x.

Uma equação de diferenças estabelece uma relação envolvendo os valores de uma variável dependente para um conjunto discreto de valores (com retardamento) da variável independente. Por conveniência vamos supor sempre que os valores da variável independente sejam igualmente espaçados e, para simplificar, tomamos estes espaçamentos iguais a 1, isto é, $\Delta x = 1$. A *solução* de uma equação de diferenças é uma relação funcional, que não envolve diferenças, definida para todos os inteiros não-negativos e satisfazendo a equação de diferenças, isto é, transformando-a numa identidade.

Por exemplo $C(t) = C_0 \dfrac{(1+r)\,[(1+r)^t - 1]}{r}$ é a solução de

$$C(t+1) - C(t) = C_0\,(1+r)^{t+1} \text{ (Verifique!)}$$

A *ordem* de uma equação de diferenças é a diferença entre o maior e o menor índice que aparece na equação. Assim,

$$C(t+1) - C(t) = C_0(1+r)^{t+1} \quad \text{é de primeira ordem}$$

$$xy(x+2)y(x+1) = \frac{1}{2}y(x) \quad \text{é de segunda ordem}$$

$$x_{t+3} - x_{t+1} = x_t \quad \text{é de terceira ordem}$$

A classificação das equações de diferenças de primeira ordem é análoga à das equações diferenciais de primeira ordem. Veremos, a seguir, apenas as lineares.

EXERCÍCIO

1. Uma pessoa que paga mensalmente um valor C_0 num plano de pecúlio da A.P.M. (aprovado pelo SUSEP!) recebe no final de 10 anos o equivalente a $600C_0$. Levando-se em consideração a inflação nos últimos 10 anos, quanto deveria receber para não ganhar nada e nem perder?

Observação: O exercício acima é proposto com dados reais!!

2.10.1 Equação de Diferenças Linear de Primeira Ordem (em Coeficientes Constantes)

A forma geral da equação de primeira ordem pode ser escrita da seguinte maneira

$$y_{x+1} - ay_x = b \quad \text{com } y_0 \text{ dado} \tag{3}$$

Uma vez que esta equação vale para todos os valores discretos (naturais) de x, consideremos sucessivamente

$$y_1 = ay_0 + b$$
$$y_2 = ay_1 + b = a^2y_0 + ab + b$$
$$y_3 = ay_2 + b = a^3y_0 + a^2b + ab + b$$
$$y_4 = ay_3 + b = a^4y_0 + a^3b + a^2b + ab + b$$

Indutivamente, temos

$$y_x = a^xy_0 + b\,(a^{x-1} + a^{x-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$$

Logo, a solução de (3) é dada por

$$y_x = a^xy_0 + b\frac{1-a^x}{1-a} \qquad \text{para} \qquad a \neq 1 \tag{4}$$

$$= a^xy_0 + bx \qquad \text{para} \qquad a = 1 \tag{4'}$$

Observamos assim que a solução da equação é obtida imediatamente através das expressões (4) e (4').

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES PARA ALGUNS CASOS ESPECIAIS

Caso 1 Diferença constante ($a = 1$)

Como vimos, (4') $y_x = y_0 + bx$ é a solução geral.

Então, se $b > 0$, a seqüência $y_0, y_1, y_2, \ldots$ diverge para $+\infty$;

se $b < 0$, $y_x \to -\infty$ quando $x \to +\infty$.

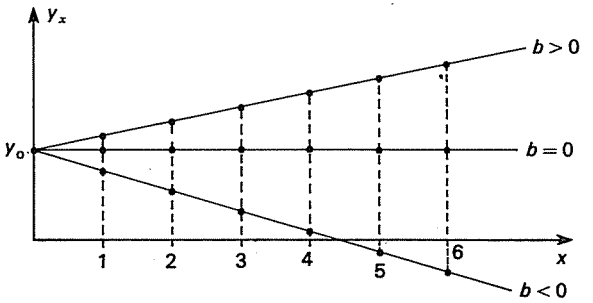


Figura 2.37 Diferença constante, y_x diverge se $b \neq 0$

Caso 2 Diferença é proporcional à variável independente, isto é

$$y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1} \qquad \text{para} \qquad \alpha \neq 1$$

Esta equação pode ser escrita como

$$(1-\alpha)y_{x+1} - y_x = 0 \quad \text{ou} \quad y_{x+1} - \frac{1}{1-\alpha} y_x = 0$$

que é linear com $b = 0$ e $a = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

Logo, a solução geral é dada por

$$y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x y_0$$

Então, se $\alpha = 0$, $y_x = y_0$ constante;

se $0 < \alpha < 1$, y_x é crescente (divergente);

se $\alpha < 0$, y_x é decrescente (convergente) (ver Figura 2.38).

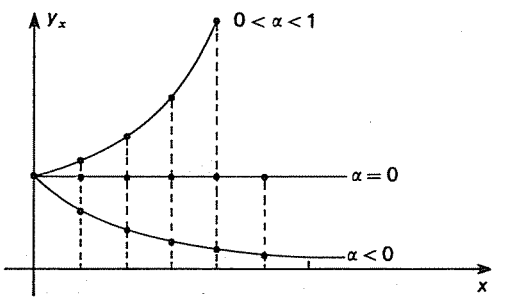


Figura 2.38 Diferença proporcional à variável independente

Caso 3 A diferença é igual a uma função linear da variável independente

$$y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1} + \beta, \qquad \alpha < 1$$

A equação pode ser simplificada, dando a seguinte equação linear

$$y_{x+1} - \frac{1}{1-\alpha} y_x = \frac{\beta}{1-\alpha} \left(a = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{e} \quad b = \frac{\beta}{1-\alpha} \right)$$

cuja solução é dada por

$$y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x y_0 + \frac{\beta}{\alpha}\left[\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x - 1\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x \left(y_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha} = a^x \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

Se $0 < a < 1$, y_x converge para $\dfrac{b}{1-a} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (ver Figura 2.39a).

Se $a = -1$, y_x oscila com a mesma amplitude! (ver Figura 2.39c).

Se $-1 < a < 0$, y_x oscila convergindo (ver Figura 2.39b).

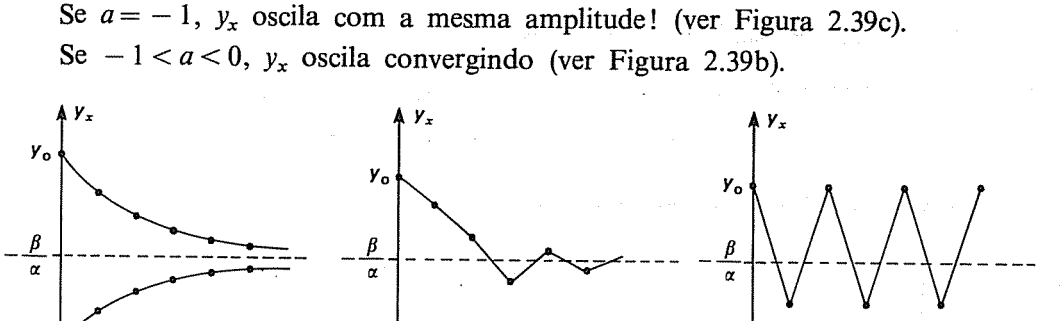


Figura 2.39

Modelo 15 ORÇAMENTO FAMILIAR

Consideremos uma família cuja renda mensal é proveniente de um salário fixo r_0, mais o rendimento da caderneta de poupança do mês anterior. O consumo mensal desta família é proporcional à sua renda mensal. Estabeleça um modelo em equações de diferenças que relacione as variáveis de *renda*, *poupança* e *consumo* com a variável independente *tempo*, tomado em meses.

Sejam r_t, c_t e p_t, respectivamente, a renda, o consumo e a poupança no mês t. Então,

a. $p_t = (r_t - c_t) + p_{t-1}$ (definição de poupança)
b. $r_t = r_0 + \alpha p_{t-1}$ (salário mais rendimento da poupança)
c. $c_t = \beta r_t$ (consumo proporcional à renda)

Temos que $r_0 =$ valor fixo do salário e também da renda quando $t = 0$

$$\alpha > 0 \qquad \text{e} \qquad 0 < \beta < 1$$

Usando (b) e (c) em (a), vem

$$p_t = (1-\beta)r_0 + [(1-\beta)\alpha + 1]p_{t-1} \quad \text{(equação linear com } p_0 \text{ dado)}$$

cuja solução é dada por

$$p_t = [(1-\beta)\alpha + 1]^t p_0 + (1-\beta)r_0 \frac{1 - [(1-\beta)\alpha + 1]^t}{1 - [(1-\beta)\alpha + 1]}$$

Chamando de $a = (1-\beta)\alpha + 1$ e $b = (1-\beta)r_0$, temos

$$r_t = r_0 + \alpha p_0 a^{t-1} + \alpha b \frac{1 - a^{t-1}}{1 - a}$$

e

$$c_t = \beta r_0 + \alpha\beta p_0 a^{t-1} + \alpha\beta b \frac{1 - a^{t-1}}{1 - a}$$

Suponhamos agora que $r_0 = 3$ mil, $p_0 = 5$ mil na poupança com $\alpha = 0{,}1$ ao mês. Ainda, o consumo da família é 90% da renda ($\beta = 0{,}9$). Calcule quanto será r_{12}, p_{12} e c_{12}.

Teremos:

$$a = (1-\beta)\alpha + 1 = 1{,}01$$

$$b = (1-\beta)r_0 = 0{,}3$$

$$p_{12} = (1{,}01)^{12} \cdot 5 + 0{,}3 \frac{1 - (1{,}01)^{12}}{1 - 1{,}01} = 5{,}634125 + 3{,}804751 =$$

$$= 9{,}438876 \text{ mil}$$

$$r_{12} = 3 + 0{,}1 \cdot 5 \cdot (1{,}01)^{11} + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \frac{1 - (1{,}01)^{11}}{1 - 1{,}01} = 3{,}557834 +$$

$$+ 0{,}347005 = 3{,}904839 \text{ mil}$$

$$c_{12} = 0{,}9 \cdot r_{12} = 3{,}514355 \text{ mil}$$

Modelo 16 MODELO DE HARROD: POUPANÇA, INVESTIMENTO E RENDA

Sejam S a poupança, I o investimento e Y a renda, todas funções do tempo t.

O modelo para a renda nacional proposto por Harrod consiste do sistema

$$\begin{cases} S_t = \alpha Y_t & \text{(a poupança é proporcional à renda)} \\ I_t = \beta(Y_t - Y_{t-1}) & \text{(o investimento é proporcional à variação da renda)} \\ I_t = S_t \end{cases}$$

Com Y_0 conhecido, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Destas três equações, obtemos a equação de renda

$$Y_t = \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right) Y_{t-1}$$

cuja solução é dada por

$$Y_t = \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^t Y_0$$

Portanto, obtemos também

$$I_t = S_t = \alpha \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right)^t Y_0$$

Observamos que este modelo clássico é usado para estudar a renda nacional numa economia em expansão, pois Y_t diverge, assim como os valores de I_t e S_t. (Confira!)

O estudante interessado a se aprofundar no estudo de processos iterativos e modelos para Administração e Economia, poderá recorrer aos livros de Vilenkin, Weber e Goldberg*.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 3, resolva as equações de diferenças:

1. $2y_{x+1} = 3y_x + 1$
2. $4y_{x+1} + 2y_x = 0$
3. $y_{x+1} - y_x = 2$
4. (Modelo de consumo) Sejam C o consumo, P a poupança e R a renda, funções do tempo t. Se b é a "tendência marginal do consumo":

   a. Justifique o seguinte modelo que relaciona C, P e R

$$\begin{cases} C_t + P_t = R_t \\ R_t = a\,P_{t-1} \\ C_t = b\,R_t, \quad \text{com } R(0) = R_0 \text{ (valor conhecido em } t = 0) \\ \qquad\qquad a > 0 \quad \text{e} \quad 0 < b < 1 \end{cases}$$

   b. Mostre que R_t, C_t e P_t:

   (i) Crescem sem limitações quando $a(1-b) > 1$.

   (ii) Convergem para zero se $a(1-b) < 1$.

   (iii) Permanecem constantes se $a(1-b) = 1$.

5. Resolva a equação de primeira ordem homogênea

$$y(t+1) = ay(t)$$

   considerando que possa ser do tipo $y(t) = \lambda^t$.

6. Monte um modelo matemático envolvendo equações de diferenças a partir de uma situação real.

---

* Para o estudo de processos iterativos consulte o interessante livro de VILENKIN, V.: *Method of Sucessive Aproximations*. Moscou, Mir, 1979. Para aplicação em Modelos de Economia vide WEBER, J.E. *Matemática para Economia e Administração*. 2. ed. Brasil, Harbra, 1986, e GOLDBERG, S. *Introduction to Difference Equations with Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology*. New York, 1958.

Capítulo 3

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo e no próximo estudaremos uma classe de equações diferenciais que podem ser analisadas com métodos de Álgebra Linear.

Estas equações chamadas lineares são, de certa forma, uma extensão da equação

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

onde a operação de derivação $\frac{d^n y}{dx^n}$ é substituída por uma operação

$$\mathbf{L}y = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0(x)y = f(x) \tag{1}$$

que a generaliza em sua característica básica: *a linearidade*. Isto é, para quaisquer funções reais com n derivadas, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, definidas em um intervalo (a, b), e para qualquer número real λ temos $\mathbf{L}(\lambda y_1 + y_2) = \lambda \mathbf{L}y_1 + \mathbf{L}y_2$. É exatamente esta propriedade, aparentemente trivial, que nos permite utilizar com grande proveito os argumentos e as técnicas de Álgebra Linear.

Sendo $\mathbf{L}$ uma generalização da operação $\frac{d^n}{dx^n}$, é natural a indagação sobre a possibilidade de se obter sua inversa explicitamente, tal como foi feito para $\frac{d^n}{dx^n}$ no Capítulo 1.*

Em geral, isto não é possível, mas ocorre no importante caso particular em que as funções $a_k(x)$ são constantes.

Como veremos nos próximos capítulos, a obtenção de soluções explícitas para equações do tipo

$$\mathbf{L}y = a_n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0 y = f(x) \tag{2}$$

---

* Observe que estamos falando de uma inversa à direita, isto é, de uma operação Q, tal que $\mathbf{L}(Qf) = f$; a obtenção de Q nos dará a solução geral da equação $\mathbf{L}y = f$. Por exemplo, $\int_{x_0}^{x} f(z)dz$ é uma inversa à direita de $\frac{d}{dx}$. Quais as outras?

com a_k constantes, é fundamental no desenvolvimento da teoria de equações diferenciais. Além disto, apesar de sua simplicidade, uma enorme variedade de problemas podem ser satisfatoriamente estudados através de modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes.

A resolução destas equações se reduz basicamente a:

1. obtenção das raízes de polinômios de grau n e
2. integração de funções.

Nenhum destes dois problemas pode ser considerado simples no caso geral, mas não há dúvida de que estão entre os mais estudados da Matemática e, por isto, dispomos de teorias bem conhecidas e um vasto arsenal de métodos para sua resolução.

A situação não é tão simples se as funções $a_k(x)$ não forem constantes. Entretanto, nas equações deste tipo que têm surgido em modelos matemáticos, as funções coeficientes $a_k(x)$ são, geralmente, polinômios, o que possibilita o uso do método de Euler-Frobenius. Neste método obtêm-se as soluções como séries de potências de x; (ver Secção 3.6.4). Uma equação formalmente simples como a "Equação de Airy"

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \text{ com } \begin{cases} a_1(x) = 0 \\ a_0(x) = -x \end{cases} \tag{3}$$

que surge no estudo de propagação de ondas, não pode ser resolvida por manipulações algébricas e integrações, mas o método de Euler nos fornece duas soluções em séries de potências de x

$$y_1(x) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(3N) \ldots 3 \cdot 2} x^{3N}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(3N+1) \ldots 4 \cdot 3} x^{3N+1}$$

que podemos considerar como explícitas, uma vez que os coeficientes das séries são dados como funções algébricas de N.

Argumentos de Álgebra Linear nos levarão à solução geral da equação, que será dada por combinações lineares de y_1 e y_2

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \tag{4}$$

onde A e B são constantes quaisquer.

Os resultados de Álgebra Linear que serão utilizados neste e no próximo capítulo envolvem apenas conceitos elementares (espaço vetorial, dependência linear, base, dimensão, núcleo de um operador linear etc.) que podem ser encontrados em qualquer bom texto do assunto*.

Uma vez que nos cursos usuais de Álgebra Linear não são enfatizados os exemplos de espaços vetoriais de funções e os operadores diferenciais lineares, é importante que o leitor faça cuidadosamente os exercícios a seguir e se familiarize com a notação antes de prosseguir.

---

* Veja BOLDRINI, J.L. et al. *Álgebra Linear*. 3 ed. São Paulo, Harbra, 1984.

$C^0[(a,b),\mathbb{R}] = \{$conjunto das funções reais contínuas definidas no intervalo aberto $(a,b)\}$

$C^k[(a,b),\mathbb{R}] = \{$conjunto das funções reais contínuas com n derivadas contínuas em $(a,\ )\}$

$P_N = \{$polinômios de grau $\leqslant N$ com coeficientes reais$\}$

$Q_N(\lambda_1,\lambda_2) = \{P_1(x)e^{\lambda_1 t} + P_2(x)e^{\lambda_2 t}$, onde $P_i \in P_N\} \equiv$ quase polinômios de grau $\leqslant N$ e expoentes λ_1, λ_2, reais, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$D^k = \dfrac{d^k}{dx^k}$, isto é, a k-ésima derivada.

EXERCÍCIOS

1. Verifique que $C^0[(a,b),\mathbb{R}]$ é um espaço vetorial com as operações $f+g$ e λf, onde $f+g$ é a função que em cada x tem o valor $f(x)+g(x)$ e λf é a função que em cada x tem o valor $\lambda f(x)$.
2. Verifique que, nas inclusões abaixo, cada subespaço é subespaço vetorial do seguinte

$$P_{N-1} \subset P_N \subset C^k \subset C^{k-1} \subset C^0; \qquad \text{e} \qquad Q_N \subset C^k$$

para todo $N \geqslant 1$ e $k \geqslant 2$.

3. Verifique que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base para o espaço P_N e, portanto, dim $P_N = N+1$.
4. Observando os exercícios **2** e **3**, verifique que C^k, $k \geqslant 0$ é um espaço vetorial de dimensão infinita.
5. Obtenha uma base para o espaço $Q_N(\lambda_1,\lambda_2)$.
6. Mostre que $D^k : C^k \to C^0$ é uma transformação linear. Obtenha o núcleo de D^k, $N(D^k)$.
7. Obtenha uma representação matricial para $D^k : P_N \to P_N$ na base $\{1, x, \ldots, x^N\}$.
8. Obtenha os autovalores e seus respectivos autovetores (autofunções) para a operação linear $D = \dfrac{d}{dx}$ em $Q_N(\lambda_1,\lambda_2)$, isto é, funções y e números λ tais que $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$.
9. Obtenha os autovalores e autovetores da operação linear $\mathbf{L}y = \dfrac{dy}{dx} + a(x)y$ em C^1, onde $a(x)$ é contínua em (α,β).
10. Mostre que $C^N[(a,b),\mathbb{C}] = \{$funções definidas em (a,b) com valores complexos e com N derivadas contínuas$\}$ é um espaço vetorial com escalares complexos.
11. Mostre que $Q_N(\lambda_1,\lambda_2)$ para λ_1 e λ_2 distintos e complexos também é um espaço vetorial com escalares complexos.
12. Se $\mathbf{L} = \sum_{k=0}^{N} C_k(x)\dfrac{d^k}{dx^k}$ é um operador diferencial linear de coeficientes complexos $C_k = a_k + ib_k$, podemos escrever $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + i\mathbf{L}_2$, onde

$$\mathbf{L}_1 = \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dx^k} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{L}_2 = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k}{dx^k}$$

são operadores diferenciais lineares de coeficientes reais contínuos. Considere agora $\mathbf{L}$ atuando em

$$C^N[(a,b),\mathbb{C}] = \{u + iv,\ u, v \in C^N[(a,b),\mathbb{R}]\}$$

ou seja, um espaço vetorial com escalares complexos.

Mostre que

$$\mathbf{L}(u+iv) = \mathbf{L}_1 u - \mathbf{L}_2 v + i(\mathbf{L}_1 v + \mathbf{L}_2 u)$$

e verifique se $\mathbf{L}$ é um operador linear, definido neste espaço vetorial com resultados em $C^0[(a,b),\mathbb{C}]$.

3.2 MODELOS MATEMÁTICOS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

A importância de uma determinada classe de equações ou modelos matemáticos provém substancialmente de sua aplicabilidade. Veremos agora alguns exemplos de situações que são modeladas por meio das equações lineares. Os métodos e técnicas para sua resolução virão em seguida.

Modelo 1 VIBRAÇÕES MECÂNICAS DE PEQUENA AMPLITUDE

Estudaremos aqui o movimento de partículas representadas por pontos no espaço, que também podem ser corpos rígidos representados pelos seus centros de massa.

O movimento de uma partícula no espaço será representado por uma função $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ que nos dá o vetor posição para cada instante.

A velocidade desta partícula é dada por $v = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}\right)$ que, como sabemos da geometria analítica, é um vetor tangente à trajetória. A aceleração da partícula é o vetor $\mathbf{a} = \dfrac{d^2\mathbf{x}}{\mathbf{dt}^2} = \ddot{\mathbf{x}}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))$.

A força também é uma entidade representada por um vetor, e o efeito de várias forças $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ sobre esta partícula pode ser representado como o efeito de uma só força $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n$ obtida da soma vetorial; $\mathbf{F}$ é chamada resultante das forças.

A Segunda Lei de Newton estabelece então que o movimento $\mathbf{x}(t)$ de uma partícula m (m talvez variável com o tempo) deve satisfazer a equação

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F} \tag{1}$$

onde $\mathbf{F}$ é a resultante de todas as forças aplicadas sobre a partícula no mesmo instante.

Esta lei é uma condição a ser cumprida entre o movimento $\mathbf{x}(t)$ da partícula de massa m e a força $\mathbf{F}$ que atua sobre ela.

Se pudermos prever a força $\mathbf{F}$ que atuará sobre a partícula, dada sua posição $\mathbf{x}$ no espaço, sua velocidade $\mathbf{v}$, e o instante observado t, a Segunda Lei de Newton será então uma equação diferencial para o movimento. Isto é, se considerarmos $\mathbf{F}$ como função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, então, com a interpretação acima, o movimento da partícula deve satisfazer a equação vetorial (componente a componente)

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t] \tag{2}$$

que é uma equação diferencial ordinária para a função incógnita $\mathbf{x}(t)$.

Do ponto de vista físico é claro que esta equação não caracteriza um determinado movimento, mas impõe uma condição sobre os possíveis movimentos. Para caracterizar *um* movimento é necessário que se especifique o ponto de partida $\mathbf{x}_0$ e sua velocidade inicial $\mathbf{v}_0$.

Estas condições todas podem ser reunidas em um problema matemático

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(m\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \tag{3}$$

que é o chamado problema de Cauchy para a equação diferencial.

As dificuldades na resolução destes problemas dependem inteiramente do tipo de função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ que aparece na equação. No caso geral, este problema é extremamente difícil.

Para obtermos um modelo interessante, mas ainda matematicamente tratável, devemos nos restringir a situações físicas de interesse, em que a função $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ é relativamente simples.

O problema físico de vibrações mecânicas em torno de uma posição de equilíbrio é de grande importância nas aplicações em Engenharia e na Física, e também como um protótipo de equações diferenciais ordinárias, onde vários conceitos e idéias matemáticas são desenvolvidos e apreciados.

O oscilador harmônico, que estudaremos mais abaixo, talvez seja o modelo de comparação mais utilizado em Física pela sua relativa simplicidade e pela quantidade de conceitos importantes que apresenta. O desenvolvimento inicial da Física Atômica, por exemplo, baseou-se em grande parte no modelo mecânico e na linguagem do oscilador harmônico.

Vamos analisar o comportamento de uma partícula de massa m, constante, restrita ao movimento sobre a reta, e sob a ação de três tipos de forças:

1. Uma força elástica que tende a restaurar a sua posição de equilíbrio em $x = 0$. Esta força será uma função do deslocamento $f(x)$, tal que $f(0) = 0$ e $xf(x) < 0$, se $x \neq 0$, isto é, não há força sem deslocamento e se houver um deslocamento x, a força atuará sempre no sentido oposto a ele.

2. Forças de atrito, que poderão ser de duas formas:

a. Força constante contrária ao movimento, causada por atrito de contacto (Lei de Coulomb), como, por exemplo, devido à restrição que a partícula tem para se movimentar em uma reta.
Neste caso, $F_a = -s(v)F_0$, com $s(0) = 0$, $s(v) = 1$ se $v > 0$, $s(v) = -1$ se $v < 0$ e F_0 constante positiva.

b. Força provocada pela resistência ao movimento imerso em um meio viscoso e que para velocidades baixas pode ser considerada como aproximadamente igual a $F_b = -cv$, $c > 0$.

3. Uma força externa conhecida $\varphi(t)$, exercida sobre a partícula e dependente apenas do tempo (ver Figura 3.1).

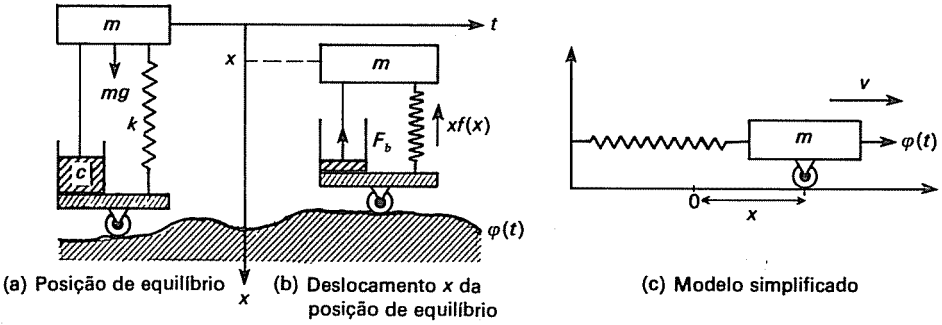


Figura 3.1 Oscilador harmônico amortecido

A Segunda Lei de Newton nos fornece então uma condição entre o movimento $x(t)$ e a força resultante sobre esta partícula dada pela seguinte equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - c\frac{dx}{dt} + \varphi(t) - s\left(\frac{dx}{dt}\right)F_0 \tag{4}$$

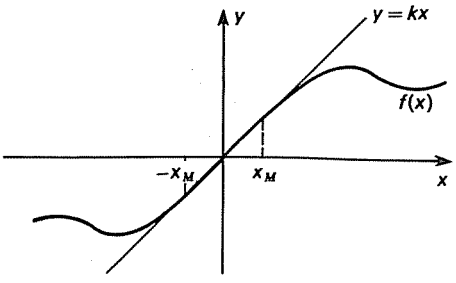
Esta não é uma equação simples. No caso de uma função geral $f(x)$, para torná-la mais tratável do ponto de vista matemático faremos uma última hipótese: a vibração é de pequena amplitude e a partícula não se afasta muito da origem durante seu movimento. Com base nisto, faremos uma aproximação para a função $f(x)$ (suposta diferenciável) em torno da origem:

$$f(x) \cong f(0) + f'(0)x = f'(0)x$$

ou, como é tradicional escrever,

$$f(x) \cong -kx \quad \text{onde} \quad k = -f'(0)$$

Do ponto de vista do gráfico de $f(x)$, estamos aproximando a curva em torno da origem pela sua reta tangente. No caso de ser uma mola a causadora da força de restauração, o gráfico de f com o deslocamento tem em geral o aspecto da Figura 3.2. A hipótese da aproximação vale, então, para vibrações de amplitude menor do que x_M. Se considerarmos aproximações de $f(x)$ até a terceira ordem do desenvolvimento de Taylor, teremos



$$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

Figura 3.2 Força elástica

Observe que pela simetria do gráfico devemos ter $f''(0) = 0$. Sem o atrito, a Equação (4) toma então a forma $\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \varphi(t)$, denominada equação de Duffing, que *não* é linear.

O *oscilador harmônico clássico* considera apenas a força de atrito viscosa, e não a de contacto, de onde vem a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = \varphi(t) \tag{5}$$

onde a operação efetuada sobre a função $x(t)$

$$\mathbf{L}x(t) = \left(m\frac{d^2}{dt^2} + c\frac{d}{dt} + k\right)x(t)$$

é linear*.

Outro problema físico clássico que pode ser estudado aproximadamente pela equação do oscilador harmônico (isto é, uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes!) é o *movimento de um pêndulo*, constituído de uma massa m suspensa por um fio inextensível sem massa e flexível. A partícula de massa m está restrita a se movimentar sobre um círculo (ver Figura 3.3).

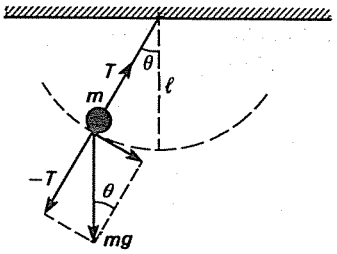


Figura 3.3 Pêndulo

A Segunda Lei de Newton aplicada à componente tangencial ao movimento nos dá

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l\theta) = -mg \operatorname{sen}\theta - c\frac{\ell\theta}{dt} + \varphi(t)$$

ou seja

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta - c\frac{d\theta}{dt} + \varphi(t) \tag{6}$$

Esta equação é não linear em θ, pois $\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$ é uma operação não linear sobre a função $\theta(t)$ e faz o papel da força restauradora.

Entretanto, se considerarmos que a vibração do pêndulo é de pequena amplitude, próxima do ponto de equilíbrio, então θ é pequeno comparado com 1 e portanto, $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$.

* Observe que a inclusão da força de atrito por contato torna a equação *não* linear (ver Capítulo 5).

Sob esta hipótese, a equação linearizada do movimento do pêndulo fica sendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\theta+c\frac{d\theta}{dt}=\varphi(t) \tag{7}$$

e do pêndulo livre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\theta=0 \tag{8}$$

que são equações correspondentes à do oscilador harmônico.

Vejamos outro exemplo. Considere um *sistema mecânico*, tal como na Figura 3.4, mergulhado em um fluido viscoso, o que vale dizer, sob ação de uma força de atrito proporcional à velocidade.

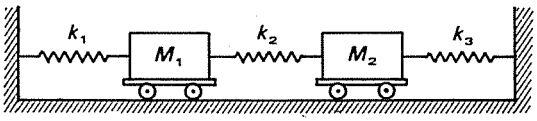


Figura 3.4

Tome a posição da massa M_1 como sendo x_1, medida a partir da sua posição de equilíbrio. Faça o mesmo com x_2 para M_2. Assim, se $x_1>0$, então a mola 1 exerce sobre M_1 a força $-k_1x_1<0$. Se $x_1<0$, a mesma expressão é válida; $-k_1x_1>0$.

Suponha agora que M_2 esteja deslocado de $x_2>0$. Se $x_1>x_2$ então M_1 e M_2 se aproximam e, portanto, a mola 2 exercerá uma força sobre M_2 no sentido positivo e uma força em M_1 no sentido negativo, isto é, $k_2(x_1-x_2)$ sobre M_2 e $k_2(x_2-x_1)$ sobre M_1. Argumentando analogamente podemos escrever

$$M_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-k_1x_1-\alpha_1\frac{dx_1}{dt}-k_2(x_1-x_2) \tag{9.1}$$

$$M_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k_3x_2-\alpha_2\frac{dx_2}{dt}-k_2(x_2-x_1) \tag{9.2}$$

Estas equações formam um sistema de equações diferenciais acopladas, isto é, as funções incógnitas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ comparecem efetivamente em ambas as equações. Portanto, da forma como estão, não é possível resolver uma equação de cada vez devido a esta interdependência. Para desacoplarmos as equações basta explicitar x_2 em (9.1)

$$x_2=\frac{M_1}{k_2}\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{\alpha_1}{k_2}\frac{dx_1}{dt}+\frac{k_1+k_2}{k_2}x_1$$

e derivando x_2 uma e duas vezes, e substituindo as expressões obtidas em (9.2), teremos uma equação diferencial para a incógnita $x_1(t)$ separadamente

$$\frac{M_2M_1}{k_2}\frac{d^4x_1}{dt^2}+\frac{M_2\alpha_1}{k_2}\frac{d^3x_1}{dt^3}+\left[\frac{M_2}{k_2}(k_1+k_2)+\frac{k_3M_1}{k_2}-\alpha_2M_1\right]\frac{d^2x_1}{dt^2}+$$
$$+\left[\frac{k_3\alpha_1}{k_2}-\alpha_1\alpha_2\right]\frac{dx_1}{dt}-\left[\frac{k_3}{k_2}(k_1+k_2)+k_1\right]x_1=0 \qquad (10)$$

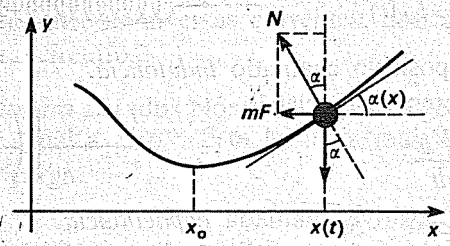
que é linear de coeficientes constantes e de quarta ordem. Analogamente, podemos obter uma equação semelhante para $x_2(t)$.

Suspeitamos assim de que um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes possa ser reduzido, formalmente, a uma equação linear de coeficientes constantes e de ordem superior. Embora um "método" análogo pareça ser aplicável a situações semelhantes, não há nada de sistemático nele que possa ser seguido. Veremos mais adiante como um simbolismo simples nos ajudará a lidar com estes problemas com as mesmas técnicas da Álgebra Linear.

Também deve ser enfatizado que não está claro que o conjunto das soluções das equações desacopladas seja o mesmo do sistema original, pois naquele caso as soluções precisam ter derivadas de ordem superior aos exigidos para as soluções do sistema! Comentários deste tipo têm por objetivo apenas alertar o leitor para estas possibilidades, e não inibi-lo na sua desenvoltura operacional que deve ser aprimorada, ainda que sob um espírito crítico.

PROJETO 1

Considere uma partícula de massa m restrita a se movimentar sem atrito sobre uma curva guia dada pelo gráfico de $y=f(x)$ conforme a Figura 3.5.



$f'(x_0)=0$
$\operatorname{tg}\alpha(x)=f'(x)$

Figura 3.5

Observe que a força N é a reação normal da guia sobre a massa e que anula o efeito da componente normal da gravidade sobre ela.

Analisando apenas a componente horizontal do movimento (sua posição vertical será dada por $y=f(x)$) vem

$$m\ddot{x}=mF(x) \quad \text{ou} \quad \ddot{x}=F(x)$$

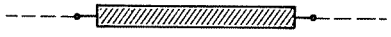
Obtenha a função $F(x)$. Mostre que nas imediações de x_0 (ponto de mínimo para $f(x)$) é razoável linearizar a equação e com isto obter um oscilador harmônico.

Mostre também como uma equação autônoma $\ddot{x}=\varphi(x)$ pode ser simulada por uma partícula nestas condições pela escolha adequada da curva guia $y=f(x)$.

Modelo 2 CIRCUITOS ELÉTRICOS RLC – OSCILAÇÕES

Consideraremos aqui circuitos elétricos que contêm os seguintes dispositivos: resistores, indutores e capacitores.

Cada dispositivo destes (chamados também *dipolos*) possui duas extremidades a serem conectadas com outros dipolos



As medidas importantes na descrição do estado de cada dipolo são:

Primeira, a corrente elétrica $I_{ab}(t)$ que passa de a para b, importando aqui a direção da corrente, em geral convencionada como a do movimento das cargas positivas e estabelecendo-se $I_{ab} = -I_{ba}$. A corrente mede o fluxo de carga (positiva) por unidade de tempo, $\frac{dq}{dt}$.

Segunda, a queda de tensão entre a e b, V_{ab}, isto é, a diferença de potencial $(V_a - V_b)(t)$.

Para cada tipo de dipolo existe uma relação entre a corrente e a queda de tensão.

Se o dipolo for uma resistência, então a Lei de Ohm nos dará

$$V_{ab}(t) = R\, I_{ab}(t) \qquad \text{---}\!\!\wedge\!\!\wedge\!\!\wedge\!\!\wedge\!\!\text{---}$$

onde R é um coeficiente positivo, constante com o tempo, chamado de *resistência*.

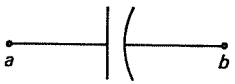
Se o dipolo for um indutor, então teremos a Lei de Henry

$$V_{ab}(t) = L\,\frac{d}{dt}\, I_{ab}(t) \qquad \text{---}\!\!\frown\!\!\frown\!\!\frown\!\!\text{---}$$

onde L é um coeficiente positivo chamado *indutância*.

Para um capacitor teremos a relação

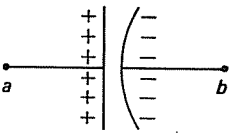
$$I_{ab}(t) = C\,\frac{dV_{ab}}{dt}$$



onde C é uma constante positiva chamada *capacitância*.

Em um capacitor não há passagem direta de cargas, mas há uma influência de uma placa sobre outra através do campo elétrico entre elas. Assim, se a corrente I_{ab} "passa" pelo capacitor, isto implica que há um acúmulo de carga elétrica de sinais contrários nas placas opostas, dado por

$$Q_{ab}(t) = \int_{t_0}^{t} I_{ab}(t)\,dt = C\, V_{ab}(t)$$



considerando $V_{ab}(t_0) = 0$.

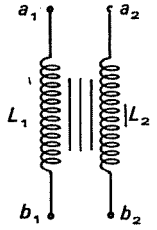
Isto é, a carga acumulada por um capacitor é proporcional à diferença de potencial entre os seus pólos.

Além destes dipolos, devemos considerar dois outros dispositivos em um circuito.

Primeiro, há uma influência mútua entre indutores paralelos e próximos (como em um transformador), efetuada através do campo magnético causado por ambos dispositivos. Neste caso, a queda de voltagem $V_{a_1b_1}(t)$ depende não apenas da indutância $L_1 \dfrac{dI_{a_1b_1}}{dt}$, mas da indutância mútua $M \dfrac{dI_{a_2b_2}}{dt}$, ou seja,

$$V_{a_1b_1} = L_1 \frac{dI_{a_1b_1}}{dt} + M \frac{dI_{a_2a_2}}{dt}$$

$$V_{a_2a_2} = L_2 \frac{dI_{a_2b_2}}{dt} + M \frac{dI_{a_1b_1}}{dt}$$

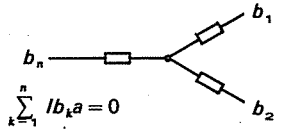


Segundo, os dispositivos acima relacionados são chamados passivos, uma vez que por si só não são capazes de movimentar um circuito. Para que haja aparecimento de correntes e diferenças de potencial, é necessário que o circuito disponha de elementos ativos (dipolos a —□— b, de tal modo que $V_{ab} = V(t)$ ou $I_{ab}(t) = I(t)$). Estes dipolos são os geradores e têm por símbolos —(−~+)— para corrente alternada $V(t) = E_0 \cos(\omega t - \alpha)$, e —−|+— para corrente contínua $V(t) = E_0$.

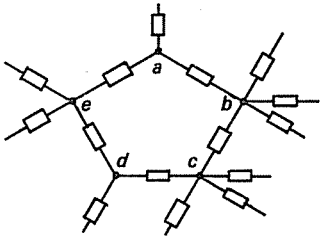
Para a descrição de um *circuito* (um conjunto de dipolos conectados entre si através de nós), precisamos determinar a corrente e a queda de voltagem entre cada nó.

Optamos por descrever o circuito através das correntes, uma vez que as diferenças de voltagem podem ser obtidas destas. Para formular as equações entre as diversas correntes, utilizamos as chamadas *Leis de Kirchhoff* para circuitos:

Primeira Lei (dos Nós): "A soma das correntes que se dirigem a um nó deve ser igual a zero". Esta lei nada mais é do que o princípio de conservação de carga.



Segunda Lei (das Malhas): Uma *malha* é uma seqüência fechada de dipolos conectados em série:



A Lei das Malhas diz o seguinte: "A soma das quedas de tensão em seqüência de uma malha deve ser nula".

Esta lei diz que

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + \ldots + V_{na} = V_{aa} = 0$$

Apliquemos estes conceitos ao circuito da Figura 3.6:

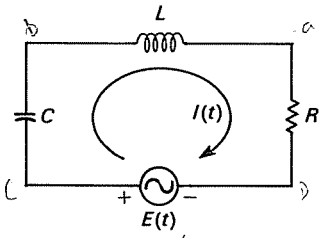


Figura 3.6 Circuito *RLC*

Pela Primeira Lei (dos Nós) vem que $I_{ab} + I_{cb} = 0 \Rightarrow I_{ab} = I_{bc}$ e da mesma forma $I_{bc} = I_{cd} = I_{da}$ e, portanto, existe uma única corrente $I(t)$ no circuito.

Pela segunda Lei (das Malhas) vem que

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{da} = 0$$

mas

$$V_{ab} = L\frac{dI}{dt}\ ;\ V_{bc}(t) = V_{bc}(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(s)ds$$

$V_{cd} = -E(t)$ (pois há, na verdade, um aumento e não queda de potencial do pólo negativo para o pólo positivo do gerador)

$$V_{da} = RI$$

e portanto

$$L\frac{dI}{dt} + \left(V_{bc}(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(s)ds\right) - E(t) + RI = 0$$

derivando

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \tag{1}$$

que é uma equação de segunda ordem linear com coeficientes constantes para a função incógnita $I(t)$.

A operação sobre I é dada por

$$\mathbf{L}I = \left(L\frac{d^2}{dt^2} + R\frac{d}{dt} + \frac{1}{C}\right)I = \frac{dE}{dt}$$

Observe a semelhança de (1) com a equação do oscilador harmônico para vibrações mecânicas

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=\varphi(t)$$

onde há uma equivalência mecânico-elétrica

$$\begin{cases} L \leftrightarrow m \\ R \leftrightarrow c \\ \dfrac{1}{C} \leftrightarrow k \\ \dfrac{dE}{dt} \leftrightarrow \varphi(t) \end{cases}$$

Devido às semelhanças deste tipo muitos problemas, completamente distintos do ponto de vista físico, são tratados exatamente pela mesma teoria matemática.

Com base em semelhanças desta natureza é que são construídos os chamados computadores analógicos, ou seja, circuitos elétricos com parâmetros (R, L, C, E), ajustáveis de tal forma que possam simular uma vibração mecânica.

Modelo 3 REDE DE CIRCUITOS

Analisemos agora o circuito constituído de duas malhas.

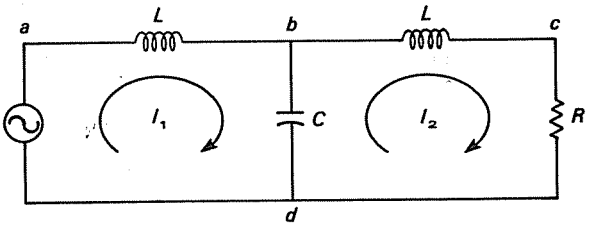


Figura 3.7

Escolhidas as correntes, tal como na Figura 3.7, a Lei dos Nós de Kirchhoff está automaticamente satisfeita. (Verifique*.) A Lei das Malhas nos dará duas equações, uma para cada malha:

Malha 1:

$$V_{ab}+V_{bd}+V_{da}=0$$

ou

$$L\frac{dI_1}{dt}+V(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{I_1(z)-I_2(z)}{C}\,dz+(-V(t))=0$$

* Observe que a corrente "através" do capacitor no sentido de b para d é dada por $I_1-I_2=I_{bd}$.

Derivando, em relação a t, temos

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2}+\frac{1}{C}(I_1-I_2)=\frac{dV}{dt} \tag{1}$$

Malha 2:

$$V_{bc}+V_{cd}+V_{db}=0$$

e, portanto, obtemos de modo análogo ao anterior

$$L\frac{d^2I_2}{dt^2}+R\frac{dI_2}{dt}+\frac{(I_2-I_1)}{C}=0 \tag{2}$$

De (1) temos

$$I_2=C\,L\frac{d^2I_1}{dt^2}+I_1-C\frac{dV}{dt}$$

que substituída em (2) resulta

$$L\frac{d^2}{dt^2}\left(CL\frac{d^2I_1}{dt^2}+I_1-C\frac{dV}{dt}\right)+R\frac{d}{dt}\left(CL\frac{d^2I_1}{dt^2}+I_1-C\frac{dV}{dt}\right)+L\frac{d^2I_1}{dt^2}-\frac{dV}{dt}$$

de onde vem a equação para I_1:

$$CL^2\frac{d^4}{dt^4}I_1+RCL\frac{d^3}{dt^3}I_1+2\,L\frac{d^2I_1}{dt^2}+R\frac{d}{dt}I_1=LC\frac{d^3V}{dt^3}+RC\frac{d^2V}{dt^2}+\frac{dV}{dt}$$

O termo à direita da equação é conhecido e pode ser resumido como uma única função $f(t)$ e o termo à esquerda é uma equação diferencial linear com coeficientes constantes e de quarta ordem sobre I_1.

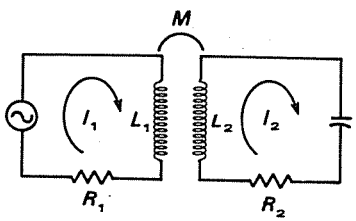
$$\mathbf{L}I_1=\left(a_4\frac{d^4}{dt^4}+a_3\frac{d^3}{dt^3}+a_2\frac{d^2}{dt^2}+a_1\frac{d}{dt}+a_0\right)I_1=f(t) \tag{3}$$

Uma equação análoga (mas não igual) pode ser obtida para I_2.

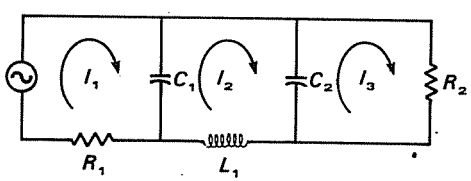
Em geral, para um circuito com n malhas, o sistema de equações diferenciais para as correntes pode ser desacoplado em n equações, lineares de coeficientes constantes, de ordem $2n$, cada uma para uma corrente.

EXERCÍCIO

1. Obtenha os sistemas de equações para as correntes nos circuitos dados nas figuras (a) e (b) e em seguida obtenha a equação desacoplada para cada corrente.



(a)



(b)

Modelo 4 DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA DE TEMPERATURA EM UMA BARRA NÃO HOMOGÊNEA

Suponha que dispomos de uma barra que consideraremos unidimensional, dado que seu comprimento é muito maior do que a área da sua seção. A questão é, dadas as propriedades térmicas da barra, obter a distribuição de temperatura interna para um estado estacionário, isto é, que não varia com o tempo.

Supondo que a quantidade de calor interna na barra seja constante com o tempo (uma vez que a distribuição de temperatura $T(x)$ depende apenas de x), haverá um balanço entre a energia térmica (calor) que entra e sai pelas extremidades e a energia produzida (ou perdida) internamente. (Pela passagem de uma corrente elétrica, por exemplo, ou pelo resfriamento ao longo da barra). O fluxo de calor através de uma seção transversal em x (isto é, a quantidade de calor que passa da esquerda para a direita através da seção x por unidade de tempo) será suposto proporcional ao gradiente de temperatura no ponto, $\frac{dT}{dx}(x)$, o que corresponde à Lei de Newton-Fourier. O fator de proporcionalidade, chamado coeficiente de condutividade térmica, será dado pelo número positivo $K(x)$ que depende da constituição do material e da área da seção e pode, portanto, variar com x.

Desta forma, a quantidade de calor por unidade de tempo que *sai* da barra $[x_0, x_1]$ através da extremidade x_0 é $K(x_0)\frac{dT}{dx}(x_0)$, e através de x_1 é $-K(x_1)\frac{dT}{dx}(x_1)$.

Observe que, se $\frac{dT}{dx}(x_0) > 0$, então a temperatura à direita de x_0 será maior do que à esquerda e, portanto, o fluxo de calor se dá no sentido exterior à barra, ou seja, o calor que *sai* é positivo, daí a razão dos sinais. Verifique o argumento em x_1. Suponha agora que a produção interna de calor por unidade de comprimento e de tempo seja dada pela função $f(x)$ (chamada densidade de fonte). Isto significa que a produção de calor por unidade de tempo na barra $[x_0, x_1]$ é dada por

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \quad \text{(Produção negativa significa calor retirado.)}$$

Como a quantidade de calor contido entre x_0 e x_1 não se modifica, o fluxo para o exterior deve ser igual à taxa de produção interna, isto é,

$$-K(x_1)\frac{dT}{dx}(x_1) + K(x_0)\frac{dT}{dx}(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

ou, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$-\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(K(z)\frac{dT}{dx}(z)\right)dz = \int_{x_0}^{x_1} f(x)$$

Como este argumento vale para quaisquer pontos x_0 e x_1 da barra, então devemos ter (supondo as funções continuamente diferenciáveis duas vezes)

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dT}{dx}(x)\right] = -f(x) \tag{1}$$

para todo x.

Observe que esta é uma equação diferencial para $T(x)$ e a operação efetuada em $T(x)$

$$\mathbf{L}T(x) = \frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{d}{dx}\right)T$$

é *linear*.

Para caracterizar a distribuição de temperatura devemos impor as condições de fronteira como, por exemplo, temperaturas constantes nas extremidades

$$T(0) = T_0 \qquad \text{e} \qquad T(L) = T_1$$

Assim, o nosso problema é obter uma função $T(x)$ que satisfaz

$$\begin{cases} \mathbf{L}T(x) = -f(x) \\ T(0) = T_0 \\ T(L) = T_1 \end{cases} \tag{2}$$

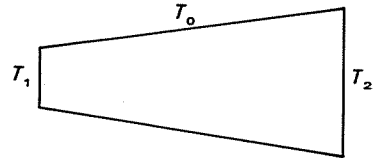
onde $K(x), f(x)$, T_0 e T_1 são dados do problema.

Este problema é chamado um problema de fronteira para a Equação diferencial (1).

Uma *outra* condição que poderia ser imposta nas extremidades seria a especificação de um fluxo constante, $K(0)T'(0) = A$.

EXERCÍCIOS

1. Considere uma barra cônica como na figura, em estado térmico estacionário, homogênea (condutividade e calor específico constantes), resfriada por uma corrente líquida de temperatura T_0 ao longo do comprimento e com temperaturas constantes T_1 e T_2 nas duas faces. Observe que *não* está dito que a parede da barra está à temperatura T_0, na verdade há um salto entre $T(x)$ e T_0 que dará origem a um fluxo (Lei de Fourier) $K(T_0 - T(x))$ ao longo da barra para o exterior. Obtenha a equação para $T(x)$.



2. Considere agora o estado térmico estacionário de um cilindro em que a variação de temperatura se dá no sentido radial sendo uniforme na superfície dos cilindros coaxiais. Com argumentos análogos aos utilizados no Modelo 4 obtenha a equação para $T(r)$. Observe que neste caso o coeficiente k depende de r por intermédio da área.
3. Repita o mesmo procedimento do exercício anterior considerando uma esfera.

Modelo 5 DISTRIBUIÇÃO DE PARTÍCULAS

O problema de distribuição de calor em uma barra é semelhante, do ponto de vista matemático e de interpretação, a diversos problemas que envolvem o estado estacionário (não variando com o tempo) de processos de difusão de partículas, substâncias, bactérias, difusão probabilística e percolação*.

A equação geral de difusão estacionária descreve um estado de equilíbrio na densidade de distribuição da propriedade ou substância estudada e tem a forma

$$\frac{d}{dx}\left(D(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x) \tag{1}$$

onde $D(x)$ é o coeficiente de difusão, $f(x)$ é a intensidade das fontes e $q(x)$ é o coeficiente de absorção ou de reatividade. O operador diferencial

$$\mathbf{L}u=\left[\frac{d}{dx}\left(D(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)\right]u \tag{2}$$

é chamado de *operador de difusão*.

O processo dinâmico de difusão que envolve a variável tempo será estudado no Capítulo 6, referente às equações com derivadas parciais.

Observe que o operador $\mathbf{L}$ é linear.

As condições que normalmente são acrescentadas à equação de difusão estacionária $\mathbf{L}u=f$ na formulação de um problema específico são as chamadas *condições laterais*. Uma vez que o problema físico modelado é estacionário, as condições iniciais não têm sentido.

As condições laterais informam sobre o tipo de interação que o sistema estudado tem com o meio ambiente, o que é essencial para a caracterização de uma situação específica.

O termo $q(x)u$ ou λu representa uma fonte (ou sumidouro) da propriedade estudada, que depende da sua densidade. Vimos situação semelhante no problema de decaimento radioativo, em que a fonte é proporcional à densidade da substância. Em reações químicas onde, em geral, há um processo de difusão, o surgimento ou desaparecimento de uma substância devido à sua participação em uma das reações também pode ser representado

* Para maiores detalhes, ver LIN, C.C. & Segel, L.A. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. New York, Macmillan, 1974.

por uma fonte proporcional à sua densidade. Neste caso, $q(x)$ é o coeficiente de reatividade. Em alguns problemas esta reatividade pode depender exponencialmente da densidade (Lei de Arrhenius), o que resulta em uma equação *não* linear.

Em problemas de percolação, isto é, movimento de líquidos em meios porosos, o coeficiente $q(x)$ representa a absorção.

No estudo da dinâmica populacional de bactérias o coeficiente $q(x)$ pode representar a fertilidade da espécie. Voltaremos a discutir isso no Capítulo 7.

Modelo 6 PROPAGAÇÃO DE ONDAS MONOCROMÁTICAS EM UM MEIO UNIDIMENSIONAL

Analisemos o problema de propagação de uma vibração longitudinal ao longo de uma barra perfeitamente elástica, de secção considerada estreita com relação ao seu comprimento. Iremos supor que em cada secção da barra o processo seja uniforme, o que nos leva a construir um modelo unidimensional. Utilizaremos os argumentos de Euler para obter a equação da amplitude de uma vibração monocromática, isto é, de uma dada freqüência (ver Figura 3.8).

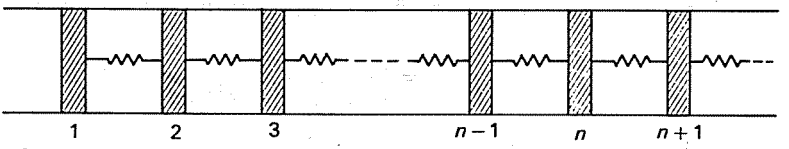
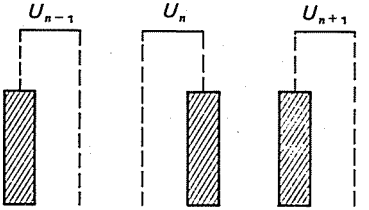


Figura 3.8

Tal como no processo limite para a construção da integral, Euler repartiu a barra em pequenos segmentos de comprimento Δ e supôs que cada um interagisse com os seus vizinhos laterais por meio da Lei de Hooke para força elástica. Assim, se o n-ésimo segmento



deslocou-se de sua posição inicial de U_n (positivo se à direita, negativo se à esquerda) a força elástica exercida pelo segmento $n+1$ sobre o n-ésimo será dada por

$$+K\frac{U_{n+1}-U_n}{\Delta}$$

onde K é o coeficiente elástico (que será suposto constante) e Δ a separação inicial entre as fatias, tomada uniforme.

A força de interação do segmento $n-1$ sobre o segmento n, será dada por

$$-K\frac{U_n - U_{n-1}}{\Delta} \quad \text{(Verifique os sinais!)}$$

Se ρ_n é a densidade da barra e A sua seção temos, pela Segunda Lei de Newton:

$$\rho_n A\Delta \frac{d^2U_n}{dt^2} = K\frac{U_{n+1} - 2\,U_n + U_{n-1}}{\Delta} \tag{1}$$

uma vez que $\rho_n A\Delta$ é a massa da fatia.

Analisando agora apenas a propagação de uma onda de freqüência $\omega/2\pi$ faremos a suposição que a dependência de U_n com relação ao tempo seja dada na forma

$$U_n = v_n\,(\text{sen}\,\omega t + \theta)$$

onde v_n não depende de t.*

Logo, $\dfrac{d^2U_n}{dt^2} = -v_n\omega^2$ e, substituindo na Equação (1), vem

$$-\omega^2\rho_n A v_n = K\left(\frac{\dfrac{U_{n+1} - U_n}{\Delta} - \dfrac{U_n - U_{n-1}}{\Delta}}{\Delta}\right)$$

Utilizando agora um argumento análogo à passagem do limite para a definição de integral, escrevemos esta equação para repartições cada vez menores da barra e verificamos, formalmente, que o lado direito da equação se aproxima de

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta} \to \frac{dU}{dx} \qquad \text{e} \qquad \frac{U_n - U_{n-1}}{\Delta} \to \frac{dU}{dx}$$

e, portanto, é razoável supor, com Euler, que a amplitude de uma onda de freqüência $\omega/2\pi$ através da barra possa ser modelada pela equação

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\rho(x)A}{K}\omega^2 v = 0$$

ou seja

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \omega^2 r(x)v = 0 \tag{2}$$

onde o operador diferencial $\mathbf{L} = \dfrac{d^2}{dx^2} + \omega^2 r(x)$ é linear e de segunda ordem.

A equação obtida é chamada equação reduzida da onda, ou de Helmholz, para o caso unidimensional, e se constitui no modelo mais importante e utilizado no estudo de propagação de ondas das mais variadas naturezas.

---

* As funções $U_n(t)$ satisfazem um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas. Veremos no próximo capítulo que a forma $U_n(t) = v_n$ sen $(\omega t + \theta)$ não é tão restrita quanto parece; a solução geral é uma combinação linear de um número finito destas.

No último capítulo estudaremos a formulação do problema de propagação de ondas gerais.

Observe que a equação reduzida da onda

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \omega^2 r(x)v = 0$$

não envolve a variável do tempo e, portanto, do ponto de vista físico, os problemas a ela relacionados não são em geral problemas de Cauchy.

Suponha, por exemplo, que a barra esteja engastada em suportes para $x = 0$ e $x = L$ (ver Figura 3.9a). Isto implicará que o deslocamento $v(x)$ será nulo nas extremidades, isto é:

$$v(0) = v(L) = 0 \tag{3}$$

Por outro lado, suponha que a extremidade $x = L$ esteja livre, o que vale dizer, sem receber nenhuma força sobre a face terminal. Isto implicará

$$K(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=L} = 0 \qquad \text{ou seja} \qquad \frac{dv}{dx}(L) = 0 \tag{4}$$

Se a extremidade estiver ligada a uma mola de coeficiente elástico α (ver Figura 3.9b) devemos impor a condição

$$K(x)\frac{dv}{dx} + \alpha v\bigg|_{x=L} = 0 \qquad \text{e} \qquad v(0) = 0 \tag{5}$$

(a) Barra engastada nas extremidades

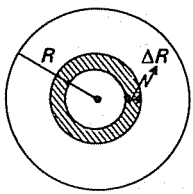
(b) Barra engastada somente numa extremidade

Figura 3.9

Desta forma, verificamos que as condições a serem acrescentadas à Equação diferencial (3) podem ser bastante variadas e provêm da interpretação dada ao modelo matemático sugerido pelo problema físico.

EXERCÍCIOS

1. Obtenha a equação para o caso em que o coeficiente K depende de x.
2. A vibração monocromática radial de uma esfera (a Terra, por exemplo!) pode ser modelada por um argumento análogo onde os segmentos são "cascas esféricas" de espessura ΔR (ver figura abaixo).



Obtenha uma equação para a amplitude de vibração de freqüência $\frac{2\pi}{\omega}$ para uma esfera elástica uniforme observando que:

a. as massas das cascas variam com R, mesmo para repartição uniforme do raio e
b. a força elástica entre as cascas depende proporcionalmente da área. (A lei de Hooke se refere à proporcionalidade entre a tensão — força por unidade de área — e a deformação!) Repita a análise para a vibração radial de um cilindro. Referências: RAYLEIGH, L. *The Theory of Sound.* New York, Dover, 1975, 2v.

3.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES — PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO

3.3.1 Introdução

O objetivo desta secção é estudar propriedades gerais das soluções das equações diferenciais ordinárias lineares que decorrem essencialmente da linearidade da operação diferencial.

Com isto formularemos os problemas, de tal maneira que os conceitos e técnicas de Álgebra Linear sejam imediatamente aplicáveis, contribuindo para a simplicidade da teoria e dos métodos.

A não utilização desta formulação implicaria necessariamente em um desenvolvimento da mesma Álgebra Linear, ainda que de uma maneira disfarçada em Equações Diferenciais. Assim, perderíamos uma excelente oportunidade de verificar a importância da Álgebra Linear e mais, estaríamos duplicando o nosso trabalho, isto é, estaríamos caminhando na direção da fragmentação da Matemática, e não da sua essência, que é a síntese de idéias.

Estudaremos, portanto, operações do tipo

$$\mathbf{L}u = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}u + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u + \ldots + a_0(x)u$$

e denotaremos a operação efetuada em u por $\mathbf{L} = \sum_{n=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$ ou, para simplificar a notação, utilizaremos o símbolo D para representar $\frac{d}{dx}$ e escreveremos

$$D^k = \frac{d^k}{dx^k};\ \mathbf{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k$$

A função $a_n(x)$ obviamente não pode ser nula no intervalo de interesse e, neste caso, diremos que o operador diferencial linear $\mathbf{L}$ é de ordem n. Os zeros de $a_n(x)$ serão denominados pontos singulares do operador diferencial.

As funções coeficientes $a_k(x)$ serão supostas contínuas e de valores reais, a menos que outra hipótese seja explicitada.

Neste caso, a operação $\mathbf{L}$ poderá ser aplicada a funções definidas em um intervalo (a, b), com n derivadas contínuas e valores reais, e o resultado $\mathbf{L}u$ será, portanto, uma função contínua.

No contexto da Álgebra Linear, $\mathbf{L}$ será então um operador linear definido no espaço vetorial real de funções $C^n[(a, b), \mathbb{R}] = \{\text{funções definidas em } (a, b) \text{ com valores em } \mathbb{R} \text{ e } n \text{ derivadas contínuas}\}$, pois $\mathbf{L}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda \mathbf{L}u_1 + \mathbf{L}u_2$ para todas funções u_1 e u_2 e λ real, como é fácil verificar.

Consideraremos inicialmente equações do tipo $\mathbf{L}u = f$ para f contínua. Equações para f não contínuas serão estudadas na Secção 3.4.7.

A equação $\mathbf{L}u = 0$ é chamada homogênea, e o conjunto de soluções desta equação é o núcleo de $\mathbf{L}$, também denotado em Álgebra Linear por $N(\mathbf{L})$ ou $Ker(\mathbf{L})$ (do inglês "kernel", que significa núcleo) que é um subespaço vetorial de $C^n[(a, b), \mathbb{R}]$.

Qual é o $N(D)$, $N(D^2)$, $N(D^k)$, $N(D-1)$?

Observamos agora que se v_1 e v_2 são soluções de $\mathbf{L}v = f$ (isto é, $\mathbf{L}v_1 = f$, $\mathbf{L}v_2 = f$), então $v_1 - v_2 = u$ é solução de $\mathbf{L}u = 0$, uma observação simples, mas de importância decisiva para o que se segue.

A partir daí concluímos que, dispondo da solução geral da equação homogênea $\mathbf{L}u = 0$, (isto é, se conhecemos $N(\mathbf{L})$), então para obter a solução geral de *qualquer* equação não homogênea $\mathbf{L}v = f$, basta obter *uma* solução v_0, $\mathbf{L}v_0 = f$ e todas as demais serão da forma $v = v_0 + u$.

Com base no que foi observado acima, a resolução completa do operador $\mathbf{L}$ será realizada de acordo com o seguinte programa: primeiro, obter todas as soluções de $\mathbf{L}u = 0$; e segundo, obter *uma* solução para a equação $\mathbf{L}v = f$, para cada f contínua.

Portanto, para resolvermos completamente o operador $\mathbf{L}$ a questão inicial é a obtenção de seu núcleo.

Esta tarefa, como já vimos, é imediata para operadores do tipo D^k e veremos adiante como realizá-la completamente no caso de coeficientes constantes. No caso geral, de coeficientes variáveis, a situação é muito mais complicada, mas ainda assim podemos dispor de algumas técnicas eficazes para casos especiais importantes como o método de expansão em séries de potências de Euler e Frobenius.

A segunda etapa do programa utiliza a linearidade da operação $\mathbf{L}$ sob um ponto de vista que é usualmente denominado de "Princípio de Superposição", baseado na seguinte observação: se $v_1, \ldots, v_n$ são soluções das equações $\mathbf{L}v_k = f_k$, então a solução de $\mathbf{L}v = f$ para qualquer combinação linear $f = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$ será dada pela superposição (combinação linear) correspondente das v_k, $v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$. Isto significa que poderemos aumentar consideravelmente o número de problemas resolvidos através de superposições. Todavia, o alcance e a força real deste argumento só poderão ser apreciados com a generalização do conceito de superposição para somas infinitas (séries) e contínuas (integrais). Por exemplo, dadas as soluções v_k das equações $\mathbf{L}v = x^k$, com k inteiro, $k \geqslant 0$, a solução de $\mathbf{L}v = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$ poderá ser *formalmente* escrita como $v = \sum_{k \geq 0} c_k v_k$. Isto abrange a ampla classe de funções f que podem ser escritas como série de potências.

Da mesma forma, se $\mathbf{L}v = f(x, \alpha)$ tem uma solução $v(x, \alpha)$ disponível para todo α em um intervalo (c, d), então $\mathbf{L}v = F(x)$, para $F(x) = \int_c^d f(x, \alpha)c(\alpha)d\alpha$, tem solução formal $v(x) = \int_c^d v(x, \alpha)c(\alpha)dz$ que é uma superposição contínua de soluções.

O método de Fourier baseia-se nos casos onde $f_k(x) = \operatorname{sen} kx$ ou $\cos kx$ e a solução é dada na forma de séries de Fourier

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k + b_k w_k \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{L}v_k = \operatorname{sen} kx \\ \mathbf{L}\omega_k = \cos kx \end{pmatrix}$$

para $f(x) = \Sigma\, a_k \operatorname{sen} kx + b_k \cos kx$.

No caso em que $f(x, \alpha) = \operatorname{sen} x\alpha$ ou $f(x, \alpha) = \cos x\alpha$, a solução é dada na forma de integrais de Fourier, para $(c, d) = (-\infty, +\infty)$.

O método de transformadas integrais (Fourier-Laplace etc.) e o método de Green baseiam-se exatamente nestas observações para diferentes classes de $f(x, \alpha)$.

A teoria envolvendo estes métodos é vastíssima e, tradicionalmente, está reservada às disciplinas denominadas "Métodos de Matemática Aplicada". Trataremos da transformada de Laplace e do método de Green apenas introdutoriamente.

É importante observar que a segunda etapa deste programa (isto é, os métodos para a obtenção de uma solução de $\mathbf{L}v = f$) depende essencialmente da primeira, como veremos nas Secções 3.4.7, 3.6.2, 4.3. Por isto, considera-se que o problema fundamental na resolução completa de $\mathbf{L}v = f$ é o cálculo de $N(\mathbf{L})$.

Uma vez delineado o programa a ser cumprido com respeito à "resolução geral" do operador $\mathbf{L}$, é necessário abordar agora os problemas que os modelos sugerem quando se acrescentam condições a estas equações diferenciais: problema de Cauchy e problemas de valores laterais.

Estas condições adicionais são também equações sobre as funções incógnitas (embora de outro tipo) e que caracterizam determinadas soluções dentre a solução geral de $\mathbf{L}v = f$.

Na maioria dos casos estudados, e em todos os que trataremos, essas condições envolvem também operações lineares.

Vejamos o problema de Cauchy:

Equação diferencial $\quad \mathbf{L}v = f$

Condições iniciais
$$\begin{cases} v(x_0) = v_0 \\ \dfrac{dv}{dx}(x_0) = v_1 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{d^n v}{dx^n}(x_0) = v_{n-1} \end{cases}$$

Se considerarmos as condições iniciais como um vetor $\alpha = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ e definirmos $\mathbf{I}_{x_0} v = (v(x_0), v'(x_0), \ldots, v^{(n-1)}(x_0))$, estas condições podem ser escritas como $\mathbf{I}_{x_0} v = \alpha$ e o problema de Cauchy como:

$$\begin{cases} \mathbf{L}v = f \\ \mathbf{I}_{x_0} v = \alpha \end{cases}$$

É fácil ver que a operação $\mathbf{I}$ é linear e leva funções de C^n em vetores do $\mathbb{R}^n$ (verifique!).

No caso de problemas com condições laterais, como no Modelo 4, temos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k \dfrac{d}{dx} T\right) = -f \\ T(0) = T_0 \\ T(\mathbf{L}) = T_1 \end{cases}$$

Definindo $\mathbf{B}T = (T(0), T(\mathbf{L}))$ podemos reescrever o problema como

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f \\ \mathbf{B}T = \beta \end{cases}$$

onde $\mathbf{L}$ e $\mathbf{B}$ são lineares, f e β são dados, $\beta \in \mathbb{R}^2$.

EXERCÍCIOS

1. Sejam v_1 a solução de $\begin{cases} \mathbf{L}v = f \\ \mathbf{I}_{x_0} v = 0 \end{cases}$ e v_2 a solução de $\begin{cases} \mathbf{L}v = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} v = \alpha \end{cases}$. Mostre que $v_1 + v_2$ é a solução de $\begin{cases} \mathbf{L}v = f \\ \mathbf{I}_{x_0} v = \alpha \end{cases}$. O mesmo vale para $\mathbf{B}$?
2. Se v_k for solução de $\begin{cases} \mathbf{L}v = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} v = \vec{e_k} \end{cases}$ onde $\vec{e_1} = (1, 0, \ldots, 0) \ldots \vec{e_n} = (0, 0, \ldots, 1)$ mostre que uma solução de $\begin{cases} \mathbf{L}v = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} v = \alpha \end{cases}$ é dada por $v = \Sigma \alpha_k v_k$.
3. Mostre que a operação $\mathbf{B}_{x_0}$: $N(\mathbf{L}) \to \mathbb{R}^n$ é linear e que:
   a. se o problema $\begin{cases} \mathbf{L}u = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} u = \alpha \end{cases}$ tem solução para todo α, então $\mathbf{B}_{x_0}$ é sobrejetora.
   b. se o problema $\begin{cases} \mathbf{L}u = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} u = \alpha \end{cases}$ tem solução e é única para todo α, então $\mathbf{B}_{x_0}$ é isomorfismo e dim $N(\mathbf{L}) = N$.

3.3.2 O Espaço de Soluções da Equação Homogênea

O objetivo desta secção não é desenvolver métodos de resolução para a equação homogênea, mas obter alguns resultados gerais sobre o conjunto de suas soluções.

Já tivemos a oportunidade de observar que estas soluções constituem um subespaço vetorial de $C^n[(a, b), \mathbb{R}]$ e, neste caso, o procedimento natural e prático para descrevê-las é através de uma base deste subespaço. Desta forma precisamos calcular

apenas um certo número reduzido de soluções da equação homogênea e as outras serão obtidas por meio de combinações lineares destas.

Os resultados principais desta secção estão ligados a argumentos de Álgebra Linear, começando pela demonstração de que $N(\mathbf{L})$ tem dimensão finita, seguida pela caracterização de uma base deste espaço como soluções de problemas de Cauchy para a equação homogênea.

Fixado $x_0 \in (a, b)$, podemos associar a cada $h \in N(\mathbf{L})$ as suas condições iniciais através da operação

$$\mathbf{I}_{x_0} : N(\mathbf{L}) \to \mathbb{R}^n$$
$$h \mapsto (h(x_0), h'(x_0), \ldots, h^{(n-1)}(x_0)) = \alpha$$

que, como pode ser facilmente verificado, é uma operação linear entre dois espaços vetoriais.

A descrição de $N(\mathbf{L})$ será efetuada por meio desta associação e, para que isto possa ser feito sem ambigüidade, é necessário que para cada $\alpha \in \mathbb{R}^n$ exista uma, e somente uma, solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{L}h = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} h = \alpha \end{cases}$$

A questão compreende essencialmente duas partes distintas:

a. existência de pelo menos uma solução para cada problema;
b. unicidade de solução.

A resposta completa para esta questão é fornecida pelo teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias lineares, devido ao matemático francês Augustin Louis de Cauchy (1789-1857), que enunciaremos a seguir.

Teorema de Existência e Unicidade de Solução do Problema de Cauchy para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Seja $\mathbf{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ o operador linear com coeficientes contínuos em (a, b) e $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então, para cada $x_0 \in (a, b)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $f(x)$ contínua em (a, b) *existe uma única* solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{L}h = f(x) \\ \mathbf{I}_{x_0} h = \alpha \end{cases}$$

no espaço $C^n[(a, b), \mathbb{R}]$.

Observações:

a. O teorema nos fornece mais do que o necessário no momento, pois para o estudo de $N(\mathbf{L})$ basta considerar $f \equiv 0$.

b. As demonstrações de existência de soluções para operadores gerais utilizam-se de métodos que não são "práticos" devido à própria generalidade do teorema. Uma destas demonstrações será apresentada

na Secção 4.4. Alguns métodos "práticos" para a resolução analítica de certos tipos específicos de equações serão desenvolvidos nas próximas secções deste capítulo.

Do ponto de vista da Álgebra Linear, a existência de soluções para todo problema de Cauchy significa que a operação linear

$$\mathbf{I}_{x_0} : N(\mathbf{L}) \to \mathbb{R}^n$$

é sobrejetora.

c. A questão de *unicidade* pode ser tratada independentemente e de forma mais simples, razão pela qual apresentaremos uma demonstração deste fato mais adiante. Por enquanto, observamos que a unicidade de solução significa que $\mathbf{I}_{x_0}$ é injetora.

Em resumo, o teorema de existência e unicidade é equivalente à afirmação de que $\mathbf{I}_{x_0}$ é um *isomorfismo linear* entre $N(\mathbf{L})$ e $\mathbb{R}^n$.

Reuniremos as informações que nos interessam no teorema a seguir.

Teorema Seja $\mathbf{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ um operador definido em $C^n[(a, b), \mathbb{R}]$ satisfazendo a *propriedade de existência e unicidade de soluções* para todo problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} u = \alpha \end{cases}$$

Se $\{e_k\}_{1 \le k \le n}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então as soluções de

$$\begin{cases} \mathbf{L}h_k = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} h_k = e_k \end{cases}$$

formam uma base para $N(\mathbf{L})$.

Em particular temos que $\dim N(\mathbf{L}) = n$.

Demonstração:

Basta mostrar que todo $u \in N(\mathbf{L})$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\{h_k\}$ e de maneira única.

Calculando $\mathbf{I}_{x_0} u = \beta$, escrevemos $\beta = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k$ e tomando $h = \sum_{k=1}^{n} \beta_k h_k$ verificamos que, pela linearidade de $\mathbf{L}$ e I_x, h é solução de

$$\begin{cases} \mathbf{L}h = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} h = \beta \end{cases}$$

tal como u.

Devido à unicidade de soluções do problema de Cauchy devemos ter $u = h$, o que conclui o teorema.

O Teorema 2 deixa claro que para se obter a solução geral da equação homogênea de um operador de ordem n, é suficiente que qualquer método de resolução forneça n soluções linearmente independentes.

Para finalizar esta seção, discutiremos a questão da unicidade do primeiro teorema.

Observe que basta provar a unicidade da solução nula $h \equiv 0$ do problema de Cauchy homogêneo

$$\begin{cases} \mathbf{L}h = 0 \\ \mathbf{I}_{x_0} h = 0 \end{cases}$$

Neste caso, se u_1 e u_2 forem soluções do problema

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f \\ \mathbf{I}_{x_0} u = \alpha \end{cases}$$

então, $h = u_1 - u_2$ será solução do problema homogêneo e, portanto, $h \equiv 0$, o que implica em $u_1 \equiv u_2$.

A demonstração da unicidade da solução nula para o problema de Cauchy homogêneo que utilizaremos segue a argumentação motivada pelo *princípio de conservação de energia* do oscilador harmônico homogêneo

$$Lx = m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

cuja energia mecânica é dada pela expressão

$$E(x, \dot{x}) = E_x(t) = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2)$$

A variação da *energia de uma solução* da equação do oscilador homogêneo (sem influência externa) é dada por

$$\frac{dE_x}{dt} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -c\dot{x}^2 \leqslant 0$$

que, do ponto de vista físico representa a dissipação de energia mecânica em calor causada pela viscosidade.

Duas características básicas da função E nos são importantes:

1. $E(x(t), \dot{x}(t))$ é não crescente com t, se $x(t)$ é solução de equação homogênea, e

2. E é positiva definida, isto é, $E(x, \dot{x}) \geqslant 0$ e $E(x, \dot{x}) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $\dot{x} = 0$.

Com estas propriedades podemos concluir que, se $E_x(t_0) = 0$, então $E_x(t) = 0$ para todo t e, portanto, $x(t) \equiv 0$. Isto significa que a solução do oscilador homogêneo com condições iniciais nulas $E(x(0), \dot{x}(0)) = 0$ só poderá ser $x(t) \equiv 0$.

A demonstração, no caso geral, da unicidade de solução para o problema de Cauchy homogêneo segue argumentação análoga ao caso do oscilador visto acima. A função "energia" de uma solução $h(x)$ neste caso será dada pela função definida positiva

$$E(h, h', \ldots, h^{n-1}) = E_h(x) = [h(x)]^2 + [h'(x)]^2 + \ldots + [h^{(n-1)}(x)]^2$$

Derivando esta expressão, temos

$$\frac{dE_h}{dx} = \sum_{j=0}^{n-1} 2\, h^{(j)} h^{(j+1)}$$

Substituindo $h^{(n)}(x)$ no último termo da soma anterior pela equação diferencial (uma vez que $a_n(x) \neq 0$), temos a expressão

$$\frac{dE}{dx} = \sum_{\substack{0 \leq j < n \\ 0 \leq k < n}} c_{jk}(x) h^{(j)}(x) h^{(k)}(x)$$

de onde tiramos

$$\frac{dE}{dx} \leqslant \sum_{\substack{0 \leq j < n \\ 0 \leq k < n}} |\, c_{jk}(x)\,| \;\; |\, h^{(j)}(x)\,| \;\; |\, h^{(k)}(x)\,|$$

Utilizando agora repetidamente a desigualdade $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, podemos escrever

$$\frac{dE}{dx} \leqslant \sum_{0 \leq k < n} b_k(x)\,[h^{(k)}(x)]^2 \qquad \text{com} \qquad b_k(x) \geqslant 0$$

Tomando $c(x) = \max\limits_{0 \leq k < n} \{b_k(x)\} \geqslant 0$, temos finalmente

$$\frac{dE}{dx} \leqslant c(x)E \qquad \text{ou} \qquad \frac{dE}{dx} - cE \leqslant 0$$

Lembrando-se agora do método de resolução de equações lineares de primeira ordem por fator integrante, vem (fazendo $C'(x) = c(x)$)

$$e^{-C(x)} \frac{dE}{dx} - ce^{-C(x)} E \leqslant 0, \text{ isto é, } \frac{d}{dx}(e^{-C(x)} E) \leqslant 0$$

Portanto, a função $\psi_h(x) = e^{-C(x)} E_h$ é não decrescente e, como $\psi(x) \geqslant 0$ para todo x vem que, se $\psi(x_0) = 0$, então $\psi(x) \equiv 0$. Logo, $E(x) \equiv 0$ pois a exponencial é sempre não nula. Portanto, $h(x) \equiv 0$, o que conclui nossa demonstração.

Observação:

O argumento acima *não* nos leva a concluir que $E_h(x)$ seja não crescente (no oscilador harmônico com viscosidade negativa teríamos

$$\frac{dE_x}{dt} = (-c)\dot{x}^2 \geqslant 0).$$

Entretanto, a função

$$\psi_h(x) = \psi(h, h', \ldots, h^{(n-1)}) = e^{-C(x)} E(h, h', \ldots, h^{(n-1)})$$

é tão boa quanto E para o desenvolvimento do argumento.

EXERCÍCIOS

1. Verifique com cuidado a demonstração de unicidade para uma equação de segunda ordem e coeficientes variáveis.

2. Mostre que para uma equação diferencial linear em que os coeficientes são definidos para $x \geqslant 0$ e limitados por uma constante $|a_k(x)| \leqslant M$, a "energia" de uma solução da equação homogênea cresce no máximo como uma função exponencial ce^{mx}, c e m constantes positivas.
3. Obtenha analogamente uma estimativa para o crescimento da energia de um oscilador harmônico com influência externa $f(t)$.

3.3.3 Equações Diferenciais para Funções de Variáveis Reais e Valores Complexos

Os modelos matemáticos descritos por equações diferenciais ordinárias usualmente se referem apenas às soluções que são funções de variável real e valores reais. Entretanto, do ponto de vista matemático, tanto da teoria quanto dos métodos, é muito mais simples estudar o conjunto de soluções que admite funções de variável real com valores complexos e considerar o operador diferencial $\mathbf{L}$ com coeficientes complexos. Esta afirmação, embora possa parecer paradoxal, não deve surpreender aqueles que já tiveram a oportunidade de substituir as desagradáveis manipulações trigonométricas (reais) pelas propriedades claras e simples da exponencial (complexa) $e^{i\omega} = \cos \omega + i \operatorname{sen} \omega$.

Os sentidos *não* matemáticos de termos como "real", "imaginário", "complexo" etc. não devem influenciar o julgamento do leitor.

O objetivo desta secção não é fazer abstrações ou generalizações levianas da teoria, mas simplificá-la na forma e nos métodos.

As propriedades básicas dos números complexos que serão utilizadas a seguir podem ser encontradas em bons textos de Cálculo, Geometria Analítica ou Álgebra Linear, e devem ser verificadas cuidadosamente pelos leitores que não as consideram triviais.

Iniciaremos pela definição do conjunto

$$C^k[(a, b), \mathbb{C}] = \bar{C}^k$$

das funções u definidas no intervalo (a, b) com valores no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos; $u = u_1 + iu_2$, com u_1, $u_2 \in C^k[(a, b), \mathbb{R}]$.

$\bar{C}^k$ é um espaço vetorial com *escalares complexos*, considerando as operações usuais de funções.

Observe que $C^k[(a, b), \mathbb{R}] = C^k$ também é um espaço vetorial *com escalares reais*, e por este motivo, apesar de ser um subconjunto de $\bar{C}^k$, *não é um subespaço vetorial* de $\bar{C}^k$.

O teorema de unicidade de soluções para o problema de Cauchy, no caso complexo, pode ser demonstrado exatamente como no caso real, donde concluímos que $\bar{N}(\mathbf{L})$ = espaço vetorial das funções $h \in C^n[(a, b), \mathbb{C}]$, complexas, soluções de $\mathbf{L}h = 0$, tem dimensão finita $\leqslant n$. (Verifique!)

Como o conjunto $N(\mathbf{L})$ (real) está contido no conjunto $\bar{N}(\mathbf{L})$ (complexo) é evidente que qualquer solução real poderá ser obtida como combinação linear de uma base de $\bar{N}(\mathbf{L})$ (ainda que com coeficientes complexos).

Por outro lado se $h_1 \ldots h_n$ formam uma base do espaço vetorial $N(\mathbf{L})$ (real), então também formarão uma base de $\bar{N}(\mathbf{L})$ (complexo).

Verifique este fato.

Em resumo, o "trabalho" para se calcular $N(\mathbf{L})$ é o mesmo que para $\overline{N}(\mathbf{L})$.

Por exemplo, as funções complexas e^{ix}, e^{-ix} formam uma base para o núcleo de $\mathbf{L}=\dfrac{d^2}{dx^2}+1$ em $C^2[\mathbb{R},\mathbb{C}]$. As soluções reais $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ podem ser escritas como combinações lineares de e^{ix}, e^{-ix}

$$\cos x=\frac{1}{2}e^{ix}+\frac{1}{2}e^{-ix}$$

$$\operatorname{sen} x=-\frac{i}{2}e^{ix}+\frac{i}{2}e^{-ix}$$

Por outro lado, $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ é uma base de $N(\mathbf{L})$ e não é difícil mostrar que também é uma base de $\overline{N}(\mathbf{L})$.

Utilizaremos a seguir apenas a notação $N(\mathbf{L})$ que, a menos de aviso explícito, representará o espaço de soluções da equação homogênea em $C[(a, b), \mathbb{C}]$, isto é, complexas.

3.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

3.4.1 Introdução

As equações do tipo $\mathbf{L}u=f$, onde $\mathbf{L}=\sum_{k=0}^{N} a_k D^k$, sendo a_k reais ou complexos, $a_N\neq 0$ e f função complexa contínua, são importantes no estudo de diversos problemas, notadamente de vibrações mecânicas, oscilações elétricas, vibrações moleculares etc. Além disto, elas representam uma classe de equações que pode ser resolvida explicitamente, e por este motivo constituem uma espécie de padrão de comparação para o desenvolvimento da teoria.

Um estudo sério de equações diferenciais deve sempre começar pela boa compreensão da teoria e métodos das equações lineares de coeficientes constantes. Analisaremos nesta secção operadores diferenciais do tipo acima, definidos no espaço vetorial das funções com variável real e valores complexos e com N derivadas contínuas. Como os coeficientes são funções constantes definidas em toda a reta, procuraremos as soluções definidas também em toda a reta real; em $C^N[\mathbb{R},\mathbb{C}]$.

3.4.2 Álgebra dos Operadores Diferenciais Lineares de Coeficientes Constantes

A manipulação de operadores diferenciais $\mathbf{L}=\sum_{k\geq 0}^{N} a_k D^k$ tem muita semelhança com a álgebra de polinômios e, como esta álgebra é bem conhecida, nada mais natural

do que tirar proveito deste fato. O primeiro a se utilizar disto foi O. Heaviside (1850-1925), engenheiro por profissão e físico matemático autodidata (o que certamente deve ter influído na audácia de suas contribuições à Física Matemática, destacando-se entre elas a análise vetorial e o cálculo operacional). Ambas as teorias foram apresentadas, sem muita preocupação com o rigor matemático, em sua obra *Electromagnetic Theory*, editada em três volumes (1893-1899-1912), como métodos para o estudo da Teoria de Maxwell e receberam logo uma forte repulsa da comunidade matemática. Como mais um exemplo de que as aplicações sugerem à Matemática os seus rumos mais profícuos, estas duas teorias forçaram entrada na cultura matemática, produzindo uma vasta influência no seu desenvolvimento moderno.

A Álgebra Operacional, que consiste na manipulação dos operadores diferenciais, será utilizada neste livro apenas em sua parte mais elementar.

Observemos inicialmente que a cada polinômio $P(\lambda)=\sum_{k\geq 0}^{N} a_k\lambda^k$ podemos associar um operador diferencial que denotaremos por $P(D)=\sum_{k\geq 0}^{N} a_k D^k$, substituindo λ por D e vice-versa. Tomaremos isto como definição do operador diferencial $P(D)=\mathbf{L}$ para cada polinômio $P(\lambda)$.

Agora, se $P(\lambda)+Q(\lambda)=R(\lambda)$, é fácil verificar que o operador diferencial $R(D)$ (construído do polinômio $R(\lambda)$ pela definição acima) é idêntico à soma dos operadores $P(D)+Q(D)$. Portanto, a operação de soma destes operadores diferenciais pode ser substituída pela correspondente soma de polinômios e vice-versa.

O mesmo se dá com relação à multiplicação de um polinômio (operador) por um escalar. Observemos agora que o produto de dois polinômios $P(\lambda)Q(\lambda)=M(\lambda)$ corresponde à composição dos respectivos operadores diferenciais, isto é, $M(D)u=P(D)=(Q(D)u)$. Demonstre este fato, partindo do cálculo algébrico de $M(\lambda)$ e da definição de $M(D)$, e mostrando que este operador é equivalente à aplicação sucessiva de $Q(D)$ e $P(D)$. Além disto, observe também que a composição destes operadores não depende da ordem $P(D)(Q(D)u)=Q(D)(P(D)u)$.

A título de exemplos faça algumas "experiências" com polinômios $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ de sua escolha.

Assim, manipulações que envolvem soma e composição de operadores diferenciais podem ser feitas por meio da Álgebra Polinomial de somas e produtos.

Se α_j são as raízes de $P(\lambda)$ com multiplicidade k_j, então

$$P(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)^{k_1}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\alpha_m)^{k_m}$$

pelo Teorema Fundamental da Álgebra e, portanto,

$$P(D)=(D-\alpha_1)^{k_1}\ldots(D-\alpha_m)^{k_m}$$

EXEMPLO 1

A equação do oscilador harmônico tem por operador diferencial $P(D)=mD^2+cD+k$

$$P(\lambda)=m\lambda^2+c\lambda+k$$

Como as raízes de $P(\lambda)=0$ são $\alpha_{1,2}=\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-4km}}{2m}$.

$$P(\lambda)=m(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$$

e, portanto,

$$P(D)=m(D-\alpha_1)\,(D-\alpha_2)$$

EXEMPLO 2

Se $P(\lambda)=\lambda^2-1=(\lambda-1)\,(\lambda+1)$

então

$$P(D)=D^2-1=(D-1)\,(D+1)$$

e

$$P(D)u=\frac{d^2u}{dx^2}-u=(D-1)\left(\frac{du}{dx}+u\right)=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}-\frac{du}{dx}-u=\frac{d^2u}{dx^2}-u$$

Como se vê, não há nenhum segredo nesta Álgebra Operacional, bastando encarar D como uma variável.

EXEMPLO 3

Tomemos o circuito elétrico do Modelo 3 que nos dá o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} LD^2I_1+\dfrac{1}{C}I_1-\dfrac{1}{C}I_2=DV \\ LD^2I_2+RDI_2+\dfrac{1}{C}I_2-\dfrac{1}{C}I_1=0 \end{cases}$$

que podemos escrever

$$\begin{cases} \left(LD^2+\dfrac{1}{C}\right)I_1-\dfrac{1}{C}I_2=DV \\ -\dfrac{1}{C}I_1+\left(LD^2+RD+\dfrac{1}{C}\right)I_2=0 \end{cases} \tag{1}$$

Para obtermos equações desacopladas para I_1 e I_2, basta analisar o sistema acima como um sistema de equações algébricas lineares em I_1 e I_2 com coeficientes que podem somar e multiplicar.

Multiplicando a primeira equação de (1) por $\dfrac{1}{C}$ e a segunda por $\left(LD^2+\dfrac{1}{C}\right)$ e somando membro a membro as equações do sistema, obtemos

$$-\frac{1}{C^2}I_2+\left(LD^2+\frac{1}{C}\right)\left(LD^2+RD+\frac{1}{C}\right)I_2=\frac{DV}{C}$$

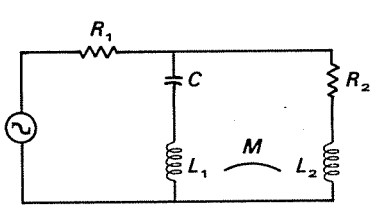
ou

$$\left(LD^4+LRD^3+\frac{R}{C}D\right)I_2=\frac{DV}{C} \tag{2}$$

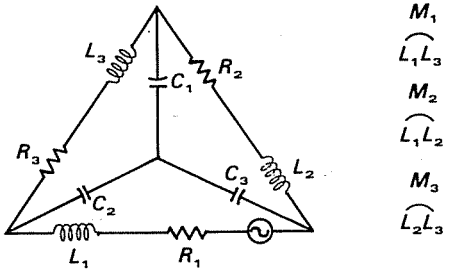
É obviamente muito mais fácil manipular as equações desta forma do que com a derivação $\dfrac{d}{dx}$ usual!

EXERCÍCIO

1. Utilizando a notação operacional, obtenha as equações desacopladas para os seguintes circuitos:



(a)



(b)

3.4.3 Solução Completa da Equação Homogênea Lu = 0 — Método Operacional

$$\mathbf{L} = \sum_{k \geq 0}^{N} a_k D^k = P(D),\ a_k \text{ reais},\ a_N \neq 0$$

Para construirmos uma base de $N(\mathbf{L})$ em $C^N(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ basta obtermos N soluções linearmente independentes, já que demonstramos ser $\dim N(\mathbf{L}) = N$.

Faremos a construção por etapas bem definidas, podendo servir de roteiro para a resolução da equação homogênea.

1. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra (existência de raízes para polinômios), podemos escrever (suponha $a_N = 1$)

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_m)^{k_m}$$

onde α_j são raízes distintas do polinômio e k_j as suas multiplicidades. Podemos então fatorar o operador $P(D)$ na forma

$$P(D) = (D - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (D - \alpha_m)^{k_m}$$

Observe que a ordem dos fatores na decomposição de $P(\lambda)$ pode ser qualquer uma e, portanto, o mesmo vale para a decomposição de $P(D)$. Ainda,

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = N$$

Este teorema básico da álgebra dos polinômios nos fornece, assim, um método importante para o estudo do operador $P(D)$, representando-o de uma forma simplificada, como composição de operadores de primeira ordem.

2. Se z é solução para $(D - \alpha_j)^{k_j} z = 0$, para algum j, então $P(D)z = 0$. Isto se verifica pela observação anterior sobre a ordem dos fatores na decomposição.

3. Se β é um número complexo $\beta = a + ib$, então

$$P(D)\ (e^{\beta x} f(x)) = e^{\beta x} P(D + \beta) f(x)$$

Verificação: a afirmação é válida para $P(D) = D$:

$$D(e^{\beta x} f(x)) = \beta e^{\beta x} f + e^{\beta x} Df = e^{\beta x}(D + \beta) f$$

Mostre que vale para qualquer potência de D e, portanto, para $P(D)$.

4. Obtenção das soluções de $(D - \alpha)^k z = 0$.

Observe que

$$(D - \alpha)^k e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x}(D - \alpha + \alpha)^k f(x) = e^{\alpha x} D^k f(x)$$

Portanto, se

$$f(x) = x^p,\ 0 \leqslant p < k,\ (D - \alpha)^k (e^{\alpha x} f) = 0$$

Desta forma, $(D - \alpha)^k z = 0$ tem k soluções linearmente independentes

$$e^{\alpha x},\ x\, e^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{k-1}\, e^{\alpha x}$$

e como $N(D - \alpha)^k$ tem dimensão k, estas funções formam uma base.

5. Da etapa **2** concluímos que as soluções de $(D - \alpha_j)^{k_j} z = 0$ obtidas acima dão um total de $\Sigma\, k_j = N$ soluções linearmente independentes de $P(D)z = 0$.

Logo, $\{e^{\alpha_j x}\, x^p\}$ formam uma base para $N(\mathbf{L})$

$$0 \leqslant p < k_j$$
$$0 \leqslant j \leqslant m$$

6. Então, toda solução real de $P(D)u = 0$ pode ser escrita como combinação linear, *com coeficientes complexos*, da base $\{e^{\alpha_j x} x^p\}$ de $N(\mathbf{L})$. Observe que se $\alpha = a + ib$ é raiz de $P(\lambda)$, então $\bar{\alpha} = a - ib$ também é raiz de $P(\lambda)$ e ambas aparecem com a mesma multiplicidade na decomposição de $P(D)$.

Assim,

$$x^p e^{ax} \cos bx = \frac{1}{2} x^p\, e^{\alpha x} + \frac{1}{2} x^p e^{\bar{\alpha} x}$$

e

$$x^p e^{ax} \operatorname{sen} bx = \frac{1}{2i} x^p\, e^{\alpha x} - \frac{1}{2i} x^p e^{\bar{\alpha} x}$$

também pertencem a $N(\mathbf{L})$ e são reais.

7. Conclusão:

a. Cada raiz real α de multiplicidade k dá origem a k soluções reais linearmente independentes

$$e^{\alpha x},\ x\, e^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{k-1}\, e^{\alpha x}$$

b. A raiz complexa $\alpha = a + ib\,(b \neq 0)$ e sua conjugada $\bar{\alpha} = a - ib$, de multiplicidade k, dão origem a $2k$ soluções reais linearmente independentes

$$x^p e^{ax} \cos bx, \quad 0 \leqslant p \leqslant k - 1$$
$$x^p e^{ax} \operatorname{sen} bx, \quad 0 \leqslant p \leqslant k - 1$$

Fica, assim, completamente resolvido o problema de obtenção do conjunto de soluções para $\mathbf{L}u = 0$, reais e complexas.

Sabendo-se que as soluções de $\mathbf{L}u = 0$ (reais) podem ser obtidas da base $\{x^p\, e^{\alpha jx}\}$ de $N(\mathbf{L})$ por combinações lineares com coeficientes complexos, evitaremos o uso das expressões trigonométricas e trabalharemos com estas soluções exponenciais complexas para maior simplicidade técnica.

Por este motivo, estudaremos as equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes reais, sempre no espaço vetorial das funções de variável real com valores complexos e com escalares complexos.

EXEMPLO 4

Se $P(\lambda) = (\lambda^2 + 2)\,(\lambda - 1)\lambda^2\,(\lambda^2 + 1)^3$, grau $P = 11$, calcule $N(P(D))$.

Solução: Decomposição de $P(\lambda) = (\lambda + i\sqrt{2})\,(\lambda - i\sqrt{2})\,(\lambda - 1)\lambda^2\,(\lambda + i)^3\,(\lambda - i)^3$

$$P(D) = (D + i\sqrt{2})\,(D - i\sqrt{2})\,(D - 1)D^2\,(D + i)^3\,(D - i)^3$$

As soluções de $(D - \alpha)^k z = 0$ são da forma $\{e^{\alpha x}\, x^p\}_{0 \le p \le k}$, logo,

$(D + i\sqrt{2}) \to e^{-i\sqrt{2}x}$
$(D - i\sqrt{2}) \to e^{+i\sqrt{2}x}$
$(D - 1) \to e^x$
$D^2 \to 1, x$
$(D + i)^3 \to e^{-ix}, xe^{-ix}, x^2e^{-ix}$
$(D - i)^3 \to e^{ix}, xe^{ix}, x^2e^{ix}$

Base para $N(P(D)) = \{e^{-i\sqrt{2}x}, e^{i\sqrt{2}x}, e^x, 1, x, e^{-ix}, xe^{-ix}, x^2e^{-ix}, e^{ix}, xe^{ix}, x^2e^{ix}\}$

Base para $N(P(D)) = \{\cos\sqrt{2}x, \operatorname{sen}\sqrt{2}x, e^x, 1, x, \cos x, \operatorname{sen} x, x\cos x, x\operatorname{sen} x, x^2\cos x, x^2\operatorname{sen} x\}$ ■

Observe que neste exemplo o polinômio $P(\lambda)$ já foi fornecido com a sua decomposição. Se tivéssemos que calcular todas as raízes de um polinômio de grau 11, poderíamos estar diante de um problema de grande dificuldade técnica.

Portanto, este método resolve completamente o problema, desde que as raízes do *polinômio característico* de $\mathbf{L} = P(D)$ (como é chamado $P(\lambda)$) sejam conhecidas. Como este livro não se propõe a tratar do cálculo de raízes de polinômios, consideramos que a questão do cálculo de $N(P(D))$ está resolvida!

Algumas informações sobre a equação, que dependem apenas de dados parciais sobre as raízes dos polinômios (como a estabilidade, que pode ser decidida sabendo-se apenas o sinal da parte real das raízes), serão tratadas mais adiante, e daremos alguns métodos para a obtenção destes dados, sem a necessidade de decomposição de polinômios.

Observação:

O cálculo operacional pode na verdade resolver completamente o problema geral $P(D)u = f$ para equações lineares de coeficientes constantes através de uma integral iterada, análoga à fórmula que resolve $D^N u = f$.

Apesar desta resolução ser explícita e fornecer algumas informações úteis sobre características gerais da solução, ela todavia não favorece a análise de diversos aspectos importantes para o estudo de problemas ligados a estas equações.

O estudo de problemas especiais para equações lineares de coeficientes constantes e o desenvolvimento de métodos específicos para a sua análise é de grande interesse para a introdução de uma série de

conceitos e idéias básicas da Matemática (Aplicada ou não), tais como Análise de Fourier, Funções de Green e de Dirac, Princípio de Superposição em Geral etc. Esta é a razão pela qual daremos mais importância ao estudo destes problemas do que ao método geral de resolução que passaremos a discutir.

Considere inicialmente a equação $(D-\alpha)u=f$ e observe que se for possível "inverter" o operador $(D-\alpha)$ então poderemos facilmente "inverter" $P(D)=(D-\alpha_1)\ldots(D-\alpha_N)$ e é exatamente este o procedimento a ser seguido.

Para invertermos o operador $D-\alpha$ devemos resolver a equação $(D-\alpha)u=f$, isto é, obter u dada f. Como esta solução não é única, para que uma operação inversa seja bem definida é necessário que tenhamos um critério para caracterizar uma solução particular para cada f.

Calculemos antes a solução geral da equação por meio dos seguintes passos (que devem ser verificados pelo leitor):

$$(D-\alpha)u(x)=f(x) \Leftrightarrow (D-\alpha)e^{\alpha x}e^{-\alpha x}u(x)=f(x) \Leftrightarrow e^{\alpha x}D(e^{-\alpha x}u(x))=f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D(e^{-\alpha x}u(x))=e^{-\alpha x}f(x) \Leftrightarrow e^{-\alpha x}u(x)=C+\int_{x_0}^{x} e^{-\alpha s}f(s)\,ds \Leftrightarrow$$

$$\boxed{u(x)=C\,e^{-\alpha x}+\int_{x_0}^{x} e^{-\alpha(x-s)}f(s)\,ds}$$

Observe que a operação efetuada sobre a função f para o cálculo de u depende da constante arbitrária C e, portanto, nos dá uma família de inversas de $(D-\alpha)$.

Observe também que o termo $Ce^{\alpha x}$ é exatamente a solução da equação homogênea e como esta parte da solução pode ser obtida diretamente pelo método apresentado nesta secção, o nosso interesse se concentrará no termo integral que representa uma solução particular. Consideraremos, portanto, a seguinte operação inversa de $(D-\alpha)$

$$\boxed{E_\alpha f(x)=\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-s)}f(s)\,ds}$$

Daí, é claro que uma inversa de

$$P(D)=(D-\alpha_1)\ldots(D-\alpha_N)$$

pode ser dada pela seguinte composição

$$(E_{\alpha_N}E_{\alpha_{N-1}}\ldots E_{\alpha_1}f)$$

que é uma iteração de N integrais e pode ser escrita na forma

$$\int_{x_0}^{x} e^{\alpha_N(x-x_N)}\int_{x_0}^{x_N} e^{\alpha_{N-1}(x_N-x_{N-1})}\ldots\int_{x_0}^{x_2} e^{\alpha_1(x_2-x_1)}f(x_1)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N$$

Uma observação importante que decorre da fórmula de inversão acima é que a equação $P(D)u=f$ tem suas soluções com $K+N$ derivadas se f tem K derivadas, pois cada operação E_α é uma integral.

EXERCÍCIOS

1. Obtenha o espaço de soluções de $\mathbf{L}u=0$ para os operadores diferenciais $P(D)=\mathbf{L}$ cujos polinômios característicos $P(\lambda)$ são:
   - *a.* $P(\lambda)=\lambda^2+2b\lambda+c$ (analise os diversos casos)
   - *b.* $P(\lambda)=\lambda^4+16$
   - *c.* $P(\lambda)=5\,(\lambda^2+2\lambda+2)\,(\lambda^4+16)\,\lambda^3$
   - *d.* $P(\lambda)=2\lambda^3+1$

2. Resolva os seguintes problemas de Cauchy para os operadores acima:

   a. $P(D)z = 0 \qquad I_0 z = (2, 0)$
   b. $P(D)z = 0 \qquad I_0 z = (i, 0, -i, 0)$
   c. $P(D)z = 0 \qquad I_0 z = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
   d. $P(D)z = 0 \qquad I_0 z = (0, -1, 2)$

3. Obtenha pelo método operacional a solução geral do oscilador harmônico nos casos:

   a. $f \equiv 0$
   b. $f(t) = e^{\omega t}$

3.4.4 Resolução Completa de Equações Não Homogêneas do Tipo $P(D)z = q(x)e^{\alpha x}$

3.4.4.1 *Introdução*

Uma vez resolvida completamente a equação homogênea $P(D)z = 0$, o objetivo agora é desenvolver métodos para a obtenção de soluções particulares de equações não homogêneas $P(D)z = f$.

Para isto, faremos uso do princípio de superposição de forma decisiva, isto é, calcularemos soluções para equações $P(D)z = f$ com f em uma classe de funções que, por superposição, possa gerar um espaço de funções o mais abrangente possível.

A escolha desta classe de funções é influenciada por dois objetivos conflitantes. Se por um lado elas devem ser suficientemente simples para que permitam soluções simples, por outro devem gerar um espaço que contenha todas as funções de interesse. Este conflito é contornado, de certa maneira, pela generalização do princípio de superposição, admitindo não apenas somas finitas, mas somas infinitas (séries) e somas contínuas (integrais).

Com isto teremos à nossa disposição alguns teoremas e técnicas dentre os mais importantes e eficazes da análise matemática, que dizem respeito à representação de funções "em geral" por meio de superposições de funções simples: Teorema de Taylor (séries de potências) e os Teoremas de Fourier (séries e integrais de Fourier).

Observação:

Faremos uma rápida apresentação destes teoremas, mais como argumentos sobre a eficácia do método do que realmente como técnicas para a resolução de equações, o que pertence tradicionalmente a cursos de métodos de Matemática Aplicada ou de Análise Matemática.

As funções mais simples de que dispomos são as potências de x, $\{x^k\}_{k \in N}$, mas que por superposição finita geram apenas o espaço dos polinômios. Se admitimos agora somas infinitas, podemos representar toda a classe das funções analíticas (funções com derivadas de toda ordem e cuja série de Taylor converge para ela) por série de potências

$$f(x) = \sum_{k \geq 0}^{\infty} C_k x^k$$

ou, se o intervalo não contém a origem, por

$$f(x) = \sum_{k \geq 0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k$$

Entretanto, ainda teríamos uma classe enorme de funções que nos interessam e não se enquadram nesta representação. Podemos então apelar para o Teorema de Weierstrass que diz: "Toda função contínua em um intervalo fechado pode ser aproximada uniformemente por polinômios, isto é, dada uma tolerância de erro $\varepsilon > 0$ podemos obter um polinômio $P_\varepsilon(x)$, tal que $|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para todo x no intervalo".

Com isto, se soubermos resolver $P(D)z = x^k$, conseguiremos resolver $P(D)z = P_\varepsilon(x)$ e é razoável supor que esta solução seja uma aproximação daquela de $P(D)z = f(x)$. Este fato é ainda mais importante quando lembramos que em muitas aplicações a influência externa $f(x)$ não é conhecida analiticamente, mas apenas por um gráfico aproximado ou pelo seu valor medido experimentalmente em um número obviamente finito de pontos. Nestes casos, uma atitude a ser tomada é substituir $f(x)$ por um polinômio que carregue todas as informações disponíveis sobre a função, como os polinômios de interpolação, por exemplo. Portanto, fica clara a importância de desenvolvermos um método através do qual sejam solucionadas as equações do tipo $P(D)z = x^k$, para todo k inteiro $\geqslant 0$.

O outro método fundamental na representação de funções "gerais" por meio de funções simples está fortemente ligado ao nome de J. Fourier (1768-1830) e ao seu famoso livro *Theorie Analytique de la Chaleur*, 1822. Neste trabalho, o princípio de superposição foi utilizado sistematicamente pela primeira vez no estudo de equações diferenciais. O aperfeiçoamento das idéias e dos métodos de Fourier foi uma das grandes fontes de desenvolvimento da Análise Matemática e da Física Matemática até a época atual.

No seu estudo, Fourier foi levado a sugerir que as funções em geral poderiam ser representadas por superposições de oscilações harmônicas de variadas freqüências. Por exemplo, no caso de uma função definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ ou de uma função 2π-periódica na reta (nada de substancial sobre este intervalo, só uma questão de tradição), teríamos

$$f(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k,\ \text{inteiro}}}^{\infty} C_k e^{ikx}$$

Como Fourier não especificou exatamente as condições sobre $f(x)$ para garantir a convergência da série, o seu trabalho foi fortemente criticado pela Academia de Ciências de Paris, que inicialmente rejeitou a sua publicação*.

Existem vários teoremas que relacionam o comportamento da função $f(x)$ com o tipo de convergência da série: quanto mais diferenciabilidade tiver a função f, mais rápida se dará a convergência. Se $f(x)$ tiver derivada contínua em todo o intervalo, com exceção, no máximo, de um número finito de descontinuidades de salto da função, então a série de Fourier converge uniformemente nos intervalos fechados de continuidades**.

Por outro lado, se $f(x)$ for definida em toda a reta, com derivada contínua exceto por um número finito de descontinuidades e "decrescendo rapidamente" para zero no infinito, então podemos representá-la por superposição contínua das oscilações harmônicas

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \qquad \text{Integral de Fourier***}$$

Estas representações de $f(x)$ são também chamadas de decomposição espectral, numa alusão às freqüências $\frac{2\pi}{\lambda}$ que participam da superposição e do peso relativo $\rho(\lambda)d\lambda$ de cada uma. Verificamos assim a importância da obtenção de soluções para as equações não homogêneas do tipo

$$P(D)z = e^{i\lambda x}$$

sendo λ um número real.

---

* É interessante notar que, apesar do enorme volume de estudos sobre o assunto, somente na década de 1960 é que as condições exatas de convergência foram obtidas.

** Veja COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965. 1v.

*** Veja COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2v.

Com estas soluções z_λ podemos então gerar soluções para equações mais gerais, por meio do método de superposição de Fourier.

De qualquer forma, mesmo se não tivéssemos estas motivações "a priori" para considerar o princípio de superposição com funções polinomiais ou exponenciais, teríamos que tentar a sua utilização, pois as equações $P(D)z = q(x)e^{\alpha x}$, sendo $q(x)$ um polinômio, são equações lineares em espaço de dimensão finita e, portanto, solúveis por métodos da Álgebra Linear de matrizes, já que $P(D): Q_n(\alpha) \to Q_n(\alpha)$, onde $Q_n(\alpha)$ é o espaço dos quase polinômios de expoente α.

Veremos mais adiante como este princípio de superposição pode ser generalizado, de tal forma a resolver basicamente todas as equações $P(D)z = f$, utilizando apenas a Álgebra de Polinômios. (Por exemplo, a função de Heaviside na Secção 3.4.7.1 e o método de Duhamel em 3.4.7.2, ou a função de Dirac e o método de Green em 3.4.8.)

3.4.4.2 *Solução de* P(D)z = $e^{\alpha x}$

A resolução destes problemas é razoavelmente simples e será apresentada por etapas que devem ser verificadas pelo leitor.

1. $P(D)e^{\alpha x} = P(\alpha)e^{\alpha x}$. Verifique este fato simples e importante, começando por D e D^k.

2. Se $P(\alpha) \neq 0$, então é óbvio que uma solução particular de $P(D)z = e^{\alpha x}$ pode ser dada como $z_0 = \dfrac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}$.

3. Suponha agora que $P(\alpha) = 0$. Se α for uma raiz de ordem k de $P(\lambda)$, poderemos escrever $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k Q(\lambda)$, onde $Q(\alpha) \neq 0$. (Verifique este fato da Álgebra de Polinômios ou por desenvolvimento de Taylor.)

Como $P(D)$ preserva os quase polinômios $Q_n(\alpha)$, é natural que busquemos a solução como um deles $q(x)e^{\alpha x} = z_0$, bastando obter o polinômio $q(x)$.

$$P(D)(e^{\alpha x}q(x)) = Q(D)\,(D-\alpha)^k e^{\alpha x}q(x) = Q(D)e^{\alpha x}D^k q$$

Fazendo $D^k q = \text{constante}$, como $Q(D)e^{\alpha x} = Q(\alpha)e^{\alpha x}[Q(\alpha) \neq 0]$, podemos tomar $q(x) = x^k$ e, acertando os coeficientes, $z_0 = \dfrac{x^k e^{\alpha x}}{k!Q(\alpha)}$.

Observe que

$$Q(\alpha) = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k P}{d\lambda^k}\,(\alpha) = \frac{1}{k!}\,P^{(k)}(\alpha)$$

e, portanto, podemos escrever

$$z_0 = \frac{x^k e^{\alpha x}}{P^{(k)}(\alpha)}$$

Desta forma, temos soluções explícitas para qualquer equação não homogênea do tipo $P(D)Z = e^{\alpha x}$ ou $P(D)z = f$, onde f é uma combinação linear de funções do tipo $e^{\alpha x}$.

EXEMPLO 5

Consideremos pelo método acima a equação

$$P(D)z = e^x, \ (\alpha = 1), \quad \text{com} \quad P(\lambda) = (\lambda^2 + 2)(\lambda - 1)\lambda^2(\lambda^2 + 1)^3.$$

Como $\alpha = 1$ é raiz de $P(\lambda)$ fazemos a decomposição

$$P(D) = Q(D)(D - 1), \ Q(D) = (D^2 + 2)D^2(D^2 + 1)^3$$

de onde concluímos imediatamente que

$$z_0(x) = \frac{xe^x}{Q(1)} = \frac{xe^x}{24} \text{ é uma solução.}$$

Verifique este fato diretamente. ■

EXEMPLO 6

Com o mesmo operador do Exemplo 5, consideremos a equação

$$P(D)z = 1, \qquad (\alpha = 0).$$

Decompondo $P(D)$ temos

$$P(D) = (D^2 + 2)(D - 1)(D^2 + 1)^3 D^2 = Q_1(D)D^2$$

e, portanto,

$$z_1(x) = \frac{x^2}{2!Q_1(0)} = \frac{x^2}{2! \cdot 2} = \frac{x^2}{4}$$

é uma solução da equação. ■

EXEMPLO 7

Consideremos agora a equação $P(D)z = \cos 4x$ com $P(\lambda)$ do Exemplo 5.

Escrevendo $\cos 4x = \frac{1}{2}e^{i4x} + \frac{1}{2}e^{-i4x}$ e, tendo em vista o princípio de superposição, passamos a analisar as equações

$$P(D)z_1 = e^{i4x} \qquad \text{e} \qquad P(D)z_2 = e^{-i4x}.$$

Como $P(4i) \neq 0$ e $P(-4i) \neq 0$ obtemos imediatamente as soluções

$$z_1(x) = \frac{e^{i4x}}{P(4i)} \qquad \text{e} \qquad z_2(x) = \frac{e^{-i4x}}{P(-4i)}$$

Portanto, $z(x) = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2$ será uma solução da equação original. Mostre que $z(x)$ é função real. ■

EXEMPLO 8

Analisemos a equação $P(D)z = e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}x$ com $P(\lambda)$ do Exemplo 5.
Escrevendo

$$e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}x = \frac{e^{x(-1+i\sqrt{2})} - e^{x(-1-i\sqrt{2})}}{2i}$$

passamos a considerar as equações

$$P(D)z_1 = e^{x(-1+i\sqrt{2})} \qquad \text{e} \qquad P(D)z_2 = e^{x(-1-i\sqrt{2})}$$

Como $P(-1+i\sqrt{2}) \neq 0$ e $P(-1-i\sqrt{2}) \neq 0$ obtemos imediatamente duas soluções

$$z_1(x) = \frac{e^{x(-1+i\sqrt{2})}}{P(-1+i\sqrt{2})}$$

$$z_2(x) = \frac{e^{x(-1-i\sqrt{2})}}{P(-1-i\sqrt{2})}$$

Com isto, obtemos uma solução da equação $P(D)z = e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}x$ pelo princípio de superposição na forma

$$z(x) = \frac{1}{2i} z_1(x) - \frac{1}{2i} z_2(x).$$

EXEMPLO 9

Consideremos o mesmo $P(\lambda)$ do Exemplo 5 e $P(D)z = 3 \cos \sqrt{2}x$. Escrevemos

$$3 \cos \sqrt{2}x = 3\left(\frac{e^{i\sqrt{2}x} + e^{-i\sqrt{2}x}}{2}\right) = \frac{3}{2} e^{i\sqrt{2}x} + \frac{3}{2} e^{-i\sqrt{2}x}$$

Solução: Como $P(i\sqrt{2}) = 0$,

$$P(\lambda) = (\lambda - i\sqrt{2})(\lambda + i\sqrt{2})(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^3 \lambda^2$$

$$Q(D) = (D + i\sqrt{2})(D - 1)(D^2 + 1)^3 D^2$$

Então, uma solução de $P(D)z_1 = e^{i\sqrt{2}x}$ pode ser

$$z_1 = \frac{e^{i\sqrt{2}x}}{Q(i\sqrt{2})}$$

e uma solução de $P(D)z_2 = e^{-i\sqrt{2}x}$ pode ser tomada como

$$z_2 = \frac{xe^{-i\sqrt{2}x}}{Q(-i\sqrt{2})}$$

e podemos então tomar

$$z_0 = \frac{3}{2} \frac{xe^{-i\sqrt{2}}}{Q(-i\sqrt{2})} + \frac{3}{2} \frac{e^{i\sqrt{2}x}}{Q(i\sqrt{2})}$$

■

3.4.4.3 *Método de Quase Inversão*

A álgebra operacional que desenvolvemos até agora não se estende às operações de inversão de polinômios

$$R(\lambda) = \frac{1}{P(\lambda)}$$

uma vez que $R(\lambda)$ *não* é um polinômio (a menos que $P(\lambda)$ seja constante) e por isto não definimos um sentido para $R(D)$. Este fato impede que, nesta álgebra, possamos calcular o inverso de um operador $P(D)$ o que significaria resolver completamente as equações $P(D)z = f$. Entretanto, podemos calcular uma aproximação polinomial da recíproca de $P(\lambda)$ até qualquer ordem desejada, o que para vários propósitos se constitui numa aproximação suficiente de $R(\lambda)$.

Por exemplo, se $P(\lambda)=\lambda^3+2\lambda+1$ podemos calcular, pelo algoritmo de Euclides para a divisão de polinômios, o seguinte

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 1+2\lambda+\lambda^3 \\
\cline{2-2}
-1-2\lambda-\lambda^3 & 1-2\lambda+4\lambda^2 \\
\cline{1-1}
-2\lambda-\lambda^3 & \\
-2\lambda+4\lambda^2+2\lambda^4 & \\
\cline{1-1}
4\lambda^2-\lambda^3+2\lambda^4 & \\
-4\lambda^2-8\lambda^3-4\lambda^5 & \\
\cline{1-1}
-9\lambda^3+2\lambda^4-4\lambda^5 &
\end{array}
$$

onde $Q_2(\lambda)=4\lambda^2-2\lambda+1$ é a aproximação de segunda ordem para $R(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda^3+2\lambda+1}$, com resto $r_2(\lambda)=\lambda^3(-9+2\lambda-4\lambda^2)$ e que mantém a seguinte relação:

$$P(\lambda)\,Q_2(\lambda)=1+r_2(\lambda)$$

Em geral, dado um polinômio $P(\lambda)$ com $P(0)\neq 0$, para qualquer m (inteiro positivo) é possível calcular um polinômio $Q_m(\lambda)$ de grau m que representa a recíproca de $P(\lambda)$ até ordem m, isto é,

$$P(\lambda)Q_m(\lambda)=1+r_m(\lambda)$$

onde $r_m(\lambda)=\lambda^{m+1}S(\lambda)$, $S(\lambda)$ polinômio.

Esta seqüência de polinômios $\{Q_m(\lambda)\}_{m\geq 0}$ é única e recursiva (isto é, $Q_{m+1}(\lambda)=Q_m(\lambda)+a_{n+1}\lambda^{n+1}$) e podemos calculá-la algebricamente pelo algoritmo de Euclides.

Definimos $Q_m(\lambda)$ como o polinômio quase inverso de $P(\lambda)$ de ordem m.

Por analogia definimos $Q_m(D)$ *como o operador polinomial quase inverso de ordem m para* $P(D)$ e passaremos a analisar até que ponto $Q_m(D)$ pode substituir um inverso de $P(D)$ na álgebra operacional.

Podemos constatar facilmente que, no espaço das funções polinomiais de grau $<m$ o operador $Q_m(D)$ é um *inverso à direita* para $P(D)$ pois,

$$P(D)\,(Q_m(D)q(x))=(1+r_m(D))q(x)=q(x)+r_m(D)q(x)=q(x)$$

Esta observação é suficiente para concluirmos que a equação $P(D)z=q(x)$, onde $q(x)$ é polinômio de grau $\leqslant m$, tem uma solução dada por $z_0(x)=Q_m(D)\,q(x)$, o que basicamente se constitui no método da quase inversão.

Este método pode ser facilmente adaptado para equações do tipo $P(D)z=e^{\alpha x}q(x)$ através das seguintes etapas:

$$P(D)z=e^{\alpha x}q(x)\Leftrightarrow e^{-\alpha x}P(D)z=q(x)\Leftrightarrow P(D+\alpha)\,(e^{-\alpha x}z(x))=q(x)$$

Agora, se $P_1(\lambda)=P(\lambda+\alpha)$ e $P(\alpha)=P_1(0)\neq 0$, podemos calcular o polinômio quase inverso $Q_m(\lambda)$, ($m=$ grau $q(x)$), para $P_1(\lambda)=P(\lambda+\alpha)$ e daí $z_0(x)=e^{\alpha x}Q_m(D)\,q(x)$ é uma solução procurada.

Também no caso em que α for raiz de ordem k para $P(\lambda)$ com

$$P(\lambda)=(\lambda-\alpha)^k M(\lambda)\;M(\alpha)\neq 0$$

temos:

$$P(D)z(x) = e^{\alpha x}q(x) \Leftrightarrow M(D+\alpha)\,(D^k\,e^{-\alpha x}z(x)) = q(x)$$

Se agora $Q_m(\lambda)$ for quase inverso de ordem m para $M(\lambda+\alpha)$ calculamos $Q_m(D)q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$, e a solução da equação original será dada por

$$z_0(x) = e^{\alpha x}\left(\frac{a_0x^k}{k!} + \ldots + \frac{m!}{(m+k)!}\,a_mx^{m+k}\right)$$

O método de quase inversão pode ser utilizado também para a obtenção de soluções aproximadas para equações $P(D)z = f$ quando $f(x)$ tem derivadas contínuas de ordem $> m$ ou, quando $f(x)$ for analítica, isto é, representada por séries de Taylor. Nestes casos $Q_m(D)f(x)$ é "uma solução de $P(D)z = f$ até ordem m".

EXEMPLO 10

Calcule uma solução de $P(D)z = x^2 \operatorname{sen} x$ onde $P(\lambda) = (\lambda^2+1)^2$.

Solução: Observemos inicialmente que se $z_1(x)$ for solução de $P(D)z_1 = x^2\,e^{ix}$ então $z_2 = \bar{z}_1$ será solução de $P(D)z_2 = x^2\,e^{-ix}$ e, por superposição, $z_0(x) = \frac{1}{2i}(z_1(x) - z_2(x))$ será uma solução desejada.

Como $P(D)z = e^{ix}x^2$ pode ser modificada para

$$P(D+i)e^{-ix}z(x) = x^2 \quad \text{ou} \quad (D+2i)^2(D^2e^{-ix}z(x)) = x^2$$

utilizando o método de quase inversão para $(D+2i)^2u = x^2$ com $Q_2(D) = \frac{3}{16}D^2 - \frac{i}{4}D - \frac{1}{4}$ (quase-inverso de $(D+2i)^2$ de ordem 2), teremos $u(x) = Q_2(D)x^2 = \frac{3}{8} - \frac{i}{2}x - \frac{x^2}{4}$. Integrando duas vezes obtemos

$$z_1(x) = e^{ix}\left(\frac{-x^4}{48} - i\frac{x^3}{12} + 3\frac{x^2}{16}\right), \text{ de onde}$$

$$z_0(x) = \left(\frac{-x^4}{48} + \frac{3x^2}{16}\right)\operatorname{sen} x - \frac{x^3}{12}\cos x$$

EXEMPLO 11

Calcule a solução completa de

$$P(D)z = x^2 \operatorname{sen} x \text{ com } P(\lambda) = (\lambda^2+1)^2$$

Solução: Conhecemos já uma solução z_0 de $P(D)z_0 = x^2 \operatorname{sen} x$; portanto, a solução completa será da forma $z_0 + h$ onde h descreve o espaço de soluções de $P(D)h = 0$.

Procuramos soluções de $(D+i)^2z = 0$ na forma de quase polinômio de expoente i

$$(D+i)^2r(x)e^{-ix} = e^{-ix}D^2r(x) = 0$$

de onde tiramos

$$r(x) \in N(D^2)$$

Logo, uma base de $N(D+i)^2$ pode ser $\{e^{-ix}, xe^{-ix}\}$; analogamente, com $N(D-i)^2$ obtemos $\{e^{ix}, xe^{ix}\}$.

Como $\{e^{-ix}, xe^{-ix}, e^{ix}, xe^{ix}\}$ são linearmente independentes e estão em $N(P(D))$, que tem dimensão igual ao grau $P(\lambda)=4$, concluímos que formam uma base deste espaço. Portanto, a solução geral de $P(D)z=x^2 \operatorname{sen} x$ é dada por:

$$z=\left(\frac{3}{16}x^2-\frac{1}{48}x^4\right)\operatorname{sen} x-\frac{1}{12}x^3\cos x+C_1e^{-ix}+C_2xe^{-ix}+C_3e^{ix}+C_4xe^{ix}.$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que o operador E que transforma funções contínuas $f(x)$ em funções contínuas $Ef(x)=\int_x^x f(s)ds$ é um inverso *à direita* (não polinomial) para $P(D)=D$. O mesmo para E^k com relação a D^k. Argumente sobre a dificuldade para obter um inverso completo de $P(D)$ e sobre a suficiência de inversos *à direita* no que diz respeito a solução de equações.
2. Verifique as afirmações feitas nesta secção.
3. Supondo que a solução de $P(D)z=x^m e^{ax}$ seja dada na forma $z(x)=e^{ax}(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)$ obtenha um método para o cálculo dos *aj's* igualando coeficientes de mesma potência. (Considere separadamente os casos $P(\alpha)=0$ e $P(\alpha)\neq 0$).
4. Desenvolva o método de quase inversão para $P(D)=e^{ax}q(x)$ a partir do seguinte argumento: potências de $(D-\alpha)$ são os anuladores de $e^{ax}x^m$ e portanto o método para este caso deve se basear no desenvolvimento em potências de $\lambda-\alpha$.
5. Obtenha uma solução exata para

$$P(D)z=1+x\,e^{-x}-x^4\cos 2x$$

e aproximada até quarta ordem para

$$P(D)z=\frac{1}{1+x^2},\ \text{onde}\ P(\lambda)=\lambda(\lambda^2-1).$$

Utilizando a *fórmula de Taylor* para o resto, analise a solução aproximada, em particular, para $x\to\infty$.

6. Obtenha soluções completas para as equações não homogêneas:

a. $P(D)z=\sum_{k=0}^{m}C_k \operatorname{sen} kx$ com $P(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2+4)(\lambda-1)$.

b. $P(D)z=1$ com $P(\lambda)=\lambda^2(\lambda^2+1)^2(\lambda-1)$. Utilize este mesmo $P(\lambda)$ nos exercícios abaixo.

c. $P(D)z=\dfrac{x}{x^2+1}$, observando que $\int_0^\infty \cos\lambda e^{-x\lambda}d\lambda=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Sugestão: Calcule primeiro a solução particular para $P(D)z=e^{-x\lambda}$ que depende do parâmetro λ. Depois utilize formalmente o princípio de superposição na forma generalizada contínua.

d. $P(D)z=\dfrac{1}{x+a}$, observando que $\int_0^\infty e^{-a\lambda-\lambda x}d\lambda=\dfrac{1}{x+a}$.

e. Calcule $\int_0^\infty e^{-\lambda x}f(\lambda)=F(x)$ e obtenha a solução de $P(D)z=F(x)$ por superposição contínua de soluções de $P(D)z_\lambda=e^{-\lambda x}$, considerando

(*i*) $f(\lambda)=\operatorname{sen}\omega\lambda$
(*ii*) $f(\lambda)=\operatorname{sen} h\,\lambda$
(*iii*) $f(\lambda)=\cos h\,\lambda$
(*iv*) $f(\lambda)=\dfrac{e^{b\lambda}-e^{a\lambda}}{\lambda}$

3.4.5 Estabilidade em Equações Lineares com Coeficientes Constantes

3.4.5.1 *Introdução*

No começo deste capítulo afirmamos que as equações diferenciais lineares com coeficientes constantes tinham sua maior importância na descrição de oscilações (mecânicas, elétricas) de pequena amplitude, isto é, próximas a uma posição de equilíbrio. A equação do oscilador harmônico para uma vibração mecânica com a força restauradora elástica só é justificável se a deformação estiver dentro de uma faixa em que a Lei de Hooke seja válida. No caso do pêndulo, a amplitude das oscilações deve ser pequena, comparada ao comprimento do pendente, para que a aproximação linear tenha validade. Para as oscilações elétricas em um circuito RLC, variações muito grandes de voltagem podem romper o isolamento do capacitor e invalidar a relação linear entre carga armazenada e diferença de potencial.

Como regra geral, podemos afirmar que as equações diferenciais lineares, e particularmente as de coeficientes constantes, descrevem situações de "pequena amplitude" em que a linearidade é obtida ao preço de uma primeira aproximação (linear) de algumas relações funcionais. Verifique esta afirmação nos modelos apresentados na Secção 3.2.

Em todo modelo existem hipóteses restritivas ao tipo de situação estudada que, não raro, esquecidas após a sua formulação matemática, dão origem aos "paradoxos" que na verdade são interpretações inadequadas ou extrapolação injustificável da validade do modelo. Na definição ou apresentação de um modelo, se o problema matemático não for acompanhado das interpretações, tais como utilizadas na sua formulação, não se saberá exatamente o que ele representa e do que está se tratando; uma situação muito comum e que geralmente dá origem a intermináveis e enfadonhas controvérsias. Este fato é especialmente importante em situações modeladas por equações diferenciais, em que a variável independente tem um intervalo infinito de definição, digamos a reta real, e a validade do modelo deve ser verificada quando esta variável cresce indefinidamente.

Vejamos, por exemplo, o caso das oscilações mecânicas e elétricas que são descritas através da variável tempo ($t \geqslant 0$). Se uma determinada solução da equação atinge valores (absolutos) cada vez maiores para $t \to +\infty$, é razoável suspeitar que esta solução "escapará" da região de validade do modelo depois de um certo tempo. É óbvia, portanto, a importância do estudo no problema matemático das condições sob as quais este tipo de comportamento ocorre, e é isto que faremos nesta e na próxima secção.

Em equações diferenciais lineares com coeficientes constantes este fato ocorre exatamente por dois motivos distintos: em primeiro lugar, em virtude de influências externas, no fenômeno chamado de *ressonância* e ligado à solução de $P(D)z = e^{i\omega t}$, quando $i\omega$ é raiz de $P(\lambda)$ de ordem $k \geqslant 1$; $z_0(t) = \dfrac{t^k}{P^{(k)}(i\omega)} e^{i\omega t}$. É claro que neste caso $z_0(t)$ tem amplitudes $|z_0(t)| = \dfrac{t^k}{P^{(k)}(i\omega)}$ polinomialmente crescentes com o tempo e pode deixar de representar a situação estudada pelo modelo em tempo finito. Trataremos deste problema na Secção 3.4.6.2.

Em segundo lugar, por causa da própria constituição intrínseca do modelo matemático isto é, através da parte homogênea da solução que não depende da influência externa, apenas do operador $P(D)$ e das condições iniciais que a escolheram.

Observe que neste caso, ainda que a equação seja homogênea (sem influência externa), $P(D)z = 0$, o comportamento da solução $z(t)$ pode levar a amplitudes crescentes. Este fenômeno, chamado de instabilidade do sistema governado pela equação diferencial, será estudado nesta secção.

É interessante observar que estamos, de certa forma, tentando estudar em um modelo matemático as condições sob as quais ele perde a sua validade.

3.4.5.2 *Conceito de Estabilidade e Caracterização*

O nosso objetivo é estudar o comportamento das soluções da equação

$$P(D)z = 0 \text{ quando } t \to +\infty$$

o que equivale a dizer, estudar o comportamento dos elementos que formam uma base de $N(P(D))$.

Escolheremos para isto a base de $N(P(D))$ que o método de resolução nos fornece.

Lembremos que cada raiz α de ordem $k \geqslant 1$ para o polinômio $P(\lambda)$, dá origem aos elementos da base de $N(P(D))$: $\{t^m e^{\alpha t}\}_{0 \leq m \leq k}$ e estamos interessados em analisar o comportamento destas funções para $t \to +\infty$, o que será feito em termos das características da raiz $\alpha = a + ib$. Estas diferentes características de α podem ser estudadas separadamente:

1. Suponha que a parte real de α seja nula, isto é, $Re(\alpha) = a = 0$ então

a. Se $k = 1$, isto é, α é raiz simples de $P(\lambda)$, então a raiz fornece apenas um elemento para a base $\{e^{ibt}\}$ oscilatório e limitado

$$| e^{ibt} | = \cos^2 bt + \operatorname{sen}^2 bt = 1$$

b. Se $k > 1$, então teremos elementos da base do tipo:

$$\{t^m e^{ibt}\}_{m \geq 1} \quad \text{e} \quad | t^m e^{ibt} | = t^m \to \infty \text{ quando } t \to \infty$$

2. Suponha que $a = Re(\alpha) < 0$. Neste caso, para todos os elementos da base relacionados a α

$$| t^m e^{(a+ib)t} | = e^{at} t^m \to 0 \text{ quando } t \to \infty$$

e o decrescimento é exponencial, independentemente de m, isto é, da multiplicidade da raiz.

3. Se $a = Re(\alpha) > 0$, os elementos da base fornecidos por α, $\{t^m e^{(a+ib)t}\}$ crescem exponencialmente, independente da multiplicidade da raiz.

Observe que a exponencial $e^{\alpha t}$, quando $Re(\alpha) \neq 0$, domina o comportamento das funções $t^m e^{\alpha t}$ no infinito. Portanto, o resultado desta análise é conseqüência direta da localização no plano complexo (e multiplicidade) das raízes do polinômio $P(\lambda)$.

Neste estudo, o nosso objetivo é caracterizar qualitativamente as situações de instabilidade do sistema governado por $P(D)$.

Com base nos argumentos anteriores, daremos as seguintes definições:

Estabilidade Diremos que o operador diferencial $P(D)$ ou o polinômio $P(\lambda)$ é *estável* se todas as funções de $N(P(D))$ (isto é, todas as soluções da equação homogênea $P(D)z = 0$) forem limitadas quando $t \to \infty$.

Estabilidade Assintótica Diremos que o operador $P(D)$ ou o polinômio $P(\lambda)$ é *assintoticamente estável* (A-estável) se todas as funções de $N(P(D))$ se aproximarem de zero quando $t \to \infty$, ou seja, quando todas as raízes α de $P(\lambda)$ tiverem $Re(\alpha) < 0$.

Observação:

Um sistema pode ser governado por um operador diferencial $P(D)$, onde $P(\lambda)$ tem raízes α com $Re(\alpha) < 0$ e raízes β com $Re(\beta) > 0$. Neste caso, o comportamento de cada solução h, de $P(D)z = 0$, ($h \in N(P(D))$ depende dos elementos da base de $N(P(D))$ que a geram, isto é, h depende das condições iniciais. O subespaço de $N(P(D))$ gerado pelos elementos da base relacionados às raízes α, $Re(\alpha) < 0$, é o subespaço de soluções A-estáveis. O subespaço de $N(P(D))$ gerado pelos elementos relacionados às raízes α, simples e com $Re(\alpha) = 0$, é chamado subespaço de soluções oscilatórias. Desta maneira, $N(P(D))$ pode ser escrito como soma direta dos subespaços A-estável, oscilatório e instável.

Um sistema físico governado por um operador diferencial $P(D)$, cujas raízes α de $P(\lambda)$ são simples e tais que $Re(\alpha) = 0$ (oscilações mecânicas sem atrito, circuitos elétricos sem resistência ou perdas), é usualmente chamado conservativo, um termo relacionado ao princípio de conservação de energia.

Observe que, neste caso, se não houver intercâmbio de energia com uma fonte externa (isto é, se o sistema é governado pela equação homogênea $P(D)z = 0$), então o movimento livre será dado por:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{ib_k t} \qquad (Re(\alpha_k) = a_k = 0)$$

em que h é uma superposição de oscilações harmônicas. Cada b_k é chamada *modo normal de vibração do sistema.*

Também podemos escrever estas soluções utilizando a base $\{\cos b_k t, \operatorname{sen} b_k t\}$, como

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cos b_k t + d_k \operatorname{sen} b_k t$$

ou

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{c_k^2 + d_k^2} \left(\frac{c_k}{\sqrt{c_k^2 + d_k^2}} \cos b_k t + \frac{d_k}{\sqrt{c_k^2 + d_k^2}} \operatorname{sen} b_k t \right)$$

e tomando $\theta_k = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{c_k}{d_k}$, teremos

$$\cos \theta_k = \frac{d_k}{\sqrt{c_k^2 + d_k^2}}, \quad \operatorname{sen} \theta_k = \frac{c_k}{\sqrt{c_k^2 + d_k^2}}.$$

Podemos finalmente escrever

$$u(t)=\sum_{k=1}^{N/2} A_k \operatorname{sen}(b_k t+\theta_k)=\sum_{k=1}^{N/2} A_k \operatorname{sen}(2\pi\omega_k t+\theta_k)$$

onde $A_k=\sqrt{c_k^2+d_k^2}$ é denominada *amplitude* e θ_k a *fase* do k-ésimo modo (freqüência) de vibração $\omega_k=\dfrac{b_k}{2\pi}$.

O movimento geral de um sistema conservativo livre é a superposição de $\dfrac{N}{2}$ oscilações com freqüências distintas que são propriedades intrínsecas do sistema.

As condições iniciais especificam os modos e as respectivas amplitudes de oscilação que serão superpostas. Voltaremos a estas questões no Capítulo 4, Secção 4.6.

EXEMPLO 12

Analisemos o oscilador harmônico

$$P(\lambda)=m\lambda^2+c\lambda+k, \qquad c\geqslant 0$$

Se $c=0$, as raízes de $P(\lambda)$ são

$$\alpha_{\pm}=\pm i\sqrt{k/m}$$

e o sistema é conservativo, estável, de freqüência $\dfrac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$.

Se $c>0$ e $(c^2-4\,km)\leqslant 0$, então o sistema é A-estável, pois as raízes são

$$\alpha_{\pm}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4\,km}}{2\,m}, \text{ com } a=\frac{-c}{2\,m}<0 \text{ e } b=\frac{\sqrt{4\,km-c^2}}{2\,m}\geqslant 0.$$

Se $c>0$ e $(c^2-4\,km)\geqslant 0$ então

$$(c^2-4\,km)^{1/2}<c \text{ e daí } -c\pm(c^2-4\,km)^{1/2}<0$$

e, neste caso, o sistema também é A-estável. ■

3.4.5.3 *Critério de Estabilidade*

A caracterização da estabilidade de um sistema governado por um operador diferencial $P(D)$ é completamente decidida pela localização das raízes do polinômio característico $P(\lambda)$ com relação ao eixo imaginário, e pela multiplicidade de cada raiz.

Veremos na próxima secção que a instabilidade polinomial causada pela multiplicidade de alguma raiz tem uma interpretação diferente da instabilidade exponencial assintótica, causada por alguma raiz α com $Re(\alpha)>0$. Por este motivo, os critérios de estabilidade (e instabilidade) que estudaremos em seguida se referem ao caso exponencial, assintótico.

Portanto, a questão se resume em obter condições sobre os coeficientes de $P(\lambda)$, (as mais simples possíveis), que garantam a localização das suas raízes no semiplano esquerdo.

É óbvio que, se soubermos calcular as raízes do polinômio, a questão está resolvida. Entretanto, o cálculo de raízes de polinômios de grau superior é difícil e neste

caso não necessitamos de tanta informação sobre elas. Sabemos que não há fórmulas para o cálculo de raízes de polinômios em geral.

A expectativa então é de que, sendo menos pretensiosos nas questões, possamos em contrapartida obter respostas mais simples e talvez até explícitas*.

Obter um critério aritmético, isto é, que pode ser decidido apenas por operações aritméticas com os coeficientes de $P(\lambda)$, é uma questão antiga e tem a sua solução mais completa no chamado Teorema de Routh Hurwitz, que formularemos abaixo.

EXERCÍCIO

1. Considere os polinômios de segundo grau $P(\lambda)=\lambda^2-a\lambda+b$ e obtenha uma condição necessária e suficiente sobre a e b para que $P(D)$ seja A-estável.

A demonstração do critério de Routh Hurwitz não é simples e por isto não a faremos aqui, contentando-nos apenas com o seu enunciado.

Teorema de Routh Hurwitz (1875)

Seja $P(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_0$ um polinômio de coeficientes reais e considere a matriz

$$A_n=\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \ldots & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$$

Então o polinômio $P(\lambda)$ será A-estável se e somente se todos os determinantes menores principais da matriz acima, A_k, $k=1,\ldots,n$ forem positivos.

$$A_1=a_{n-1},\quad A_2=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{vmatrix},\quad A_3=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},\ \ldots$$

EXEMPLO 13

Para quais valores do parâmetro k a solução trivial $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1 \\ \dfrac{ax_3}{dt}=x_1+kx_2-2x_3 \end{cases}$$

é assintoticamente estável?

* Este tipo de barganha faz parte do próprio método científico: se Galileu e seus sucessores não fossem tão "modestos" nos seus objetivos, estaríamos até hoje tentando encontrar a chave de *todos* os segredos — a pedra filosofal!

Solução: A equação característica é dada por

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & k & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - k = 0$$

e, portanto, a matriz de Hurwitz é

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -k & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Logo, devemos ter

$$A_1 = 2 > 0$$
$$A_2 = -2 + k > 0 \Rightarrow k > 2$$
$$A_3 = k(-2+k) > 0 \Rightarrow k > 0$$

Portanto, se $k > 2$, a origem será um ponto assintoticamente estável. ■

Em teoria do controle é também utilizado o chamado critério de Nyquist-Mikhailov, que faz uso da interpretação geométrica dos números complexos, o que é natural, uma vez que o problema é essencialmente geométrico.

Suponha que o polinômio $P(\lambda)$ tenha sido decomposto (pelo Teorema Fundamental da Álgebra) na seguinte forma

$$P(\lambda) = a_N(\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_m)^{k_m}$$

onde cada α_i comparece com sua multiplicidade k_i, $\Sigma\, k_i = N =$ grau $P(\lambda)$. Suponha inicialmente que $P(i\omega) \neq 0$ para todo ω. Analisaremos agora a variação do argumento de $P(i\omega)$ quando ω percorre o eixo real de $-\infty$ a $+\infty$, que denotaremos por $\Delta_{-\infty}^{\infty}\, Arg\, P(i\omega)$.

Mas sabemos que, dados dois números complexos não nulos, $z_1 = Re^{i\theta}$ e $z_2 = R_2{}^{i\theta_2}$ temos

$$Arg\,(z_1 \cdot z_2) = Arg\,[R_1 R_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}] = \theta_1 + \theta_2 = Arg\, z_1 + Arg\, z_2 \quad \text{e}$$
$$Arg\,(zi^k) = Arg\,(R_1 e^{i\theta})^k = Arg\, R_1^k\, e^{ik\theta_1} = k\theta_1 = k\, Arg\, z_1$$

Portanto,

$$\Delta_{-\alpha}^{\alpha}\, Arg\, P(i\omega) = \Sigma\, \Delta_{-\alpha}^{\alpha}\, Arg\,(i\omega - \alpha_j)^{kj} = \Sigma\, k_j\, \Delta_{-\alpha}^{\alpha}\, Arg\,(i\omega - \alpha_j)$$

Mas observe como é fácil analisar a variação do argumento de $(i\omega - \alpha_i)$ quando ω vai de $-\infty$ a $+\infty$, dependendo da posição de α_j com relação ao eixo imaginário (ver Figura 3.10).

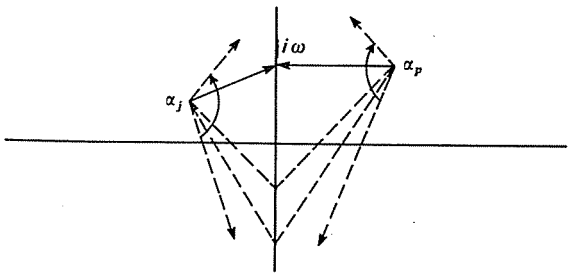


Figura 3.10

Para uma raiz α_j do lado esquerdo do eixo imaginário, a variação $\Delta_{-\infty}^{\infty}(i\omega - \alpha_j) = \pi$, pois $Arg\,(i\omega - \alpha_j)$ é crescente com $\omega \to \infty$.

Para uma raiz α_p do lado direito do eixo imaginário $\Delta_{-\infty}^{\infty}(i\omega - \alpha_p) = -\pi$, pois $Arg\,(i\omega - \alpha_p)$ é decrescente com $\omega \to \infty$.

Portanto, se $q_1 =$ número de raízes à esquerda do eixo imaginário (contando as multiplicidades) e

$q_2 =$ número de raízes à direita do eixo imaginário (contando as multiplicidades)

temos

$$\Delta_{-\infty}^{\infty} Arg\, P(i\omega) = (q_1 - q_2)\pi$$

Como o polinômio $P(\lambda)$ tem coeficientes reais, $P(i\omega) = P(-i\omega)$ e podemos escrever

$$\frac{1}{2}\Delta_{-\infty}^{\infty} Arg\, P(i\omega) = \Delta_0^{\infty} Arg\, P(i\omega) = (q_1 - q_2)\frac{\pi}{2} \quad \text{(Verifique!)}$$

Portanto, as raízes de $P(\lambda)$ estão todas do lado esquerdo do eixo imaginário se, e somente se, $\Delta_0^{\infty} Arg\, P(i\omega) = N\dfrac{\pi}{2}$ (Verifique!)

Observações:

a. O que estamos calculando com $\Delta_{-\infty}^{\infty} Arg\, P(i\omega)$ é a *variação* e não o limite da diferença

$$[Arg\, P(iR) - Arg\, P(-iR)] \text{ para } R \to \infty$$

pois, para

$$R \to \infty,\ Arg\, P(iR) \to N\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad Arg\, P(-iR) \to -N\frac{\pi}{2}$$

enquanto que o limite vale $N\pi$. Portanto, é necessário analisar a trajetória da curva $P(i\omega)$ no plano, quando ω percorre o eixo real para determinarmos o sentido da variação.

b. O método é válido analogamente quando tomamos outra reta vertical $x_0 + i\omega$ para ω variando entre $-\infty$ e $+\infty$, mas é claro que a aritmética neste caso é mais trabalhosa.

c. Se $P(i\omega_0) = 0$ (e portanto $P(-i\omega_0) = 0$) obviamente não podemos calcular $Arg\, P(i\omega_0)$, mas o que nos interessa é a variação do $Arg\, P(i\omega)$. Observe que se

$$\begin{cases} \omega < \omega_0 \\ \omega > \omega_0 \end{cases}, \text{ então } Arg\,(i\omega - i\omega_0)^k = \begin{cases} -k\dfrac{\pi}{2} \\ \\ k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto, no caso de uma raiz no eixo imaginário, temos um salto de descontinuidade de $k\pi$ no argumento de $P(i\omega)$, quando ω passa por ω_0. Isto é facilmente detectado através do gráfico de $P(i\omega)$.

Observe que para um polinômio estável o $Arg\, P(i\omega)$ varia monotonicamente, com ω no sentido positivo (anti-horário).

EXEMPLO 14

Considere o polinômio

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2$$

Então

$$P(i\omega) = (5\omega^4 - 11\omega^2 + 2) + i(\omega^5 - 10\omega^3 + 7\omega)$$

e verificamos que a curva de $P(i\omega)$ para $\omega \in (0, +\infty)$ no plano é da forma mostrada na Figura 3.11, e, portanto, $Arg\ P(i\omega)$ teve um acréscimo de uma volta completa e

$$\text{tg}\,\theta = \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \to \infty \text{ quando } \omega \to \infty$$

logo

$$\Delta_0^{\infty} Arg\ P(i\omega) = 5\,\frac{\pi}{2}$$

e $P(\lambda)$ é estável (ver Figura 3.11).

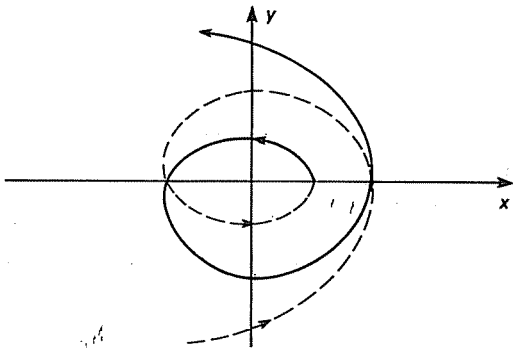


Figura 3.11

EXERCÍCIOS

1. Considere o polinômio $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ e analise as condições de estabilidade através do critério geométrico. Suponha a, b, c positivos. Analise a curva $P(i\omega)$ (onde $P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$) para $\omega \in (0, \infty)$ e obtenha uma condição de estabilidade para $P(\lambda)$.
2. Considere os polinômios $P(\lambda)$ dados abaixo e analise a estabilidade pelo critério de Routh Hurwitz e pelo critério de Nyquist-Mikhailov.
   a. $P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 1$
   b. $P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$
   c. $P(\lambda) = \lambda^3 + 1$
   d. $P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$
   e. $P(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
3. Verifique a estabilidade pelo critério de Routh Hurwitz do polinômio $P(\lambda)$ dado no Exemplo 14.

3.4.6 Análise da Equação $P(D)z = e^{i\omega t}$

3.4.6.1 *Introdução*

Pelo princípio de superposição de Fourier, o estudo das equações não homogêneas poderia ser feito a partir de equações do tipo $P(D)z = e^{i\omega t}$, com ω real.

Para uma equação não homogênea com influência externa f faríamos uso então dos teoremas de Fourier, desde que tivéssemos a sua decomposição espectral

$$f(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ inteiro}}}^{\infty} C_k e^{i\omega t} \qquad \text{para } f \text{ definida em um intervalo fechado}$$

ou

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikt}\,dk \quad \text{para } f \text{ definida na reta real}$$

Para que o princípio de Fourier tenha alguma utilidade é necessário que saibamos obter os coeficientes C_k ou $C(k)$, dada a função $f(t)$. Isto é, dada a função $f(t)$, obter a sua *representação espectral.*

O método de Fourier é generalizado para diversos outros tipos de representação de funções por superposição contínua chamadas, em geral, de transformadas integrais. Nestes casos, uma família de funções $N_k(t)$ de t (na verdade uma função de duas variáveis chamada núcleo da transformada $N(k, t)$) analiticamente simples, é usada como "base" de um amplo espaço vetorial de funções f que podem ser escritas na forma

$$f(t) = \int_I N(k, t)C(k)dk$$

sendo a integral realizada em um intervalo fixado I.

Por exemplo, a *Transformada de Fourier* tem núcleo

$$N_F(k, t) = e^{ikt} \qquad \text{e} \qquad I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

A *Transformada de Laplace* tem núcleo

$$N_L(k, t) = e^{-kt} \qquad \text{e} \qquad I = (0, \infty).$$

A resolução completa da equação $P(D)z = N(k, t)$ para todo k em I nos possibilitará então resolver a equação $P(D)z = f$ para todo f no espaço de funções gerado por superposição contínua da família $N_k(t) = N(k, t)$, desde que saibamos representar f nesta "base".

O problema de obter a função $C(k)$ a partir de $f(t)$ é resolvido em todos estes exemplos também por uma transformada integral (chamada inversa por motivos óbvios), com núcleo analiticamente semelhante. Por exemplo, para a transformada de Fourier inversa temos

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt$$

isto é, uma transformada integral com núcleo

$$N_F^*(z, k) = \frac{e^{-izk}}{2\pi} \text{ e } I = (-\infty, \infty); \; N_F^*(z, k) = \frac{N_F(-z, k)}{2\pi}$$

Para que o princípio de Fourier e suas generalizações pudessem ser aplicados com toda a sua força teríamos que desenvolver a teoria de transformadas de Fourier e transformadas integrais em geral, que não é exatamente um tópico deste livro. Apesar disto, não poderíamos deixar de mencionar em alguns pontos do livro o vastíssimo campo teórico e aplicado que se abre pela Análise de Fourier. De qualquer maneira, mesmo sem entrar nas técnicas desta teoria, apenas com as suas idéias básicas e elementares, podemos obter resultados importantes de forma relativamente simples. É o que faremos.

Uma vantagem decisiva da representação de Fourier sobre os outros métodos consiste no fato de que ela utiliza a decomposição de $f(t)$ em oscilações harmônicas que, do ponto de vista físico, é a forma natural de se proceder com um sinal.

A análise acústica se faz através desta decomposição espectral, isto é, entre sons graves (baixa freqüência) até os mais agudos (alta freqüência). Os quadrados dos coeficientes de Fourier $|C_k^2|$ representam, de certa maneira, a energia contida ou transportada em cada freqüência (no caso de integrais de Fourier $|C^2(k)|$ representa a densidade de energia por freqüência). Esta distribuição de energia entre as freqüências é que nos fornece a qualidade do som. Quando distinguimos qualitativamente um som do outro, estamos distinguindo esta distribuição relativa de energia, ou seja, o que nós ouvimos são os coeficientes de Fourier!

A análise de Fourier é uma teoria utilizada no estudo de ondas e vibrações das mais variadas origens, desde mecânicas até atômicas. A propagação da luz, sendo um fenômeno ondulatório eletromagnético, também é estudada por este método, de onde vem o termo *monocromático* que designa a "luz pura, de uma única freqüência". O termo *espectro* ou *decomposição espectral* é originado da análise de Fourier de radiações atômicas.

A transmissão, amplificação e filtragem de sinais em sistemas eletrônicos são estudadas também pela Análise de Fourier e vários destes termos são incorporados à linguagem do tratamento matemático da teoria.

Estudaremos agora problemas de amplificação, filtragem, ressonância, distorção etc. por meio de uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes e termo não homogêneo monocromático.

3.4.6.2 *Regime Transiente e Permanente*

A solução geral de uma equação do tipo

$$P(D)z = A\,e^{i\omega t} \tag{3}$$

pode ser escrita na forma

$$z = \frac{A}{P(i\omega)}\,e^{i\omega t} + h, \qquad (P(D)h = 0) \tag{4}$$

exceto para aqueles ω, tais que $P(i\omega) = 0$.

Ora, mas a quantidade de raízes de $P(\lambda)$ é exatamente $N =$ grau de $P(\lambda)$ (contando as multiplicidades) e, portanto, existem no máximo N valores em toda a reta real, para os quais a solução geral não possui a forma (4).

Do ponto de vista físico, estes valores excepcionais de ω não têm "existência experimental" (assim como o número π)*, mas representam pontos de referência for-

* Não estamos duvidando da "existência" do número π. Para os matemáticos a sua "existência" é "mais concreta do que a existência da Rocha de Gibraltar que é acreditável, mas não demonstrada rigorosamente". O que estamos afirmando é que não será possível calcular *toda* a expansão decimal de π experimentalmente. Sobre este e outros aspectos da interação do matemático profissional com o seu ambiente, leia o interessante livro de DAVIS, P. & Hersh, R. *A Experiência Matemática*. Brasília, Editora da UnB, 1984, especialmente o capítulo "O Matemático Ideal".

necidos pelo modelo matemático e indispensáveis para a análise do sistema governado por $P(D)$.

Podemos dizer, de forma vaga, mas com algum sentido aproveitável, que a solução geral na forma (4) é a situação típica, ou genérica, ou mesmo, a única fisicamente possível.

Tratemos deste caso agora e do "matematicamente possível" na Secção 3.4.6.3.

A solução particular $\frac{Ae^{i\omega t}}{P(i\omega)} = z_0(t)$ da equação não homogênea $P(D)z = A\,e^{i\omega t}$, utilizada na expressão (4) da solução geral, não é obviamente a única; qualquer solução da equação homogênea adicional a ela poderia fazer o mesmo papel. Entretanto, veremos que para um operador diferencial A-estável a solução $z_0(t) = \frac{Ae^{i\omega t}}{P(i\omega)}$ é realmente particular e, de certa maneira, é a escolhida pelo comportamento de um sistema governado pela Equação diferencial (3).

Consideremos então um operador $P(D)$ A-estável, isto é, todas as raízes α de $P(\lambda)$ têm $Re(\alpha) < 0$. Sendo a solução geral de (3) dada pela Equação (4), qualquer condição que especifique uma determinada solução deve ser satisfeita pela escolha apropriada da parte homogênea.

As condições iniciais (ou quaisquer que sejam as condições que especifiquem uma determinada solução), são incorporadas a $z = z_0 + h$ através da escolha de $h \in N(P(D))$.

Por outro lado, sabemos que, sendo $P(D)$ A-estável, uma base apropriada para $N(P(D))$ é dada por funções do tipo

$$t^m e^{\alpha t} = t^m e^{at} e^{ibt}, \qquad Re(\alpha) = a < 0$$

e, portanto, necessariamente, $h(t)$ decai para zero rapidamente, de forma exponencial, quando t se afasta do instante inicial.

Isto significa que a parte homogênea h, de solução $z(t) = z_0 + h$, só é "perceptível" em um pequeno intervalo de tempo inicial, sendo amortecida tanto mais rápido quanto menores forem as partes reais das raízes de $P(\lambda)$.

Observe também, por outro lado, que a solução particular $\frac{Ae^{i\omega t}}{P(i\omega)}$ tem amplitude constante $\frac{A}{P(i\omega)}$ e, por menor que seja, depois de um certo instante, $z_0(t)$ será a única parte de $z(t)$ "perceptível". Distinguimos aí duas fases no funcionamento do sistema: o *regime de transição* (ou *transiente*) que é notável apenas nos instantes iniciais, aproximando-se do chamado *regime permanente*, representado pela solução particular $z_0(t) = \frac{Ae^{i\omega t}}{P(i\omega)}$.

Do ponto de vista matemático, o regime permanente só existe se $h \equiv 0$, mas do ponto de vista físico, a longo prazo (talvez não tão longo!), o funcionamento de um sistema governado pela Equação (3) com $P(D)$ A-estável é observado como sendo $z_0(t) = \frac{A}{P(i\omega)} e^{i\omega t}$.

Podemos interpretar, então, o regime transiente como uma fase de acomodação do sistema entre as condições iniciais de partida e a resposta permanente $z_0(t)$ à influência externa.

Vários dispositivos eletrônicos ou sistemas físicos são estudados basicamente em termos de entrada (*input*) $Ae^{i\omega t}$ e saída, ou resposta, (*output*) $\frac{A}{P(i\omega)}e^{i\omega t}$. Nestes casos, estamos diante de $P(D)$ fortemente A-estável, isto é, existe $M>0$ grande e todas as raízes $P(\lambda)$ têm $Re\,(\alpha)<-M$, o que implica num regime transiente rápido.

Em alguns dispositivos, como amplificadores, em que o objetivo é aumentar a energia do sinal $e^{i\omega t}$ sem modificá-lo, o interesse é "construir" um $P(\lambda)$ fortemente A-estável e com $\frac{1}{|P(i\omega)|}$ grande.

Chamaremos de *dispositivo linear* governado pelo operador $P(D)$ A-estável o processo de transformação de um sinal de entrada $Ae^{i\omega t}$ no regime permanente $\frac{A}{P(i\omega)}e^{i\omega t}$ das soluções de $P(D)z=Ae^{i\omega t}$ (ver Figura 3.12).

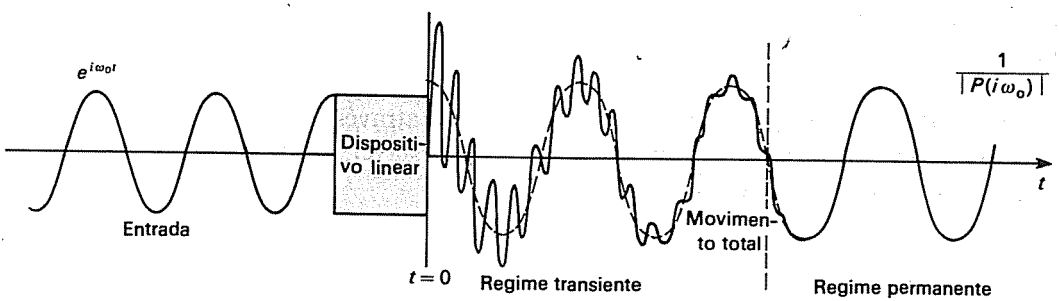


Figura 3.12

Isto significa que estamos desprezando o regime transiente e fixando a nossa atenção no chamado comportamento assintótico ou regime permanente de funcionamento.

A designação "linear" é obviamente originada do fato de que o princípio de superposição vale para sinais monocromáticos de freqüências diferentes e, portanto, para qualquer sinal com decomposição espectral.

Se um sinal de entrada é da forma

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

o sinal de saída terá a forma

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C(\omega)}{P(i\omega)}e^{i\omega t}d\omega$$

Observamos que a função $\frac{1}{P(i\omega)}=H(\omega)$ descreve completamente um sistema linear. A função $H(\omega)$ é chamada *função de transferência do dispositivo linear* e, tendo um valor complexo, pode ser escrita como $H(\omega)=R(\omega)e^{i\theta(\omega)}$, onde

$$R(\omega) = \frac{1}{|P(i\omega)|} = \text{função de ganho de amplificação característica da freqüência } \omega/2\pi$$

$$\theta(\omega) = Arg\left(\frac{1}{P(i\omega)}\right) = \text{fase de atraso da freqüência } \omega/2\pi \text{ ou ângulo de fase}$$

Um dispositivo linear em geral é um processo que transforma funções $f(t)$ em uma outra função $F = \mathbf{L}(f)$ e esta transformação satisfaz o princípio de superposição. A função $f(t)$ é chamada entrada, "input", estímulo etc. e $F(t)$ é chamada saída, "output", resposta etc. Estas funções $f(t)$ são restritas a um espaço vetorial de funções. O sistema é chamado invariante com o tempo se

$$\mathbf{L}f(t) = F(t)$$

implica em

$$\mathbf{L}f(t + t_0) = F(t + t_0)$$

para qualquer entrada $f(t)$.

EXERCÍCIO

1. Mostre que o sistema linear governado por um operador A-estável $P(D)$ é invariante com o tempo.

Um fato surpreendente é que sistemas lineares tão gerais possam ser representados de forma tão simples e semelhante ao nosso caso particular, isto é, para todo sistema linear invariante com o tempo existe uma função de transferência $H(\omega)$, tal que

$$\mathbf{L}(e^{i\omega t}) = H(\omega)e^{i\omega t} \quad \text{com} \quad H(\omega) = R(\omega)e^{i\theta(\omega)}$$

Para verificar isto suponha que $F(\omega, t)$ seja a saída para

$$e^{i\omega t} = f(\omega, t); \quad \mathbf{L}[f(\omega, t)] = F(\omega, t)$$

Pela invariância do tempo temos

$$\mathbf{L}[e^{i\omega(t+r)}] = F(\omega, t + r)$$

para todo r.

Por outro lado, pela linearidade de $\mathbf{L}$ e como

$$e^{i\omega(t+r)} = e^{i\omega r} \cdot e^{i\omega t}$$

temos

$$\mathbf{L}[e^{i\omega(t+r)}] = e^{i\omega r}\,\mathbf{L}[e^{i\omega t}] = e^{i\omega r}F(\omega, t)$$

Fazendo $t = 0$, temos

$$F(\omega, r) = e^{i\omega r}F(\omega, 0)$$

Logo $\mathbf{L}(e^{i\omega t}) = e^{i\omega t} F(\omega, 0)$ e a função de transferência $H(\omega) = F(\omega, 0)$.

Em um sistema linear geral a função $H(\omega)$ não precisa ser o inverso de um polinômio e pode ter formas mais gerais.

No estudo de sistemas de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes como, por exemplo, as equações para I_1 e I_2 no circuito da Figura 3.13 (ver também Secção 3.4.2), podemos desacoplar as equações e obter uma única equação para I_1, que tem a forma

$$P(D)I_1 = Q(D)U(t)$$

onde $P(D)$ é o operador diferencial linear da equação e $Q(D)$ também é um operador diferencial linear de coeficientes constantes.

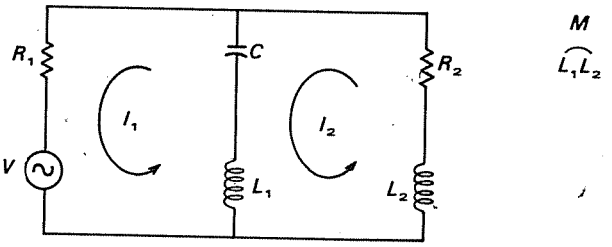


Figura 3.13

Se considerarmos como $U(t)$ a entrada no sistema na forma monocromática $e^{i\omega t}$, veremos que a equação para I_1 se reduz a

$$P(D)I_1 = Q(i\omega)e^{i\omega t}$$

e a função de transferência $H(\omega) = \dfrac{Q(i\omega)}{P(i\omega)}$ é uma função racional.

EXERCÍCIO

1. Obtenha as funções de transferência para os circuitos dos exercícios da Secção 3.4.2.

3.4.6.3 *Ressonância Externa e Interna*

Como já vimos na Secção 3.4.5, as equações diferenciais lineares são, na maior parte dos casos, modelos para o estudo de situações em que o funcionamento do sistema não se afasta muito da posição de equilíbrio, isto é, da solução $z \equiv 0$. Por este motivo, é importante caracterizar as condições em que pode haver uma solução $z(t)$ de $P(D)z = f$ que não mantém a sua amplitude $|z(t)|$ limitada.

Três possibilidades devem ser consideradas:

1. Devido à constituição interna do sistema
   - *a.* Instabilidade exponencial, isto é, existe uma raiz α de $P(\lambda)$ com $Re(\alpha) > 0$.
   - *b.* Instabilidade polinomial, isto é, existe uma raiz de $P(\lambda)$ com $Re(\alpha) = 0$ e multiplicidade $k > 1$.

2. Devido à influência externa
   - *c.* $P(\lambda)$ tem uma raiz imaginária $\alpha = i\omega_0$ e a influência externa f apresenta uma componente de freqüência $\frac{\omega_0}{2\pi}$ na sua decomposição espectral.

De todas as três possibilidades, a única situação genérica ou experimentalmente verificável é (*a*), no sentido de que pequenas alterações nos coeficientes de $P(\lambda)$ não modificam a situação*.

Não podemos verificar experimentalmente que uma raiz tem multiplicidade $k > 1$ ou que ela cai exatamente sobre o eixo imaginário, uma vez que, dentro de qualquer precisão, podemos ter perturbações nos coeficientes de $P(\lambda)$ que destroem estas situações.

Isto nos leva a caracterizar as situações (*b*) e **2** como sendo não genéricas, embora sirvam como pontos de referência importantes no estudo do comportamento do sistema governado pelo operador $P(D)$.

O caso **2** é chamado de *ressonância externa* e (*b*) de *ressonância interna*, ou seja, somente haverá ressonância em $P(D)$ se $P(\lambda)$ tiver raízes com parte real nula.

Analisemos o caso (*a*) de instabilidade polinomial de um operador diferencial, isto é, quando $P(\lambda)$ tem uma raiz $i\omega_0$ com multiplicidade $k > 1$.

Neste caso, a solução homogênea pode ter combinações lineares do tipo $\{t^m e^{i\omega_0 t}\}_{0<m<k}$.

Observe como o termo $t^m e^{i\omega_0 t}$ é semelhante à solução particular $\frac{1}{P^{(k)}(i\omega_0)} t^k e^{i\omega_0 t}$ que aparece na solução ressonante, embora com $m < k$.

Uma interpretação física deste fato é que há um fenômeno de ressonância interna entre as múltiplas vibrações da mesma freqüência $\frac{\omega_0}{2\pi}$ e que provocam o aparecimento espontâneo (sem influência externa) de termos do tipo $t^m e^{i\omega_0 t}$.

Observe que isto é consistente com o fato de que só aparecem termos de grau $m < k$, pois se uma vibração de freqüência $\frac{\omega_0}{2\pi}$ influencia as outras $k-1$, então a solução deles em bloco deverá ser a ressonante do tipo $ct^{k-1} e^{i\omega_0 t}$ (c constante) e por blocos de m delas $ct^m e^{i\omega_0 t}$ $0 \leqslant m \leqslant k-1$, sendo estas influências mútuas tomadas de todas as formas possíveis.

---

* Isto decorre naturalmente do fato de que as "raízes de um polinômio se modificam continuamente com os seus coeficientes", que é uma forma do teorema de funções implícitas, se considerarmos a equação $P(\lambda) = 0$ como $F(\lambda, a_0, \ldots, a_n) = 0$. Se λ é uma raiz simples para os coeficientes $(a_0, \ldots, a_n)$, então $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, a_0, \ldots, a_n) \neq 0$ e, pelo teorema clássico da função implícita, podemos obter uma única função $\lambda(h_0, \ldots, h_n)$ tal que $F(\lambda(h_0, \ldots, h_n), a_0 + h_0, \ldots, a_n + h_n) = 0$ para h_k pequenos. Entretanto, quando há confluência de raízes, isto é, multiplicidades, o teorema clássico não é válido, pois $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, a_0, \ldots, a_n) = 0$. Neste caso o argumento é mais delicado.

Esta é uma interpretação física geral e não uma demonstração matemática rigorosa, embora, eventualmente, para um sistema específico, estes argumentos possam ser substanciados. De qualquer forma, podemos pensar nos dois casos (*b*) e **2** como sendo fenômenos semelhantes de ressonância, interna e externa.

Analisaremos agora algumas idéias relacionadas ao processo de ressonância externa para operadores $P(D)$ estáveis, isto é, sem ressonância interna. Como vimos, este estudo pode ser feito inteiramente baseado no polinômio algébrico $P(\lambda)$ e na função de transferência $H(\omega)=\dfrac{1}{P(i\omega)}$ ou, também, $H(\omega)=\dfrac{Q(i\omega)}{P(i\omega)}$, Q e P polinômios.

Para isto, podemos estudar a "resposta" de um sistema descrito por um operador $P(D)$ fixado variando a freqüência da excitação monocromática, ou fixando esta freqüência e variando $P(D)$. Do ponto de vista prático, depende se estamos analisando um sistema determinado ou se estamos tentando construir algum sistema com propriedades desejadas (síntese).

Analisemos a função $R(\omega)=|H(\omega)|$ para a freqüência ω variando, e tomemos como exemplo o oscilador harmônico com

$$P(\lambda)=m\lambda^2+c\lambda+k \quad \text{e} \quad R(\omega)=\frac{1}{|P(i\omega)|}=\left|\frac{1}{-m\omega^2+ic\omega+k}\right|=$$

$$=\frac{1}{[c^2\omega^2+(k-m\omega^2)^2]^{1/2}}$$

Se o oscilador é A-estável, então $c>0$ e $P(i\omega)\neq 0$ para todo ω real.

Façamos um pouco de cálculo elementar para obter o esboço do gráfico de $R(\omega)$:

$$R(0)=\frac{1}{k}; \qquad R(\infty)=\lim_{\omega\to\infty} R(\omega)=0$$

e para $\omega\to\infty$, temos

$$R(\omega)\to\frac{1}{m\omega^2}$$

Também

$$R'(\omega)=\frac{2c^2\omega-4m\omega(k-m\omega^2)}{[c^2\omega^2+(k-m\omega^2)^2]^{3/2}}$$

se anula para

$$\omega=0 \quad \text{e} \quad \omega=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{2m^2}}$$

O ponto ω_0 é um ponto de máximo para $R(\omega)$, quando $k\geqslant\dfrac{c^2}{2m}$. Para $k\leqslant\dfrac{c^2}{2m}$, $R(\omega)$ tem máximo no ponto $\omega=0$, considerando o intervalo $[0,\infty]$. Podemos então obter as diversas curvas para representação gráfica de $R(\omega)$ com valores diferentes de $k-\dfrac{c^2}{2m}$:

$$R(\omega_0) = \text{máximo de } R(\omega) = \frac{1}{c\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{c^2}{4m^2}}} \quad \text{quando } k \geqslant \frac{c^2}{2m}$$

Observe que $R(\omega_0) \to \infty$ para $c \to 0$.

As curvas $R(\omega)$ são chamadas curvas de ressonância (ver Figura 3.14) e representam o fator de ganho na amplitude do sistema linear governado pelo operador A-estável $mD^2 + cD + k$, $c > 0$.

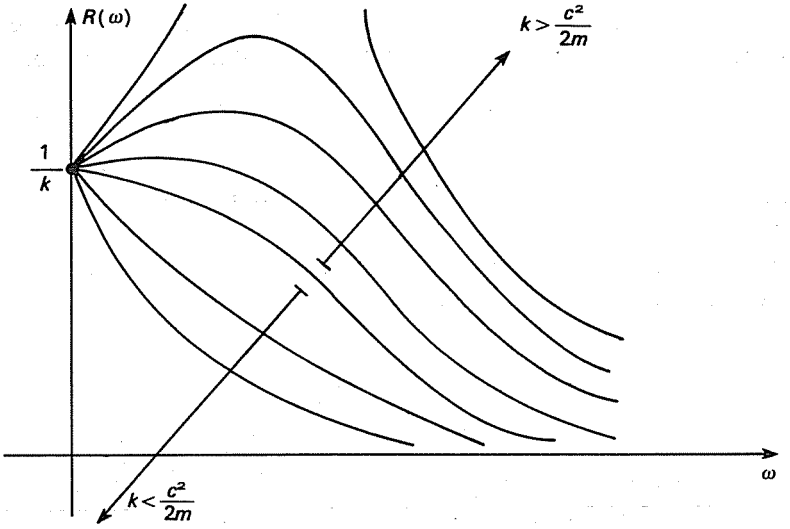


Figura 3.14

Para freqüências de excitação $\dfrac{\omega}{2\pi}$ próximas de

$$\frac{\omega_0}{2\pi}\left(\frac{k}{m}, \frac{c}{m}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right)^{1/2}$$

$R(\omega)$ tem valores maiores, o que implica no fato de que o oscilador harmônico responde às freqüências externas nesta região com maior amplitude. Este é basicamente o princípio de sintonia e de filtragem de sinais, pois se a função $R(\omega)$ tiver um máximo mais acentuado em ω_0, o sistema seleciona com maior nitidez as componentes periódicas em uma estreita faixa de freqüência em torno de $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$.

Se o máximo de $R(\omega)$ e ω_0 for suave, o sistema funcionará como um amplificador de sinais em uma larga faixa de freqüências em torno de $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$. Observe que um amplificador de sinais perfeito não deve dar ganho diferente de amplitudes para componentes de diferentes freqüências, pois desta forma modificará a distribuição relativa de energia entre as freqüências, resultando em uma distorsão no sinal.

Se o intuito é amplificar com fidelidade uma faixa de freqüências, é interessante que $R(\omega)$ tenha um patamar tão uniforme e tão acentuado nesta região quanto possível.

Observe que um oscilador harmônico é um sistema linear bastante rústico, pois a função $R(\omega)$ não tem muita flexibilidade com a variação de $\frac{k}{m}$ e $\frac{c}{m}$. Um sistema linear que tenha função de transferência racional $\frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)}$ para polinômos de grau superior, ou mesmo função $H(\omega)$ mais geral, pode ser amoldado para uma maior aproximação aos objetivos ideais do dispositivo.

A análise de amplificadores, filtros, diapasões, sismógrafos, circuitos de sintonia, microfones e uma enorme variedade de situações é feita seguindo-se basicamente os mesmos argumentos utilizados no estudo do oscilador harmônico.

A função de fase $\theta(\omega) = Arg\,\frac{1}{P(i\omega)}$ também provoca o que é chamado de distorção de fase, uma vez que o atraso de fase varia com a freqüência. Quando $\theta(\omega)$ é aproximadamente constante, o gráfico do sinal de saída só apresenta um deslocamento no tempo.

Entretanto, se houver uma variação acentuada em $\theta(\omega)$ a distorção de fase modificará o gráfico do sinal (ver Figura 3.15).

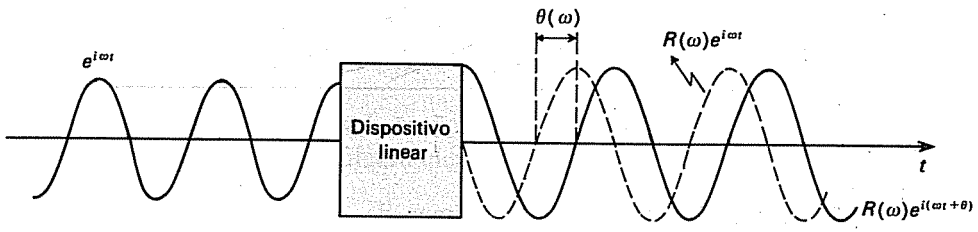


Figura 3.15

Suponha que $P(\lambda)$ não tenha raízes imaginárias puras (e, portanto, não apresente a ressonância matemática), mas tenha raízes $i\omega_0 + \delta$ onde $\delta \sim 0$. Verificamos, então, que $\theta(\omega)$ apresenta uma variação brusca de valor aproximadamente igual a π quando $i\omega$ passa de pouco abaixo de $i\omega_0 + \delta$ para um pouco acima no plano complexo.

Este salto de variação π em $\theta(\omega)$ quando $i\omega_0$ é raiz de $P(\lambda)$ é chamado descontinuidade da função fase na passagem por ressonância.

3.4.7 Análise de Choques em Equações Diferenciais *P(D)z = f* com *f* Descontínua

3.4.7.1 *Função de Heaviside* H(t)

Alguns problemas físicos de grande importância relacionados a sistemas lineares governados por operadores diferenciais A-estáveis $P(D)$ não podem ser tratados de forma satisfatória pelos modelos apresentados até agora.

Suponha, por exemplo, um circuito *RLC* simples, com um interruptor ligado a uma fonte de voltagem contínua (ver Figura 3.16).

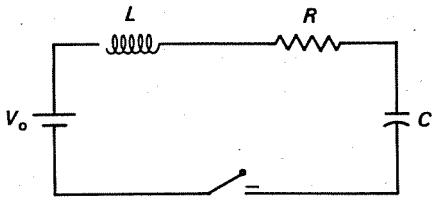


Figura 3.16

Se no instante $t=0$ ligamos o interruptor, o funcionamento do circuito será regido pela equação $P(D)=H_\varepsilon(t)$, onde o termo de influência externa tem um aspecto típico do gráfico da Figura 3.17.

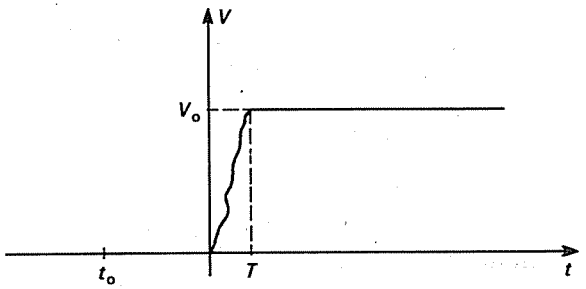


Figura 3.17

Nenhum dispositivo físico poderá efetuar este contacto completo instantaneamente, e o processo, apesar de rápido, ($\varepsilon \ll 1$), é complicadíssimo em sua microestrutura e certamente não pode ser repetido em duas ligações diferentes. Isto significa também que não conhecemos a função $H_\varepsilon(t)$ neste intervalo $[0, \varepsilon]$ e, mesmo se a conhecêssemos, ela teria um aspecto "intratável" do ponto de vista matemático.

Qual será então a nossa atitude para construir um modelo matemático aceitável para esta situação?

O procedimento usual nestas situações consiste em substituir o problema original

$$\begin{cases} P(D)u_\varepsilon = H_\varepsilon \\ I_{t_0}u_\varepsilon = \alpha \qquad t_0 < 0 \end{cases} \tag{5}$$

por um outro cujas soluções sejam mais facilmente analisáveis e que representem aproximadamente o funcionamento do sistema.

Uma vez que ε é muito pequeno comparado às outras escalas de tempo (como, por exemplo, o período de oscilação livre do circuito) é razoável considerar o problema idealizado

$$\begin{cases} P(D)v = H \\ I_{t_0}v = \alpha \end{cases} \tag{6}$$

onde $H(t)$ é a função de Heaviside $H(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t<0 \\ 1 \text{ se } t>0 \end{cases}$

Fazendo isto, todavia, estaremos diante de uma equação que, embora formalmente simples, não foi ainda estudada pois $H(t)$ é uma função descontínua. Além disto, do ponto de vista físico, a Equação (6) descarta completamente a microdinâmica do contacto. Para que esta substituição seja justificável, é necessário que o funcionamento macroscópico do sistema ($u(t)$) seja muito pouco influenciado pelo comportamento de $H_\varepsilon(t)$ no intervalo $[0, \varepsilon]$, ou seja, o fato de que o contacto se faz em uma escala de tempo muito pequena deve ser suficiente para a descrição aproximada do fenômeno.

Analisemos em primeiro lugar a questão puramente matemática da obtenção de soluções para a Equação (6). Observe que esta equação pode ser separada em duas partes

$$P(D)v_1 = 0 \quad \text{se} \quad t < 0 \tag{6a}$$

$$P(D)v_2 = 1 \quad \text{se} \quad t > 0 \tag{6b}$$

e que ambas podem ser facilmente resolvidas pelos métodos apresentados nas secções anteriores.

A solução da primeira parte (6a) é uma função $v_1 \in N(P(D))$ que fica completamente determinada pelas condições iniciais em $t_0 < 0$ como solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} P(D)v_1 = 0 \\ I_{t_0} v_1 = \alpha \qquad t_0 < t \end{cases}$$

Entretanto, $v_2(t)$ está caracterizada apenas como solução geral de $P(D)v_2 = 1$ e, portanto, dispõe de N parâmetros livres.

Isto significa, em resumo, que a equação matemática (6) tem $2N$ parâmetros livres. Do ponto de vista físico estes N parâmetros extras são inaceitáveis, uma vez que o sistema deve ter o seu funcionamento perfeitamente determinado apenas pelas condições iniciais representadas pelos N parâmetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

O problema matemático simplificado nos leva, assim, a um impasse sobre a escolha, dentre as múltiplas soluções da Equação (6), daquela que possa descrever aproximadamente o modelo.

A função $v_1(t)$ $(t < 0)$ é chamada solução anterior ao choque e $v_2(t)$ $(t > 0)$ solução posterior ao choque.

A questão, neste caso, se reduz à forma de se realizar a conexão entre a solução (determinada) pré-choque e a solução (indeterminada) pós-choque. Para resolvermos este impasse voltaremos ao problema original (5) e determinaremos a conexão entre $u_\varepsilon(t)$ $(t < 0)$ e $u_\varepsilon(t)$ $(t > 0)$, no limite $\varepsilon \downarrow 0$. Com este objetivo utilizaremos a fórmula geral de resolução da equação $P(D)u = f$ obtida no final da Secção 3.4.3 e que nos dá

$$u_\varepsilon(t) = h(t) + E_{\alpha_1} \ldots (E_{\alpha_N} H_\varepsilon)(t)$$

onde

$$(E_\alpha f)(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\, ds$$

Observe que $h \in N(P(D))$ é responsável pelo cumprimento das condições iniciais $I_{t_0} h = \alpha$ e não depende de ε.

$$\omega_\varepsilon = E_{\alpha_1} \ldots (E_{\alpha_N} H_\varepsilon)(t)$$

por sua vez é uma solução particular com condições iniciais nulas. (Verifique!) Não é difícil mostrar que, para $\varepsilon \downarrow 0$, $(E_{\alpha_N} H_\varepsilon)(t)$ converge uniformemente em intervalos finitos para a função contínua $(E_{\alpha_N} H)(t)$ e que $E_{\alpha_{N-1}}(E_{\alpha_N} H_\varepsilon)(t)$ converge da mesma forma para a função com uma derivada contínua $E_{\alpha_{N-1}}(E_{\alpha_N} H)(t)$ e, finalmente, que $E_{\alpha_1} \ldots E_{\alpha_N}(H_\varepsilon)(t)$ converge da mesma forma para a função com $(N-1)$ derivadas contínuas $E_{\alpha_1} \ldots (E_{\alpha_N} H)(t)$.

Mas esta função limite é obviamente solução (por partes) da equação $P(D)v = H$ e tem $N-1$ derivadas contínuas em $t=0$. Esta informação nos dá exatamente as condições de conexão entre v_1 e v_2 pois, para que

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t), & t < 0 \\ v_2(t), & t > 0 \end{cases}$$

tenha $(N-1)$ derivadas contínuas em $t=0$, devemos ter

$$\begin{aligned} v_2(0^+) &= v_1(0^-) \\ v_2'(0^+) &= v_1'(0^-) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_2^{(k)}(0^+) &= v_1^{(k)}(0^-) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_2^{(N-1)}(0^+) &= v_2^{(N-1)}(0^-) \end{aligned} \tag{7}$$

ou seja, $I_0 v_2 = I_0 v_1$, denominadas também *Condições de Choque*.

3.4.7.2 *Condições de Choque*

Observe então que v_1 é bem determinada como solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} P(D)v_1 = 0 \\ I_{t_0}^{j} v_1 = \alpha \qquad t_0 \leqslant t < 0 \end{cases}$$

e, uma vez obtida v_1, v_2 será caracterizada como a solução de

$$\begin{cases} P(D)v_2 = 1 \\ I_0 v_2 = I_0 v_1 \end{cases}$$

Desta forma, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} P(D)v = f \\ I_{t_0} v = \alpha \end{cases}$$

para funções f com descontinuidades de salto terá solução única *desde que acrescentemos* as Condições de Choque (7) para cada descontinuidade.

É claro que esta não é a única regra matematicamente possível para a escolha de soluções deste tipo de problema de Cauchy e nem mesmo existe "a priori" necessidade desta escolha.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Entretanto, a interpretação física que apresentamos para este problema é motivação suficiente para que adotemos as Condições de Choque (7) e com isto possamos estender o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} P(D)u = f \\ I_{t_0}u = \alpha \end{cases}$$

no caso de funções f com descontinuidades finitas.

Observe que o método de conexão por condições de choque pode ser útil também na resolução de problemas em que a expressão analítica de f é diferente para intervalos diferentes. (Vide exercícios.)

EXEMPLO 15

Suponha que o circuito da Figura 3.18 esteja oscilando livremente na forma $h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, onde λ_1 e λ_2 são raízes de $P(\lambda) = L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C}$ e que no instante $t = 0$ a bateria seja ligada através de um interruptor (instantâneo). Obtenha o funcionamento do circuito durante um período de tempo T em que a bateria perde sua "carga" de forma linear, $E(t) = V_0(t - T)$.

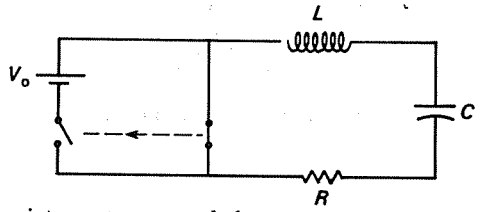


Figura 3.18 Circuito com interruptores acoplados

Solução:

$$P(D) = LD^2 + RD + \frac{1}{C}$$

$$P(D)I = 0, \quad t < 0$$

$$P(D)I = V_0, \quad t > 0$$

$$P(D)h = 0, \quad t < 0 \quad \text{e} \quad z_1(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad t < 0$$

$$P(D)z_2 = V_0, \quad t > 0$$

$$z_2(t) = \frac{V_0}{P(0)} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = V_0 C + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

As condições de choque são

$$\begin{cases} h(0) = A + B = V_0 C + c_1 + c_2 \\ h'(0) = \lambda_1 A + \lambda_2 B = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \end{cases}$$

Resolvendo para c_1 e c_2 temos

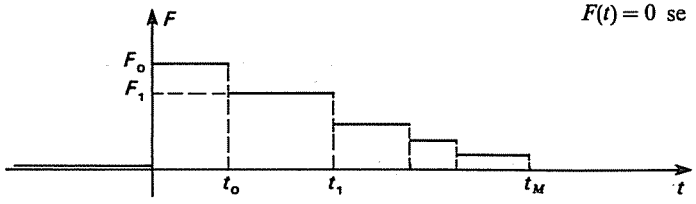
$$\begin{cases} c_1 = A - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} CV_0 \\ c_2 = B - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} CV_0 \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \text{ se } t < 0 \\ V_0 C + \left(A - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} V_0 C\right) e^{\lambda_1 t} + \left(B - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} CV_0\right) e^{\lambda_2 t} \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

Podemos também escrever

$$z(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + \left[\frac{-\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{-\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + 1\right] V_0 C\, H(t) \text{ (} H \text{ função de Heaviside)}$$

Suponha agora que desejamos obter o funcionamento de um sistema cuja influência externa é dada pela função escada $F(t)$ da Figura 3.19.



$F(t) = 0$ se $t > t_M$ ou $t < 0$

Figura 3.19

A equação a ser verificada $P(D)z = F$ pode ser escrita como

$$P(D)z = F_k \quad \text{se} \quad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k \quad \text{com} \quad 1 \leqslant k \leqslant M$$

ou

$$P(D)z = 0 \quad \text{se} \quad t < 0 \quad \text{ou} \quad t > t_M$$

Se, dadas as condições iniciais $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$, consideramos a equação apenas para $t \geqslant 0$, resolvemos

$$\begin{cases} P(D)z = F_0, \ 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ z(0) = v_0 \\ \vdots \\ z^{n-1}(0) = v_{n-1} \end{cases}$$

e obtemos a solução única $z_0(t)$.

Consideraremos agora a equação $P(D)_z = F_1$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, e as condições de choque

$$\begin{cases} z(t_0) = z_0(t_0) \\ \vdots \\ z^{n-1}(t_0) = z_0^{n-1}(t_0) \end{cases}$$

e temos um problema regular de Cauchy com solução única $z_1(t)$.

Consideraremos agora $P(D)z = F_2$ com $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ e as condições de choque

$$\begin{cases} z(t_1) = z_1(t_1) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t_1) = z_1^{n-1}(t_1) \end{cases}$$

de onde obtemos $z_2(t)$ única e daí por diante resolvemos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} P(D)z = F \\ I_0 z = v \end{cases}$$

de forma única, com uma solução com $n-1$ derivadas contínuas e com choques em $t_0, t_1, \ldots, t_M$ para a n-ésima derivada. ■

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 5, considere os sistemas em repouso para $t < 0$ e obtenha o seu funcionamento sob influência das seguintes funções:

$$P(D) = mD^2 + \gamma D + k \quad \text{e} \quad P(D)z = F(t)$$

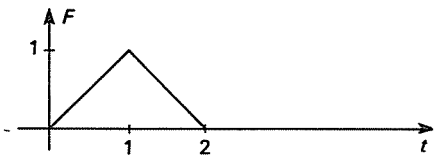
1. $F(t) = H(t) - H(t - T)$
2. $F(t) = t\,[H(t) - H(t - 1)]$

3. $F(t) = [H(t) - H(t-1)] \cos 2\pi t$

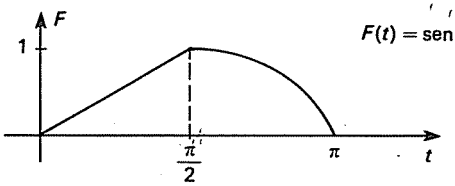
4. $F(t) = 1$ se $t \geqslant 0$

5. $F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [H(t-k+1) - H(t-k)]$

6. $F(t)$ é dada pela figura



7. $F(t)$ é dada pela figura



8. $F(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant N \quad (\lambda > 0) \\ 0 & \text{se } t > N \end{cases}$

3.4.7.3 *Método de Duhamel*

Verificamos que o problema

$$\begin{cases} P(D)\mathrm{U} = H \\ I_0\mathrm{U} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

mais as condições de choque em $x = 0$ nos dão uma solução $\mathrm{U}(x)$ única definida em toda a reta, e que têm derivadas de todas as ordens em todos os pontos, exceto em $x = 0$ onde, da N-ésima derivada em diante há saltos de descontinuidade.

Pelo princípio de invariância com o tempo, sabemos que o problema

$$\begin{cases} P(D)\mathrm{U} = H(x-s) \\ I_s\mathrm{U} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

mais as condições de choque têm solução na forma $\mathrm{U}(x-s)$.

Observe agora que se $f(x)$ for uma função com derivada contínua podemos escrever $f(0) = 0$ e

$$f(x) = \int_0^{\infty} H(x-s) f'(s)\,ds = \int_0^{x} H(x-s) f'(s)\,ds \quad \text{(Verifique!)}$$

ou seja, f pode ser escrita como "superposição contínua" da família de funções $H(x-s)$ com coeficientes $f'(s)ds$.

Assim, é natural tentar verificar se uma solução de $P(D)z = f$ pode ser dada pelo princípio de superposição como

$$z(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{U}(x-s) f'(s)\,ds = \int_0^{x} \mathrm{U}(x-s) f'(s)\,ds \tag{10}$$

Esta é a primeira fórmula de Duhamel para funções $f(x)$ contínuas e $f(0)=0$. Se $f(0)\neq 0$, considere as soluções dos problemas $P(D)u_1=f(0)$ e $P(D)u_2=f_2(x)=$ $=f(x)-f(0)$. A solução de $P(D)u=f$ será $u=u_1+u_2$.

Agora considere outra representação de $f(x)$:

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} f(s)\,H(x-s)ds \quad \text{(Verifique!)} \tag{11}$$

Neste caso, basta $f(x)$ ser contínua.

Desta forma, pelo princípio de superposição e pela comutatividade de $\frac{d}{dx}=D$ com $P(D)$ devemos ter

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \mathrm{U}(x-s)\,f(s)ds=z(x) \tag{12}$$

que é a segunda fórmula de Duhamel.

Para verificarmos a validade deste método, obervemos que

$$\mathrm{U}(x-s)\,|_{s=x}=\ldots=\mathrm{U}^{(k)}(x-s)\,|_{s=x}=\ldots=\mathrm{U}^{(n-1)}(x,s)\,|_{s=x}=0$$

e que $\mathrm{U}(x-s)$ tem derivada de toda ordem para $x>s$.

Também

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \mathrm{U}(x-s)\,f(s)ds=\mathrm{U}(x-s)\,f(s)\,|_{s=x}+\int_0^x \mathrm{U}'(x-s)\,f(s)ds$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \mathrm{U}(x-s)\,f(s)ds=\frac{d}{dx}\int_0^x \mathrm{U}'(x-s)\,f(s)ds=$$

$$=\mathrm{U}'(x-s)\,f(s)\,|_{s=x}+\int_0^x \mathrm{U}''(x-s)ds$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \mathrm{U}(x-s)\,f(s)ds=\mathrm{U}^{(N-1)}(x,s)\,f(s)\,|_{s=x}+\int_0^x \mathrm{U}^{(N)}(x,s)\,f(s)ds$$

Portanto,

$$P(D)\frac{d}{dx}\int_0^x \mathrm{U}(x,s)\,f(s)ds=\frac{d}{dx}\int_0^x P(D)\mathrm{U}(x,s)\,f(s)ds=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^x H(x-s)\,f(s)ds=f(x)$$

Considerando que a solução $\mathrm{U}(x,s)$ é obtida de soluções da equação homogênea $P(D)h=0$, podemos concluir que para obter a solução completa de qualquer equação $P(D)z=f$, para f contínua, ou com descontinuidade finita, é suficiente (e necessário) conhecer a solução completa da equação homogênea.

Observações:

a. A fórmula de Duhamel mostra claramente o princípio de causalidade, isto é, a solução $z_0(x)$ depende apenas das informações anteriores (passadas) a x e nunca das posteriores (futuras).

b. Se $\begin{cases} P(D)z = f \\ Iz = v \end{cases}$, é o problema a ser resolvido, basta que tomemos

$$z_0(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \mathrm{U}(x,s)\,f(s)$$

Como $Iz_0 = 0$ tomemos h solução de $\begin{cases} P(D)h = 0 \\ Ih = \mathrm{U} \end{cases}$ e a solução procurada será $z = Z_0 + h$.

c. Se $P(D)$ é A-estável, então h decai exponencialmente, o que mostra o regime permanente, neste caso como sendo $z_0(x)$.

d. Suponha $f(x) = e^{i\omega x}$. Então

$$z_0(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \mathrm{U}(x-s)e^{i\omega s}ds = \int_0^x \mathrm{U}'(x-s)e^{i\omega s}ds =$$

$$= e^{i\omega x}\int_0^x \mathrm{U}'(x-s)e^{-i\omega(x-s)}ds = e^{i\omega x}\int_0^x \mathrm{U}'(\mathcal{C})e^{-i\omega\mathcal{C}}d\mathcal{C}$$

Se esta última integral converge (quando $x \to \infty$), então

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} \mathrm{U}'(\mathcal{C})e^{-iN\mathcal{C}}d\mathcal{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}'(\mathcal{C})e^{-iN\mathcal{C}}d\mathcal{C} = \lim_{x\to\infty}(z_0(x)e^{-i\omega x})$$

é a transformada de Fourier de $\mathrm{U}'(\mathcal{C})$.

e. A solução $z_0(x)$ pode também ser escrita como

$$z_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{U}'(\mathcal{C})\,f(x-\mathcal{C})d\mathcal{C} \quad \text{(Verifique!)}$$

Considere agora o espaço

$$E^n(R^+ : \mathbb{C}) = \left\{ \begin{matrix} z \in C^n, \text{ tal que} \\ Iz = z(0), \ldots, z^{(n-1)}(0) = 0 \end{matrix} \right\}$$

então $P(D)\colon E^n \to C^0$ e verificamos que $P(D)$ é um operador que tem inverso dado por

$$\mathscr{L}f(x) = \int_0^x \mathrm{U}'\,f(x-\mathcal{C})d\mathcal{C}$$

A função $\mathrm{U}'(\mathcal{C})$ é chamada de *função de Green* para $P(D)$ ou também de *propagador*.

f. Tomemos agora o gráfico da função contínua $f(x)$ entre 0 e T e façamos uma subdivisão deste intervalo nos pontos $0 = x_0, \ldots, x_M = T$. Assim, a função $f(x)$ pode ser escrita na forma aproximada de uma função escada (ver Figura 3.20).

$$E_M(x) = \sum_{k=0}^{M-1} [H(x-x_k) - H(x-x_{k-1})]\,f(x_k) =$$

$$= f(x_0)H(x-x_0) + \sum_{k=1}^{M-1} H(x-x_k)\,[f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

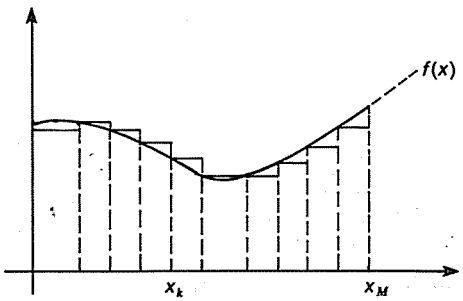


Figura 3.20

Supondo $f(x)$ com derivada contínua e usando o Teorema do Valor Médio, podemos escrever

$$f(x_0)H(x-x_0)+\sum^{M-1} H(x-x_k)f'(\bar{x}_k)\,(x_k-x_{k-1})=E_M(x)$$

Fazendo $M\to\infty$ temos (formalmente)

$$f(x_0)H(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} H(x-s)f'(s)ds=f(x),\qquad x>x_0$$

Este argumento torna-se rigoroso com um pouco de técnica da análise elementar. O que vale ressaltar aqui, no entanto, é a interessante interpretação que ele nos fornece da decomposição de um sinal qualquer em uma sucessão de pulsos.

3.4.8 Análise de Pulsos — Princípio de Superposição de Dirac-Green

As idéias básicas do princípio de superposição generalizado que apresentaremos nesta secção são devidas aos físicos matemáticos G. Green (1793-1841) e P.A.M. Dirac (1902-1986) e têm fortes e imperativas motivações, tanto do ponto de vista matemático quanto físico.

É interessante observar que o caráter não convencional destas idéias na época em que foram introduzidas causaram uma notável reação contrária e depreciativa do meio acadêmico estabelecido. Esta atitude certamente contribuiu para retardar consideravelmente o processo de absorção e incorporação destas idéias à teoria matemática oficial.

O sistema de autodefesa da matemática, sem dúvida nenhuma necessário, foi algumas vezes utilizado inadequadamente como nos casos históricos de trabalhos de Fourier, Green, Heaviside e Dirac, para citar alguns poucos e importantes exemplos.

Analisaremos aqui os argumentos matemáticos e físicos que levam naturalmente ao Princípio de Superposição de Dirac-Green utilizando através do "Método de Euler", em que a intuição é livre para agir, inibida apenas por uma boa dose de "bom senso". A justificação rigorosa (não óbvia) virá depois, se for necessário.

Comecemos pelo argumento matemático, observando que, para obtermos uma solução aproximada de

$$P(D)u=f \tag{13}$$

satisfazendo as condições iniciais homogêneas $I_0u=0$, é razoável considerar equações da forma

$$P(D)u_\varepsilon=f_\varepsilon \tag{14}$$

onde f_ε é uma aproximação de f e $I_0u_\varepsilon=0$.

A justificação deste procedimento para operadores do tipo $P(D)$ é imediata, considerando a fórmula da Secção 3.4.3 e aproximações f_ε tais que $\int_{x1}^{x_2}(f_\varepsilon-f)dx$ tende a zero quando $\varepsilon\downarrow 0$, em qualquer intervalo (x_1, x_2)*.

* A verificação desta propriedade vem sempre como um subproduto do método construtivo de soluções usado na demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de Cauchy.

Podemos utilizar a aproximação de f por superposição de funções de Heaviside, tal como

$$f(t) \sim \sum_k [H(t-k\Delta) - H(t-(k+1)\Delta)]\, f(k\Delta) \tag{15}$$

que é conveniente para efeito de integração, tendo sido motivada pela própria definição da integral de Riemann*.

Se substituirmos a função de Heaviside H pela aproximação continuamente diferenciável

$$H_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leqslant 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geqslant \varepsilon \end{cases} \qquad \text{e} \qquad 0 \leqslant H_\varepsilon(t) \leqslant 1 \quad \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \tag{16}$$

continuaremos tendo uma boa aproximação de f para os nossos propósitos, uma vez que H e H_ε diferem apenas em um conjunto de medida pequena**.

Utilizando H_ε e o Teorema do Valor Médio podemos escrever (15) na forma

$$f(t) \sim \sum_k H'_\varepsilon(t-k\Delta)\Delta f(k\Delta) \tag{17}$$

Se identificarmos a soma como uma aproximação de uma integral de Riemann, temos

$$f(t) \sim \int_a^b H'_\varepsilon(t-s)\, f(s)\, ds \tag{18}$$

Podemos agora escrever

$$f_\varepsilon(t) = \int_a^b H'_\varepsilon(t-s)\, f(s)\, ds = \frac{d}{dt}\int_a^b H_\varepsilon(t-s)\, f(s)\, ds = \int_a^b \delta_\varepsilon(t-s)\, f(s)\, ds \tag{19}$$

---

* A aproximação (15) é completamente inadequada para efeito de derivação.

** Um exemplo de $H_\varepsilon(t)$ não decrescente com n derivadas contínuas é dado por

$$H_\varepsilon(t) = \frac{t^n}{\varepsilon^n} \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$$
$$H_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{para} \quad t \leqslant 0$$
$$H_\varepsilon(t) = 1 \quad \text{para} \quad t \geqslant \varepsilon$$

Considere agora a função com derivadas contínuas de toda ordem definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ e^{t-1/2} & \end{cases}$$

Tomando

$$A_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \varphi(t)\varphi(\varepsilon - t)\, dt \text{ podemos então construir}$$

$$H_\varepsilon(t) = \frac{1}{A_\varepsilon}\int_{-\infty}^t \varphi(s)\varphi(\varepsilon - s)\, ds \text{ infinitamente diferenciável}$$

não decrescente. (Verifique!)

Observe que $P(D)v = H_\varepsilon$ pode ser facilmente resolvida se H_ε é polinomial mas o mesmo não ocorre no caso exponencial.

para todo $t \in (a, b)$* onde $\delta_\varepsilon(s)$ são funções que satisfazem as propriedades seguintes:

1. $\delta_\varepsilon(s) = 0$ se $s \leqslant 0$ ou $s \geqslant \varepsilon$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon ds = 1$;
3. $\delta_\varepsilon(s) \geqslant 0$ (pois tomamos H_ε não decrescentes).

Uma família de funções $\delta_\varepsilon(s)$, satisfazendo as propriedades anteriores, é denominada *seqüência de Dirac*.

Se δ_ε é n vezes continuamente diferenciável, f_ε tem n derivadas contínuas e aproxima-se de f uniformemente em cada intervalo fechado.

O princípio de superposição passa a ser contínuo com o uso das δ_ε, ou seja, se $G_\varepsilon(t, s)$ são soluções de

$$\begin{cases} P(D_t)G_\varepsilon = \delta_\varepsilon(t - s) \\ I_0 \mathrm{U} = 0 \end{cases} \tag{20}$$

a superposição no parâmetro s nos dá

$$P(D_t)\left(\int_a^b G_\varepsilon(t, s) f(s) ds\right) = f_\varepsilon(t) = \int_a^b \delta_\varepsilon(t - s) f(s) ds \tag{21}$$

Isto nos garante (formalmente até agora) que, conhecendo-se as soluções $G_\varepsilon(t, s)$ de (20), podemos resolver (aproximadamente) qualquer Equação (13). Supondo agora que as funções G_ε tenham um limite razoável

$$G(t, s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G_\varepsilon(t, s)$$

a solução de (13) poderá ser obtida na forma

$$u = \int_a^b G(t, s) f(s) ds \tag{22}$$

É natural tentar obter uma caracterização de G como solução do problema limite fazendo $\varepsilon \downarrow 0$ em (20), tal como na equação $P(D)u = H_\varepsilon$. Entretanto, ao contrário do caso anterior, a seqüência δ_ε não se aproxima pontualmente de nenhuma função. Esta observação invalida o método mas não o argumento, isto é, a função limite $G(t, s)$ deverá ser caracterizada de outra maneira (quando G existir).**

---

* Integrais do tipo $h(t) = \int_a^b g(s) f(t - s)\, ds$ são chamadas *convoluções* e denotadas por $h = g * f$.

** A demonstração de existência de $G(t, s)$, chamada função de Green, e um método simples para sua construção analítica a partir de soluções da equação homogênea serão apresentados adiante, onde usamos operadores lineares gerais de coeficientes contínuos.

No caso particular de operadores de coeficientes constantes, a obtenção de $G(s, t)$ é relativamente simples, uma vez que a operação $\frac{d}{dt} = D$ comuta com o operador linear $P(D)$. Neste caso, derivando a equação

$$P(D)\mathrm{U}_\varepsilon = H_\varepsilon(t-s)$$

temos

$$P(D)\left(\frac{\partial \mathrm{U}_\varepsilon}{\partial t}\right) = \delta_\varepsilon(t-s)$$

ou seja

$$G_\varepsilon(t,s) = \frac{\partial \mathrm{U}_\varepsilon}{\partial t}(t,s) \tag{23}$$

Com isto podemos provar que $G_\varepsilon(t, s)$ converge para uma função $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}(t, s)$ com $n-2$ derivadas contínuas.

Lembrando que $\mathrm{U}(t, s)$ é obtida como solução de

$$\begin{cases} P(D)\mathrm{U} = H(t-s) \qquad (t \neq s) \\ I_0\mathrm{U} = 0 \\ \lim\limits_{t \uparrow s} \mathrm{U}^{(k)}(t,s) = \lim\limits_{t \downarrow s} \mathrm{U}^{(k)}(t,s), \ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases} \tag{24}$$

Verificamos que

$$[a_n\mathrm{U}^{(n)}(t,s) + \ldots + a_0\mathrm{U}(t,s)] = [H(t-s)]_{s^-}^{s^+} \text{ e daí } a_n[\mathrm{U}^{(n)}]_{s^-}^{s^+} = 1 \tag{25}$$

ou seja, a n-ésima derivada de U tem um salto de $\frac{1}{a_n}$ em $t = s$. Portanto, as condições de transição para a função de Green são dadas por

$$\begin{cases} P(D)G = 0 \\ I_0G = 0 \\ G^{(k)}(t,s)]_{s^-}^{s^+} = 0, \quad t \neq s \quad \text{e} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2 \\ G^{(n-1)}(t,s)]_{s^-}^{s^+} = \frac{1}{a^n} \end{cases} \tag{26}$$

Uma vez provada a existência da função limite G torna-se desejável defini-la como solução de um problema simbólico

$$\begin{cases} P(D_t)G(t,s) = \delta(t-s) \\ I_0G = 0 \end{cases} \tag{27}$$

em que δ seria o limite de δ_ε quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Como já frisamos anteriormente, não é possível caracterizar δ como um limite de δ_ε, sendo uma função definida ponto a ponto. Entretanto, é possível caracterizar o *efeito* limite da seqüência δ_ε como o termo não homogêneo da Equação (20) e na convolução com uma função contínua como em (19).

Desta forma o símbolo δ é definido pelo efeito limite de seqüências de Dirac em determinadas operações. Por esta razão δ é usualmente denominada *função generalizada delta de Dirac.*

Como exemplo, calculemos a solução do problema (simbólico)

$$\begin{cases} (mD_t^2 + cD_t + k)G(t,s) = \delta(t-s) \\ G(0,s) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial t}(0,s) = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Vamos supor que as raízes α e β do polinômio característico $P(\lambda) = m\lambda^2 + c\lambda + k$ sejam da forma

$$-\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \qquad \text{com} \qquad \frac{k}{m} > \left(\frac{c}{2m}\right)^2$$

As soluções homogêneas são dadas por combinações lineares de $e^{\alpha t}$ e $e^{\beta t}$.

A solução no intervalo $(0, s)$ será nula em vista das condições iniciais que a determina. A solução para $t > s$ será obtida na forma

$$G(t,s) = a(s)e^{\alpha t} + b(s)e^{\beta t}$$

Impondo as condições de transição tais como as dadas em (26), temos um sistema de duas equações lineares para $a(s)$ e $b(s)$

$$\begin{cases} 0 = ae^{\alpha s} + be^{\beta s} \\ \dfrac{1}{m} = \alpha a e^{\alpha s} + \beta b e^{\beta s} \end{cases} \tag{29}$$

que pode ser resolvido pois $\det \begin{pmatrix} e^{\alpha s} & e^{\beta s} \\ \alpha e^{\alpha s} & \beta e^{\beta s} \end{pmatrix} = e^{(\alpha+\beta)s}(\beta - \alpha) \neq 0.$

Obtemos assim

$$G(t,s) = \frac{2m}{\sqrt{4km - c^2}} e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)(t-s)} \operatorname{sen}\left[\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\ (t-s)\right] H(t-s)$$

Vamos agora analisar rapidamente a motivação física para considerar um problema do tipo

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta_\varepsilon(t-s) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{30}$$

Suponhamos que um oscilador harmônico em repouso (ver Figura 3.21) receba o impacto de uma partícula de massa bem pequena $m \ll M$, mas portadora de uma quantidade de movimento $mv = 1$ que passa a ser totalmente incorporado à massa M.

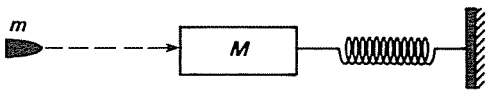


Figura 3.21

O processo de transferência desta quantidade de movimento é fisicamente complicado devido à microestrutura do choque, mas pode ser considerado como tendo sido efetuado por uma força $F_\varepsilon(t)$ da qual dispomos, tão somente, das seguintes informações (ver Figura 3.22):

$$\begin{cases} F_\varepsilon(t) = 0 & \text{para} \quad t < s \\ F_\varepsilon(t) = 0 & \text{para} \quad t \geqslant s + \varepsilon \\ \displaystyle\int_s^{s+\varepsilon} F_\varepsilon(t)\,dt = 1 & \text{com} \quad F_\varepsilon(t) \geqslant 0 \end{cases} \tag{31}$$

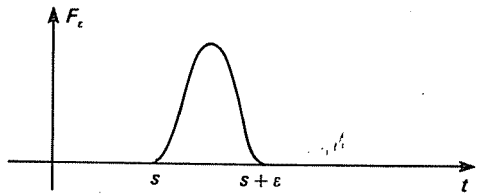


Figura 3.22

Como não conhecemos o processo de choque, é razoável que tentemos um meio de determinar aproximadamente o movimento do oscilador quando as únicas informações disponíveis são dadas por (31). Para isto, é necessário saber se o oscilador "responde" coerentemente a estes pulsos, isto é, se é possível caracterizar um funcionamento $x(t)$ limite do oscilador para pulsos do tipo (31) para $\varepsilon \downarrow 0$, *independente da microdinâmica de cada um.*

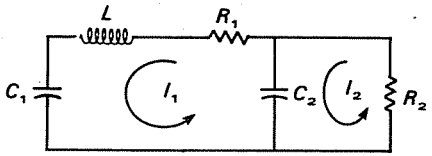
Considerando que o movimento do oscilador é bem descrito pelo problema de Cauchy (30), a questão torna-se puramente matemática e é a mesma que já analisamos e cuja solução é dada pelo problema de Cauchy com condições de transição (26).

EXERCÍCIOS

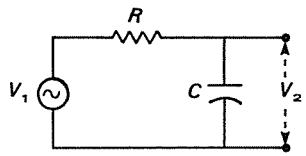
1. Construa as funções de Green para os problemas de valor inicial nulo com os seguintes operadores $P(D)$
   a. $P(D) = D^n$
   b. $P(D) = D^4 - k^2$
   c. $P(D) = (D^2 + 1)D(D - 1)$
2. Obtenha a função de Green que resolve o problema de fronteira $u(0) = u(1) = 0$ para $P(D) = D^2 + 4$ e interprete a solução fisicamente como um problema de difusão.
3. Obtenha a solução de

$$\begin{cases} P(D)z = \delta(t - s) \\ I_s z = 0 \end{cases}$$

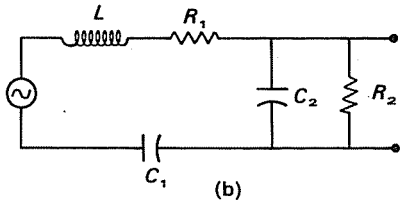
   para o circuito básico *RLC*.
4. Estude o circuito:



5. Analise a função de transferência para: amplificação, distorção, filtragem e atraso de fase para os circuitos abaixo:



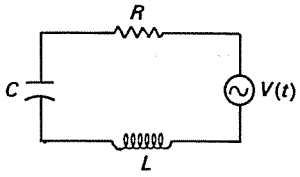
(a)



(b)

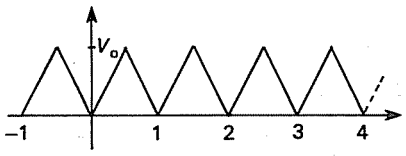
Analise a resposta V_2 do sistema para um contacto (instantâneo) $V_0H(t)$ em V_1. Obtenha a função de Green para este sistema.

6. Analise a resposta do circuito *RLC*



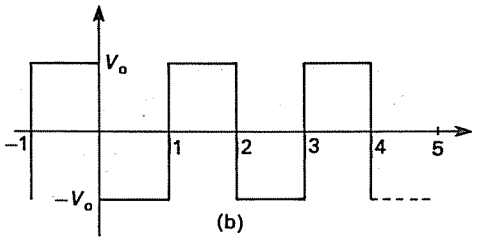
para

a. $V(t)$ em serra



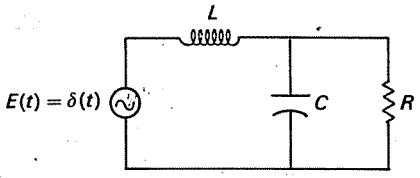
(a)

b. $V(t)$ em salto e $V(t)=0$ para $t \leqslant 0$



(b)

7. Analise a resposta do circuito para um pulso:



$L > 4R^2C$

8. Um pêndulo em repouso de massa M recebe uma bala de massa m e velocidade v que se aloja na massa M. Supondo o impacto como um pulso, analise a resposta do pêndulo.

3.5 EQUAÇÕES LINEARES DE DIFERENÇAS FINITAS

3.5.1 Conceitos Básicos

As equações de diferenças finitas lineares são problemas matemáticos muito semelhantes, no seu formalismo, às equações diferenciais lineares ordinárias.

Estas equações têm origem em vários problemas, geralmente ligados a relações de recorrência muito comuns em combinatória, probabilidade, economia, pesquisa operacional e no tratamento numérico das equações diferenciais.

Neste caso, estamos estudando funções definidas em

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}^+ \quad \text{ou} \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

com valores complexos

$$V(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$$

ou

$$V(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}\}$$

Podemos também pensar em $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ como uma seqüência ou como a discretização de uma função $\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $f_n = f(n) = \tilde{f}(x_0 + nh)$.

O operador fundamental para estes problemas

$$E : V(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \to V(\mathbb{Z}, \mathbb{C}),$$

chamado operador deslocamento ("shift") é definido por

$$Ef(n) = f(n+1)$$

O operador

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (E - I) f(n)$$

é chamado operador de diferença à frente.

Observe que se f é discretização de $\tilde{f}$, então

$$\frac{1}{h}\Delta f = \frac{\tilde{f}(x_0 + nh + h) - \tilde{f}(x_0 + nh)}{h} \sim \tilde{f}'(x_0 + nh) \sim D\tilde{f}(x_n) \quad \text{e}$$

$$\left(\frac{\Delta}{h}\right)^2 f = \frac{\Delta}{h}\,\frac{f(n+1) - f(n)}{h} = \frac{(f(n+2) - f(n+1)) - (f(n+1) - f(n))}{h^2} =$$

$$= \frac{f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)}{h^2} = \frac{\dfrac{\tilde{f}(x_{n+2}) - \tilde{f}(x_{n+1})}{h} - \dfrac{\tilde{f}(x_{n+1}) - \tilde{f}(x_n)}{h}}{h} \sim D^2\tilde{f}(x_{n+1})$$

É claro que $V(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ é um espaço vetorial de funções com escalares complexos e E é um operador linear, assim como $\Delta = E - I$.

Também definimos

$$E^{-1}f(n) = f(n-1); \quad \nabla f(n) = f(n) - f(n-1) \text{ e } \delta f(n) = f(n+1) - f(n-1)$$

Estamos interessados em estudar equações de recorrência de ordem N tais como

$$f(n) = b_1 f(n-1) + b_2 f(n-2) + \ldots + b_N f(n-N)$$

ou

$$f = \sum_{k=1}^{N} b_k E^{-k} f = \sum_{k=1}^{N} b_k f(N-k)$$

ou

$$\sum_{k=0}^{N} b_k E^{-k} f = 0 \qquad (b_0 = -1)$$

ou, ainda, aplicando E^N à equação anterior, temos

$$\sum_{k=0}^{N} b_k E^{N-k} f = 0$$

Tomando $b_k = a_{N-k}$ e $b_0 = a_N$ podemos escrever $\sum_{k=0}^{N} a_k E^k f = 0$, que tem muita semelhança com o operador

$$P(D) = \sum_{k=0}^{N} a_k D^k, \qquad a_N \neq 0$$

O polinômio $P(\lambda)$ é chamado característico da equação de diferenças.

Observe que no caso de D as funções que desempenharam um papel fundamental na solução de $P(D)z = f$ foram as autofunções de D, isto é, $Du = \lambda u$, que sabemos ser $u(t) = e^{\lambda t}$.

Seguindo o mesmo caminho, verificamos que as autofunções para E são:

$$Ef = \lambda f$$
$$f(n+1) = \lambda f(n)$$

Isto implica que $f(1) = \lambda f(0), \ldots, f(n) = \lambda^n f(0)$.

Portanto, podemos tomar como autofunções de E as funções de $V(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ dadas por $f_\lambda(n) = \lambda^n$ para $\lambda \in \mathbb{C}$.

Também é fácil ver a analogia com o problema de Cauchy. Observe que se

$$P(E) f = 0 \qquad (a_N \neq 0)$$
$$\sum_{k=0}^{N} a_k E^k f = 0$$

então

$$f(n+N) = -\frac{1}{a_N}\left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k f(n+k)\right)$$

Verificamos que se soubermos $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$, determinaremos f_N pela equação de recorrência e daí com $f_1, \ldots, f_N$ calcularemos f_{N+1}. Repetindo o argumento, construímos indutivamente toda a função f para $n \geqslant 0$.

Fica claro assim que o equivalente do problema de Cauchy para uma equação de diferença de ordem N é

$$\begin{cases} P(E) f = 0 \\ f_0 = v_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} = v_{N-1} \end{cases}$$

e não há necessidade de demonstrarmos Teoremas de Existência e Unicidade que são óbvios.

Por enquanto nos fixaremos apenas nas equações de recorrência $P(E)f=0$ que são equações de diferenças finitas lineares homogêneas: $(a_N \neq 0)$.

Observe que o problema de valor inicial para uma equação linear de diferenças é completamente resolvido do ponto de vista algorítmico e computacional, pela própria relação de recorrência a partir das condições iniciais. Entretanto, um algoritmo não nos fornece o comportamento analítico de $f(n)$ com relação à variável inteira n quando esta tende ao infinito. Uma forma explícita de resolver a equação seria obter uma expressão analítica para a função $f(n)$. Tal como nas equações diferenciais, em geral isto nem sempre é possível, mas no caso linear e de coeficientes constantes (independentes de n), bem como nas equações diferenciais, a expressão analítica das soluções é possível de ser obtida. O método para este tipo de resolução será o resultado do seu trabalho no projeto proposto a seguir.

Analisaremos na próxima secção dois problemas distintos e representativos, um em probabilidade e combinatória e outro relacionado à discretização de um problema mecânico, cujos modelos matemáticos levam ao estudo das equações lineares de diferenças finitas.

PROJETO 1

Desenvolva uma teoria sobre soluções de $P(E)f=0$ análoga àquela apresentada para as equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes, e obtenha um método para o cálculo do espaço de soluções $N(P(E))$ em $V(\mathbb{Z}^+, \mathbb{C})$. Mostre que se $(E-\lambda)v=0$ então $v_k=c\lambda^k$.
Mostre que $(E-\lambda)^m(\lambda^k w_k)=\lambda^{k+m}\Delta^m w_k$.
Mostre que $\Delta^m(k^{j_0})=0$ se $0 \leqslant j_0 \leqslant m-1$ com $\Delta=E-I$.
Defina estabilidade e estabeleça condições.

3.5.2 Problema Semidiscretizado da Corda Vibrante

Considere uma corda uniforme perfeitamente elástica com extremidades presas e sujeita a uma vibração de pequena amplitude em um plano vertical.

Para estudar o seu movimento dividiremos a corda em uma seqüência de $N+1$ pontos e N segmentos uniformes, supondo que suas massas estejam concentradas em N nós e que as ligações entre eles sejam elásticas obedecendo à lei de Hooke. (*A força de restauração exercida por uma mola de comprimento inicial L, alongada por um pequeno comprimento* δ, *é* $\alpha' \dfrac{\delta}{L}=\alpha\delta$.)

A posição vertical do k-ésimo nó será denotada por $y_k(t)$ e o movimento de cada um obedecerá à segunda Lei de Newton:

$$M\frac{d^2y_k}{dt^2} = \textit{componente vertieal das forças elásticas atuando sobre o ponto } y_k$$

Uma suposição comum nestes problemas é de que a tensão T em toda corda é constante. Assim, a componente vertical que o ponto $k+1$ exerce sobre y_k é,

$$T\frac{y_{k+1}-y_k}{[(L/N)^2+(y_{k+1}-y_k)^2]^{1/2}}=\frac{T}{L/N}\;\frac{y_{k+1}-y_k}{\left[1+\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{L/N}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Supondo que $\frac{y_{k+1}-y_k}{L/N}$ seja pequeno comparado com a unidade (uma vez que as amplitudes de vibração são pequenas), como mostra a Figura 3.23, podemos utilizar para a componente vertical a expressão linearizada

$$\frac{T}{L/N}(y_{k+1}-y_k)$$

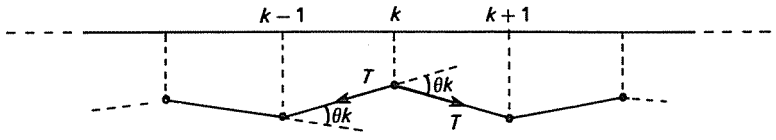


Figura 3.23

A força exercida por y_{k-1} em y_k é dada, aproximadamente, por

$$\frac{T}{L/N}(y_{k-1}-y_k)$$

Somando ambos os termos, temos:

$$M\frac{d^2y_k}{dt^2}=\frac{T}{L/N}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})$$

$$\boxed{M\frac{d^2y_k}{dt^2}=\frac{T}{L/N}\;\Delta^2 y_{k-1}}$$

Temos, então, um sistema de N equações diferenciais de segunda ordem acopladas para $\{y_k(t)\}_{1\le k\le N}$. Este é um assunto a ser tratado no capítulo seguinte, mas podemos obter $y_k(t)$ em forma de superposição de oscilações monocromáticas. Tomando $y_k(t)=e^{i\omega t}u_k$ tentaremos obter as freqüências ω que tornem possível vibrações monocromáticas da corda.

$$-m\omega^2 e^{i\omega t}u_k=\frac{T}{L/N}\Delta^2 u_{k-1}e^{i\omega t}$$

de onde tiramos a equação para u_k

$$-\omega^2 u_k=\left(\frac{T/M}{L/N}\right)\Delta^2 u_{k-1}$$

que é uma equação linear de diferenças finitas à qual serão acrescentadas as condições laterais

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

Observe que o nosso problema é obter os números ω para os quais existe uma solução do problema

$$\begin{cases} P(E)u = 0 \\ Iu = 0 \end{cases}$$

onde

$$P(E) = E^2 - 2\left(1 - \omega^2 \frac{ML}{2NT}\right) E + 1$$

e $Iu = (u_0, u_{N+1})$.

Como

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + 1$$
$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$
$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$
$$a = 1 - \omega^2 \frac{ML}{2NT}$$

temos

$$P(E) = (E - \lambda_1)(E - \lambda_2)$$

A solução geral de $P(E)u = 0$, isto é, $N(P(E))$ é soma direta dos espaços $N((E - \lambda_1))$ e $N(E - \lambda_2)$.

$$(E - \lambda_1)v = 0 \Rightarrow Ev = \lambda_1 v \Rightarrow v_p = C_1 \lambda_1^p$$
$$(E - \lambda_2)w = 0 \Rightarrow Ew = \lambda_2 w \Rightarrow w_p = C_2 \lambda_2^p$$

e a solução geral $u_p = C_1 \lambda_1^p + C_2 \lambda_2^p$.

Observe que λ_1, λ_2 dependem de ω que até agora está livre. A restrição sobre ω virá das condições laterais impostas a u_p:

$$u_0 = 0 \Rightarrow C_1 \lambda_1^0 + C_2 \lambda_2^0 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 = C$$
$$u_{N+1} = 0 \Rightarrow C(\lambda_1^{N+1} - \lambda_2^{N+1}) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{N+1} = 1$$

A equação $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{N+1} = 1$ restringirá os valores possíveis de ω, isto é, veremos que as freqüências constantes do espectro de vibração de $\{y_k\}_{0 \le k \le N+1}$ são muito bem caracterizadas e em número finito.

Observe inicialmente que no caso de raízes reais, a condição acima só poderá ser satisfeita se $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, mas esta é a solução nula, uma vez que devemos ter

$C_1 = -C_2$. Observe também que se as raízes não são reais, $a^2 < 1$ e, portanto, têm módulo unitário.

Portanto, podemos supor que $\lambda_1 = e^{i\theta}$ e $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, de onde

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{N+1} = 1 \Rightarrow (e^{i2\theta})^{N+1} = 1$$

ou seja, $e^{i2\theta}$ pode ser uma das N raízes da unidade

$$2\theta_m = m\frac{2\pi}{N+1},\ m = 0, \ldots, N+1$$

Mas para $m = 0$ temos o caso real, já descartado.

Portanto, devemos ter $\theta_m = m\dfrac{\pi}{N+1}$; $m = 1, \ldots, N+1$.

A cada m temos uma equação para ω:

$$\omega_m^2 = \frac{2T(N+1)}{ML}(1 - \cos\theta_m)$$

$$\omega_M = 2\sqrt{\frac{T(N+1)}{ML}}\,\text{sen}\,\frac{\theta_m}{2} = 2\sqrt{\frac{T(N+1)}{ML}}\,\text{sen}\,\frac{m\pi}{2(N+1)}$$

$$m = 1, \ldots, N$$

Estas são as freqüências "naturais" de vibração da corda e uma vibração geral é decomposta em oscilações onde a k-ésima amplitude u_{km} é dada por $\text{sen}\,\dfrac{km\pi}{N+1} = u_{km}$.

Uma oscilação geral será dada por

$$y_k = \sum_{-N}^{N} C_m^* e^{i\omega_m t}\, u_{km}$$

ou

$$y_k = \sum_{1}^{N} C_m u_{km}\,\text{sen}\,(\omega_m t + \phi_m)$$

Observe a semelhança desta expressão com aquela obtida para sistemas conservativos na Secção 3.4.5.2. Tomando agora uma corda de densidade constante ρ, temos $M = \dfrac{\rho L}{N}$ e

$$\omega_m^{(N)} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}N^2}\,\text{sen}\,\frac{m\pi}{2(N+1)}$$

Fazendo $N \to \infty$, isto é, aumentando as repartições da corda, temos

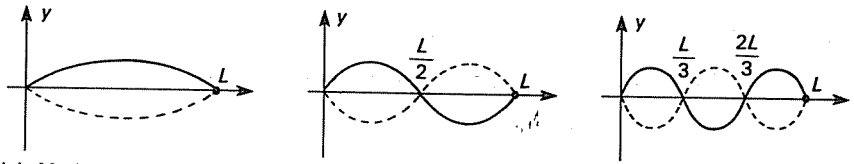
$$\lim_{N\to\infty} \omega_m^{(N)} = \omega_m = m\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

de onde vem a Lei de Mersenne: "Todas as freqüências de vibrações de uma corda de violino são múltiplas da freqüência fundamental

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

e cada uma é diretamente proporcional à raiz quadrada da tensão e inversamente proporcional ao comprimento da corda e à raiz quadrada da sua densidade".

Este é o princípio fundamental na afinação de instrumentos de corda! Observe que na freqüência fundamental de vibração a corda não tem nós, o que aparece nas outras freqüências, mas de forma ordenada (ver Figura 3.24).



(a) Modo fundamental ou primeiro harmônico $n=1$ (b) Segundo harmônico $n=2$ (c) Terceiro harmônico $n=3$

Figura 3.24 Modos ou tons normais da corda vibrante

EXERCÍCIO

1. Considere um reticulado linear infinito com massas alternadamente m e M ligadas por forças elásticas de Hooke. Analise a propagação de ondas monocromáticas no reticulado.
   Este é um modelo para vibração atômica do cristal de cloreto de sódio tal como foi inicialmente idealizado por Max Born. Para este e outros interessantes problemas que podem ser tratados por equações de diferenças finitas consulte
   BRILLOVIN, L. *Wave Propagation in Periodic Structure*. New York, Dover, 1953.

3.5.3 Seqüência de Fibonacci

Curiosidade:

Leonardo de Pisa (1180-1250), mais conhecido como Fibonacci, foi o principal introdutor da Matemática dos árabes no ocidente. Fibonacci é considerado o matemático mais original e criativo do mundo cristão medieval. Em seu livro *Liber Abaci* (Livro de Ábaco), de 1202, encontra-se o problema que deu origem à sua famosa seqüência:

"Quantos coelhos teremos num ano, começando com um só casal, se em cada mês cada casal adulto gera um novo casal, o qual se torna produtivo em dois meses?"

A seqüência de Fibonacci, oriunda deste problema, tem muitas propriedades interessantes e significativas. Citaremos algumas:

1. A razão de crescimento de termos sucessivos forma uma nova seqüência

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

que converge para $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (exatamente o valor de uma das raízes do polinômio característico associada à equação de diferenças (1)).

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como *número de ouro*, sendo encontrado nos retângulos áureos: um retângulo é áureo quando, ao retirarmos dele um quadrado, obtemos ainda um retângulo semelhante ao inicial, conforme mostra a Figura 3.25. Ou seja

$$\frac{n+m}{m}=\frac{m}{n} \Rightarrow m^2-nm-n^2=0$$

e portanto

$$\frac{m}{n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

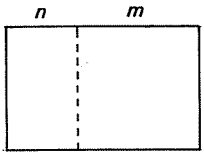


Figura 3.25 Retângulo áureo

2. A disposição das folhas em um ramo obedece quase sempre a uma seqüência de Fibonacci, isto é, o número de folhas necessárias para se completar um período de revolução deve estar na seqüência de Fibonacci.

Muitos cientistas têm tentado explicar a incidência dos números de Fibonacci na Filotaxia, talvez a simetria para que se tenha um melhor equilíbrio do galho, melhor exposição ao Sol etc. Ocasionalmente os números de Fibonacci ocorrem em genética de populações, em flósculos de flores compostas etc. e sua aparição é tão freqüente que não podem ser explicados como casuais!

Como exemplo, considere inicialmente o seguinte problema de combinatória: sinais na forma binária (ou digital) são seqüências finitas dos dígitos 0 e 1, e diz-se que um sinal é não confluente se em posições adjacentes não ocorrem o dígito 1 repetido.

Para determinar quantos sinais não confluentes de n dígitos é possível obter, vamos supor que $f(n)$ seja esta quantidade. Verificamos que se o último dígito for 0 os $n-1$ anteriores poderão ter qualquer disposição que os torne um sinal não confluente de $n-1$ dígitos em um total de $f(n-1)$.

Se o último dígito for 1, então o penúltimo será 0 e os anteriores, pelo mesmo argumento, poderão ser dispostos de $f(n-2)$ formas possíveis.

Logo,

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2) \tag{1}$$

Neste caso as condições iniciais são

$$f(1)=2\ (\boxed{0}\ ;\ \boxed{1})\quad f(2)=3\ (\boxed{0}\boxed{1}\ ;\ \boxed{0}\boxed{0}\ ;\ \boxed{1}\boxed{0}).$$

Façamos $f(0)=1$ por consistência.

Portanto, estamos diante do problema de valor inicial

$$\begin{cases} P(E)f=0 \\ If=(f(0),\ f(1)=(1,2)) \end{cases}$$

$$P(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1 \quad \text{com} \quad P(E)=E^2-E-I.$$

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \quad \text{e} \quad P(E)=(E-\lambda_1)(E-\lambda_2)$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Para calcular $N(P(E))$, devemos determinar $N(P(E-\lambda_1))$ e $N(P(E-\lambda_2))$ em $V(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

$$(E-\lambda_1)v=0 \Leftrightarrow Ev=\lambda v \Leftrightarrow v_{k+1}=\lambda_1 v_k \Leftrightarrow v_k=C_1\lambda_1^k$$

e

$$(E-\lambda_2)w=0 \Leftrightarrow w_k=C_2\lambda_2^k$$

Portanto, a solução geral de $P(E)f=0$ é

$$f_k=C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k+C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Impondo as condições iniciais $f_0=1$ e $f_1=2$, obtemos

$$C_1+C_2=1$$
$$C_1\frac{1-\sqrt{5}}{2}+C_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}=2$$

de onde vem

$$C_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad C_1=\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$$

$$f(k)=\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Observe que, para $k \to \infty$, como $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1$, o primeiro termo decai exponencialmente e o segundo termo aumenta exponencialmente e, portanto,

$$f(k)\cong\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande}$$

Observações deste tipo nos levam ao problema de estabilidade das soluções de equações lineares de diferenças.

EXERCÍCIOS

1. Considere o seguinte problema: seja $f(n)$ a probabilidade de que em n lançamentos de uma moeda perfeita não sejam obtidas três caras consecutivas. Obtenha $f(n)$ como uma equação de diferença de terceira ordem

$$P(E)f=\left(E^3-\frac{1}{2}E^2-\frac{1}{4}E+\frac{1}{8}\right)f=0$$

Mostre que a maior raiz de $P(\lambda)$ é $\lambda_1 \cong 1{,}0873778$ e obtenha o comportamento de $f(n)$ quando $n \to \infty$.

2. Obtenha uma fórmula para escrever $f(x_0+h)$ em termos das N diferenças de

$$f_i=f\left(x_0+i\frac{h}{N}\right), \qquad 0 \leqslant i \leqslant N$$

(Escreva $E^N=(\Delta+I)^N$ e utilize a fórmula binomial.)

3. Justifique a notação e^{hD} para o operador "shift" $E_h f(x) = f(x+h)$. (Escreva formalmente e^{hD} como uma série.)
4. Problema da ruína do apostador ou caminho aleatório com absorção: Suponha que dois jogadores A e B façam apostas sobre o lançamento de uma moeda perfeita, onde cara significa o ganho de 1 para A e perda de 1 para B e coroa o inverso. A inicia o jogo com a quantia a e B com b. Seja $f(n)$ a probabilidade de que A vença o seu oponente, no momento em que ele está de posse da quantia n e seu adversário $a+b-n$. Mostre que

$$f(n) = \frac{1}{2} f(n-1) + \frac{1}{2} f(n+1)$$

e estabeleça as condições laterais para $n=0$ e $n=a+b$ (suponha que o jogo termine com a ruína de um dos apostadores!). Calcule $f(n)$ como função de n.

Pense no problema como o caminho aleatório de uma partícula que pode tomar qualquer posição nas coordenadas inteiras entre $-a$ e b, sendo absorvida nas extremidades. De uma posição, passa para a seguinte à esquerda ou à direita, com probabilidade p e q respectivamente.

5. Mostre que $P(E)(\gamma^k) = P(\gamma)\gamma^k$ e, portanto, uma solução particular de $P(E)u = \gamma^k$ é dada por $\dfrac{\gamma^k}{P(\gamma)}$, quando γ não é raiz de P.
6. Mostre que $(E-\gamma)^m \gamma^k w_k = \gamma^{k+m} \Delta^m w_k$ por indução em m, onde $\Delta = E - I$.
7. Se γ é raiz de ordem m para $P(\lambda)$ obtenha uma solução para o caso ressonante $P(E)u_k = \gamma^k$.

Sugestão: Utilize o exercício 6 e o fato de que $\Delta^m(k^m) = m!$ Analisando a equação na forma

$$Q(E)(E-\gamma)^m (\gamma^k \gamma^{-k} u_k) = \gamma^k.$$

8. (Método de Quase Inversão) Suponha que $P(E)u_k = g(k)$, onde $g(k)$ é um polinômio de grau m. Por exemplo

$$P(E) = E^2 - 4E + 4; \quad g(k) = k^2$$

a. Escreva $P(\lambda) = Q(\lambda - 1)$. Por exemplo, se $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1 + 1)^2 - 4(\lambda - 1 + 1) + 4 = (\lambda - 1)^2 - 2(\lambda - 1) + 1$$
$$Q(\lambda - 1) = P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 2(\lambda - 1) + 1; \; Q(z) = z^2 - 2z + 1$$

b. Inverta $Q(z)$ até a ordem $m+1$, isto é, obtenha um polinômio $M(z)$, tal que $Q(z)M(z) = 1 + R(z)z^{m+1}$, $R(z)$ polinômio. Por exemplo, $q(x) = k^2$, $m = 2$. Utilizando o algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r|l} 1 & z^2 - 2z + 1 \\ \hline z^2 - 2z + 1 & 1 + 2z + 3z^2 \\ \hline -z^2 + 2z & \\ \hline 2z^3 - 4z^2 + 2z & \\ \hline -2z^3 + 3z^2 & \\ \hline 3z^4 - 6z^3 + 3z^2 & \\ \hline -3z^4 + 4z^3 & \end{array}$$

$$M(z) = (1 + 2z + 3z^2)$$
$$z^3 R(z) = z^3(-3z + 4)$$
$$P(\lambda)M(\lambda - 1) = 1 + (\lambda - 1)^3 R(\lambda - 1)$$

c. O objetivo é "inverter" o operador $P(E) = Q(\Delta)$ até a ordem $m+1$, em que a aplicação de $\Delta^{m+1}(g(k)) = 0$ e, portanto, basta que $Q(\Delta)$ seja invertido somente até esta ordem.

O que era aparentemente apenas uma formalidade audaciosa ganha substância matemática se fizermos o seguinte:

$$P(E)M(\Delta)g(k) = (I + R(\Delta)\Delta^{m+1})g(k) = g(k) + R(\Delta)\Delta^{m+1} g(k) = g(k)$$

ou seja, $M(\Delta)g(k)$ é uma solução para $P(E)u_k = g(k)$.

Por exemplo:

$$(1+2\Delta+3\Delta^2)k^2 = k^2 + 2\Delta(k^2) + 3\Delta^2(k^2) = k^2 + 2\{(k+1)^2 - k^2\} + 3\Delta(\Delta k^2) = \\ = k^2 + 4k + 2 + 3\Delta(2k+1) = k^2 + 4k + 8$$

9. Resolva a equação *não linear*: $a_{k+2} = \dfrac{a_{k+1}^2}{a_k}$. (Sugestão: Faça $u_k = \log a_k$.)

10. Resolva as seguintes equações de diferenças obtendo a solução geral:

a. $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k + 2$
com $u_0 = 1$, $u_1 = 1$

b. $u_{k+1} = \dfrac{1}{2} u_{k+1}$

obtenha o limite de u_n para $u \to \infty$, se $u_0 = 1$

c. $u_{k+1} - u_{k-1} = 2\lambda u_k$, $u_0 = 1$ e $u_1 = e^{-\lambda}$

d. $u_{k+1} - u_{k-1} = 2\lambda v_n$, $v_0 = 1$ e $v_1 = 1 - \lambda + \dfrac{\lambda^2}{2}$. Compare com u_k de (*c*)

e. $u_{k+2} - 2u_{k+1} + 2u_k = 0$, $u_0 = 1$, $u_1 = 1$
Mostre que $u_k = 2^{n/2} \cos\left(\dfrac{k\pi}{4}\right)$

f. $P(E)u_k = \cos 3k + k^2 \operatorname{sen} 2k$, $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$

g. $u_{k+2} + u_k = k$

h. $u_{k+2} + u_k = \gamma_k$

i. $u_{k+2} - u_{k+1} - u_k = k^3$

j. $u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^2 + 2^k + 1$

k. $u_{k+2} - u_{k+1} + 2u_k = 2^k$

11. Observe que se $P(\lambda) = Q(\lambda - 1)$. $P(E)u = f$ é equivalente a $Q(\Delta)u = f$. Resolva $Q(\Delta)u = k\gamma^k$. Aplique o método para $(E^2 + 1)u_k = k\gamma^k$.

12. Repita o argumento do Exercício 11 e resolva $(E^2 + 1)u_k = k^2\gamma^k$.

13. Os polinômios ortogonais de Tchebychev $T_k(x)$ podem ser definidos pela relação de recorrência

$$P(E)T_k(x) = 0 \text{ se } k \geqslant 1,\ P(\lambda) = \lambda^2 - x\lambda + \frac{1}{4}$$

Supondo que $T_1 = x$, $T_2 = x^2 - \dfrac{1}{2}$, obtenha uma fórmula para $T_k(x)$. (Todos os polinômios ortogonais famosos nas aplicações: Legendre, Laguerre, Hermite, Jacobi satisfazem uma relação de recorrência de coeficientes dependentes de n.)

14. Para o envio de uma encomenda deve-se pagar uma quantia P. De quantas formas pode-se pagar este preço com selos de valores S_1; S_2; S_3; ...; S_n? Suponha que haja uma quantidade ilimitada de selos e que dois pagamentos feitos em ordens diferentes no tipo dos selos sejam considerados diferentes. Mostre que

$$f(P) = f(P - S_1) + f(P - S_2) + f(P - S_3) + \ldots + f(P - S_k)$$

e obtenha uma fórmula analítica para $f(P)$ no caso $k = 3$ e $S_1 = 4$, $S_2 = 6$, $S_3 = 10$. (*Sugestão*: o argumento é muito parecido com aquele utilizado na obtenção da seqüência de Fibonacci.)

15. Suponha que possamos transmitir informações constituídas de seqüências de k sinais, onde o j-ésimo sinal toma um tempo t_j para ser transmitido. Quantas informações distintas podem ser transmitidas por estes sinais durante um intervalo de tempo T?

Obtenha $f(T)$ = número de informações que se pode transmitir durante o intervalo de tempo T.

Obtenha uma estimativa sobre o crescimento exponencial de $f(t)$ para $T \to \infty$. (Calcule a maior raiz em valor absoluto da equação característica!)

16. Seja P_N o PIB durante o ano N; A a tendência marginal para o consumo e B a taxa de investimento privado para o aumento do consumo.

Há uma teoria econômica que nos dá a seguinte relação:

$$P_N = aP_{N-1} + AB(y_{N-1} - y_{N-2}) + C$$

onde C é a despesa geral do governo suposta constante.

a. Resolva esta equação para $A = y_2$, $B = 1$ com condições iniciais $P_0 = 2$, $P_1 = 3$. Analise a freqüência dos períodos de depressão nesta economia.

b. Para quais valores de A e B esta economia é estável?

17. Em um problema sobre árvores binárias estuda-se uma seqüência W_n gerada pela relação

$$W_{K+1} - W_K - 2W_{K-1} = 2^K + 4$$

Resolva esta equação para $W_1 = -1$ e $W_2 = 2$ e verifique que W_k é um número inteiro para $K \geqslant 2$.

18. Obtenha condições necessárias e suficientes sobre a e b para que a equação de diferença $P(E)u = 0$, $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ tenha todas soluções $u_k \to \infty$ quando $K \to \infty$. Faça um gráfico.

19. (Projeto) Estude o método de Bernoulli para o cálculo de raízes de polinômios utilizando equações de diferenças. Aplique o resultado ao Exercício 2*.

3.5.4 Funções Geradoras — Transformada $\mathbb{Z}$

Uma das origens das equações de diferenças é exatamente a discretização de problemas originalmente formulados pelo Cálculo Diferencial. Aparentemente a recíproca seria mais difícil ou mesmo impossível: como utilizar o Cálculo Diferencial no estudo de funções definidas em $\mathbb{Z}$ se a essência do cálculo é o processo contínuo do limite? A esta altura o leitor não deve se surpreender ao ser informado de que o primeiro que utilizou o cálculo no estudo de equações de diferenças foi Euler(!) e com uma idéia bastante simples: dada uma função $f \in V(\mathbb{Z}^+, \mathbb{C})$, considere a função (chamada geradora) definida por $F(x) = \sum_{k \geq 0} f(k)x^k$. Se esta função existir e puder ser expressa de outra forma, observaremos que os coeficientes das potências de x formam exatamente a seqüência f e podemos estudá-los através da função F.

EXEMPLO 1

Considere a seqüência de Fibonacci

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k, \qquad a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_1 = 1$$

e

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k.$$

Solução: Verificaremos o que a relação de recorrência implica na forma de $F(x)$ e depois inverteremos a questão, isto é, perguntaremos o que a função $F(x)$ pode informar sobre a seqüência.

---

* HENRICI, P. *Essentials of Numerical Analysis with Pocket Calculator Demonstrations*. New York, Wiley, 1982.

Inicialmente observamos que

$$\sum_{k\geq 0} a_{k+2}x^k = \sum_{k\geq 0} a_{k+1}x^k + \sum_{k\geq 0} a_k x^k$$

$$x^{1/2}\sum_{k\geq 0} a_{k+2}x^{k+2} = \frac{1}{x}\sum_{k\geq 0} a_{k+1}x^{k+1} + F(x)$$

$$\sum_{k\geq 2} a_k x^k = x\sum_{k\geq 1} a_k x^k + x^2 F(x)$$

$$F(x) - F(0) - F'(0)x = x\,[F(x) - F(0)] + x^2 F(x)$$

Resolvendo para $F(x)$ temos

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Portanto, nesta função relativamente simples temos, de certa maneira, armazenadas todas as informações necessárias sobre a função $f \in V(\mathbb{Z}^+, \mathbb{C})$. ■

Como diz G. Polya*: "Uma função geradora é como uma sacola. Em vez de carregarmos vários objetos pequenos separadamente, o que poderia ser desconfortável, nós os colocamos todos dentro de uma sacola e, então, temos um único objeto a ser carregado". A questão é como retirar exatamente o objeto que necessitamos de dentro desta sacola.

Em Engenharia o processo de transformar uma seqüência em uma função geradora é chamado de transformada Z: $\{a_n\} \to \Sigma\, a_n z^n$. Há uma semelhança muito grande entre a transformada Z e a transformada de Laplace.

Vejamos como obter uma fórmula para $f(n)$ a partir da função geradora acima, por meio da expansão de $F(x)$, em séries de potências através de outros métodos que nos dão uma forma de calcular os coeficientes. Um destes métodos pode ser pela expansão de Taylor, uma vez que sabemos

$$a_k = \frac{k!\,d^k}{dx^k} F(x)\bigg|_{x=0}$$

Como $F(x)$ neste caso é uma função racional, podemos escrevê-la como soma de frações parciais e

$$\frac{1}{ax+b} = \frac{1}{b\left(1 - \dfrac{ax}{b}\right)} = \frac{1}{b}\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{a}{b}\right)^k x^k$$

ou

$$\frac{1}{x^2+c} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{1 - \dfrac{1}{c}x^2} = \frac{1}{c}\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{1}{c}\right)^k x^{2k}$$

* POLYA, G. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton, Princeton University Press, 1953, 1v.

Basta lembrar que

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 0} z^n$$

Escrevendo

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}$$

sendo λ_1, λ_2 raízes de $x^2+x-1=0$, e decompondo em frações parciais:

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x\right)}+\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x\right)}$$

Expandindo

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x}=\frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\quad \frac{1}{1-\frac{x}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^k x^k$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x}=\frac{1}{\sqrt{5}}\quad \frac{2}{(\sqrt{5}+1)}\left(\frac{1}{1-\frac{-2x}{\sqrt{5}+1}}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}+1}\right)^k x^k$$

e portanto

$$a_k=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^k+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}+1}\right)^k$$

O método das funções geradoras pode ser aplicado a qualquer $f\in V(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, independente do tipo de recorrência que a define e é particularmente importante no caso de equações de diferenças finitas lineares e com coeficientes dependendo de k. Neste caso, a equação que definirá a função geradora será diferencial ordinária linear.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 4, obtenha a função geradora e os coeficientes que dão a solução das equações de diferenças:

1. $u_k=Pu_{k+1}+qu_{k-1}$, $u_0=1$ e $u_{a+b}=0$
2. $u_{k+2}=au_{k+1}+bu_k$, $u_0=1$ e $u_1=C$
3. Polinômios de Tchebychev
4. $u_{k+2}=3u_{k+1}-2u_k$, $u_0=1$ e $u_1=0$
5. Obtenha a equação diferencial que define a função geradora de

$$u_{k+2}=ku_{k+1}+ku_k$$

I. M. E. C. C.
BIBLIOTECA

3.6 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE COEFICIENTES VARIÁVEIS

3.6.1 Introdução

Como já vimos na Secção 3.3, os operadores diferenciais lineares do tipo $\mathbf{L} = \sum_{n=0}^{N} a_k(x)D^k$ com coeficientes contínuos (reais) em um intervalo I onde $a_N(x) \neq 0$ admitem *uma* e *única* solução para o problema de Cauchy de valor inicial.

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f \\ I_{x_0}u = [u(x_0), u'(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)] = v \end{cases}$$

definida em *todo* o intervalo $I = (x_0 - a, x_0 + b)$ se $f(x)$ for contínua em I.

Este Teorema de Existência e Unicidade garante que o espaço de soluções de $\mathbf{L}u = 0$ (ou seja, o núcleo de $\mathbf{L}$ no espaço das funções definidas em I com valores em $\mathbb{C}$ e com N derivadas contínuas) tem dimensão finita N.

Pelo princípio de superposição, a solução completa de $\mathbf{L}u = f$ dependerá, então, do seguinte esquema:

1. obtenção de uma base $u_1 \ldots u_n$ para $N(\mathbf{L})$;
2. obtenção de uma solução qualquer de $\mathbf{L}u = f$.

Tal como no caso de coeficientes constantes, veremos que a parte **2** se reduzirá (pelo método de superposição de Dirac-Green, por exemplo) ao cálculo do espaço de soluções da equação homogênea (ver Secção 3.6.5).

Portanto, a solução analítica de $\mathbf{L}u = f$ dependerá inteiramente da solução (analítica completa) de $\mathbf{L}u = 0$. Todavia, não existe um método geral para a sua resolução, mesmo para equações simples como $u'' + a_0(x)u = 0$ $(\mathbf{L} = D^2 + a_0(x))$.

O nosso procedimento será, então, analisar alguns casos particulares para os quais existem métodos analíticos e, para simplicidade da notação, trataremos apenas das equações de segunda ordem, que também são as mais importantes nas aplicações.

O primeiro método (ver Secção 3.6.2) a ser estudado, chamado de redução de ordem, é pouco eficaz porque exige que saibamos $N - 1$ soluções linearmente independentes de $\mathbf{L}u = 0$, para que possamos obter a N-ésima (e última) por uma integração simples. No caso $N = 2$, a situação é melhor; basta sabermos uma solução de $\mathbf{L}u = 0$ para obtermos a outra. O importante neste método são os conceitos introduzidos que serão essenciais ao estudo de vários outros problemas.

O único método (ver Secção 3.6.3) disponível e relativamente geral para operadores *não* singulares é o chamado método de expansão em séries, devido a Euler e Cauchy, e que se aplica a operadores $\mathbf{L}$ cujos coeficientes são funções analíticas, isto é, cada coeficiente pode ser escrito como uma série de potências de $(x - x_0)$ convergente em todo um intervalo

$$a_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}(x - x_0)^j, \qquad x \in I$$

Neste caso, as soluções são obtidas na forma analítica, como séries de potências

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k, \qquad x \in I$$

e a equação $Lu = 0$ se reduz a um sistema infinito de equações lineares para uma quantidade infinita de incógnitas: os coeficientes $\{C_k\}_{k \geq 0}$ da expansão de $u(x)$, em séries de potências de $(x - x_0)$.

Um sistema geral desta forma não tem muitas chances de ser resolvido explicitamente e pode parecer que estamos substituindo um problema difícil por outro talvez ainda mais difícil. Entretanto, o que torna o método eficaz é o fato de que este sistema de equações lineares tem uma característica muito particular; na verdade, ele se apresenta como uma equação linear de diferenças finitas, ou seja, podemos calcular recursivamente os coeficientes

$$C_k = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(k)\, C_j$$

onde $\alpha_j(k)$ são em geral dependentes de k e j, obtidos por operações aritméticas finitas.

Em alguns casos especiais podemos obter C_k analiticamente como função de k e assim escrevemos a expansão completa de $u(x)$ explicitamente. De qualquer forma é sempre possível calcular $u(x)$ com uma aproximação de qualquer ordem N por meio de um algoritmo perfeitamente determinado

$$u(x) \sim \sum_{k \geq 0}^{N} C_k (x - x_0)^k$$

A construção formal das séries de potências pelo método de Euler deve ser estudada com respeito à convergência e, para isto, dispomos de um método muito geral devido a Cauchy, que garante a analiticidade de $u(x)$ no mesmo intervalo comum de analiticidade dos coeficientes $(x - r, x_0 + r)$. Neste texto abordaremos quase sempre apenas a construção formal.

O método de Euler também é aplicável para equações com singularidades "fracas". No caso de equações de segunda ordem, este tipo de singularidade acontece quando $a_2(x)$ tem um zero simples em x_0, isto é

$$a_2(x) = (x - x_0) \sum_{j \geq 1} a_{2j} (x - x_0)^{j-1}, \quad a_{21} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_2(x) \neq 0 \text{ se } x \neq x_0$$

Entretanto, neste caso os resultados são apenas parciais.

O método de Euler-Cauchy tem um caráter muito geral e pode ser aplicado inclusive às equações não lineares, desde que todas as funções envolvidas possam ser expressas como séries de potências. Não abordaremos o aspecto teórico deste caso, mas utilizaremos o método para o cálculo aproximado de soluções.

Por outro lado, estudaremos na Secção 3.6.5 alguns casos de operadores singulares muito comuns em problemas da Física Matemática e que possuem singularidade de segunda ordem, ou seja, $a_2(x)$ tem um zero de segunda ordem em x_0, isto é

$$a_2(x) = (x - x_0)^2 A_2(x)$$

onde $A_2(x_0) \neq 0$ e $A_2(x)$ é analítica e não nula em $(x_0 - r, x_0 + r)$. Mesmo com esta modesta generalização, teremos que nos restringir ao caso em que $a_1(x_0) = 0$, quando x_0 é chamado de *singularidade regular* de

$$\mathbf{L} = (x - x_0)^2 A_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + (x - x_0) A_1(x) \frac{1}{dx} + a_0(x)$$

Neste caso, veremos que, se a singularidade não for apenas aparente, o método de Euler não pode ser aplicado. Isto nos sugere que as soluções deixam de ser analíticas em x_0.

O método de Frobenius se constitui, então, em uma forma de prever a singularidade da solução de $\mathbf{L}u = 0$ através de modelos de singularidade como

$$(x - x_0)^p = e^{p \log | x - x_0 |}$$

e

$$\log | x - x_0 |^{\gamma}$$

Estas singularidades de funções analíticas são chamadas de pólos (se $p = n$ inteiro negativo) e ramificações (se $p =$ real irracional e $\gamma \neq 0$).

O Teorema de Frobenius afirma que: "$\mathbf{L}$ é regular se, e somente se, as únicas singularidades que as soluções de $\mathbf{L}u = 0$ apresentam forem pólos ou ramificações e que se $\mathbf{L}$ for regular, então sempre teremos pelo menos uma solução $u(x)$ que possa ser expressa na forma de séries de potências generalizadas

$$u(x) = (x - x_0)^p \sum_{k \geq 0} C_k (x - x_0)^k$$

onde p é chamado índice da equação a ser determinado como raiz de um polinômio do segundo grau".

Equações $\mathbf{L}u = 0$ que apresentam soluções com singularidades essenciais (tipo $e^{1/x}$, $x = 0$) são chamadas *irregulares* e sua teoria é muito mais complicada do que as regulares. Não estudaremos estes casos aqui. É interessante notar que se o operador $\mathbf{L}$ tem coeficientes periódicos de mesmo período que podem ser escritos como séries de Fourier

$$a_k(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{km} e^{imx} \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

é razoável procurar soluções da mesma forma

$$u(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k e^{ikx}$$

para equações

$$\mathbf{L}u = f \left(f = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx} \right)$$

e o método de coeficientes, análogo ao método de Euler, pode ser então aplicado.

3.6.2 Equações de Segunda Ordem Auto-Adjuntas: Fatoração do Operador Diferencial

Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é, por definição, escrita na sua forma geral como

$$\mathbf{L}u = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}u + a_1(x)\frac{d}{dx}u + a_0(x)u = f(x) \tag{1}$$

Multiplicando (1) por $\lambda(x) = e^{\alpha(x)}$, onde $\alpha'(x) = \frac{a_1}{a_2}$, obtemos uma equação do tipo

$$\mathbf{L}u = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u\right) + q(x)u = r(x) \tag{2}$$

Dizemos que a equação (2) e o operador $\mathbf{L} = \lambda\mathbf{L}_1$ são da forma *auto-adjunta*.

A transformação de uma equação linear de segunda ordem (ou um operador) para a forma auto-adjunta é importante em várias situações da teoria de equações diferenciais lineares. Entretanto, o uso que faremos disto neste texto se resume essencialmente ao chamado *método de redução de ordem de Lagrange*, que se baseia na observação que se segue.

Se o operador $\mathbf{L}$ puder ser fatorado como produto de dois operadores de primeira ordem na forma

$$\mathbf{L}u = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = \frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{du}{dx} + B(x)u\right) \tag{3}$$

então, tal como foi feito no caso de coeficientes constantes, podemos resolver a Equação (2) que, na verdade, são duas equações lineares de primeira ordem. Entretanto, com os operadores de coeficientes variáveis a situação não é tão simples e apenas por coincidência poderíamos ter a igualdade (3).

No caso geral a opção é multiplicar $\mathbf{L}$ por um "fator integrante" $\omega(x)$ na esperança que o novo operador de segunda ordem $\omega\mathbf{L}$ possa ser escrito na forma (3). Para que isto ocorra devemos ter

$$\omega p\frac{d^2v}{dx^2} + \omega p'\frac{dv}{dx} + \omega q\, v = A\frac{d^2v}{dx^2} + (A' + B)\frac{dv}{dx} + B'v$$

de onde

$$\begin{cases} \omega p = A \\ \omega p' = A' + B \\ \omega q = B' \end{cases}$$

e portanto

$$\omega p' - A' = B$$
$$[\omega p' - (\omega p)']' = B' = \omega q$$

logo

$$-(\omega' p)' = \omega q$$

ou seja, ω deve satisfazer a equação

$$\mathbf{L}\omega = 0$$

Teorema de Lagrange Se $\mathbf{L}$ é da forma auto-adjunta,

$$\mathbf{L}u = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u$$

então vale a identidade (de Lagrange)

$$\omega \mathbf{L}u - u\mathbf{L}\omega = \frac{d}{dx}\left\{p\left[u\frac{d\omega}{dx} - \omega\frac{du}{dx}\right]\right\}$$

Neste caso, se $\mathbf{L}\omega = 0$, podemos calcular outra solução u, $\mathbf{L}u = 0$, linearmente independente, integrando a equação de primeira ordem linear em u

$$\omega\frac{du}{dx} - u\frac{d\omega}{dx} = \frac{C_0}{p}$$

cuja solução é dada por

$$u = \left(\int \frac{C_0}{\omega^2 p}\,dx + C_1\right)\omega \quad \text{(Verifique!)}$$

Observações:

a. Se $\mathbf{L}\omega = 0$ podemos interpretar a identidade de Lagrange como uma fatoração de $\omega\mathbf{L}$ no produto de dois operadores lineares de primeira ordem. Por este motivo, este argumento é também denominado "método de redução da ordem".

b. A identidade de Lagrange é importante na teoria de Sturm-Liouville e argumentos que levam a ela são muito comuns em equações diferenciais.

c. A "segunda solução" $u(x)$ é comumente obtida por um método chamado de variação das constantes, que parte da seguinte suposição: como $\lambda\omega(x)$ é solução da equação $\mathbf{L}u = 0$ para todo λ constante, é razoável esperar que uma solução linearmente independente de ω possa ser obtida por "variação da constante", isto é, na forma $u(x) = \lambda(x)\omega(x)$, onde $\lambda(x)$ agora é uma função.
Observe que esta é realmente a forma de $u(x)$, obtida através da identidade de Lagrange.

EXERCÍCIOS

1. Supondo $\mathbf{L}(\lambda\omega) = 0$ obtenha $\lambda(x)$ e compare com o resultado obtido anteriormente.
2. Mostre que a solução $u(x) = \lambda(x)\omega$ é, de fato, linearmente independente de $\omega(x)$ e, portanto, (u, ω) formam uma base para $N(\mathbf{L})$.
3. Obtenha $N(\mathbf{L})$ nos casos abaixo, determinando em cada caso a identidade de Lagrange:

   a. $\mathbf{L} = x^2\dfrac{d^2}{dx^2} - 4x\dfrac{d}{dx} + 6$, $\omega(x) = x^3$

   b. $\mathbf{L} = x\dfrac{d^2}{dx^2} + (x-2)\dfrac{d}{dx} - 3$, $\omega(x) = x^3$

   c. $\mathbf{L} = \dfrac{d^2}{dx^2} + x\dfrac{d}{dx} - 1$, $\omega(x) = x$

4. Mostre que a substituição $v = u \exp\left(\frac{1}{2}\int u dx\right)$ transforma a equação

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q\right)u = 0 \quad \text{em} \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right)v = 0$$

5. Se $\mathbf{L} = a_2\frac{d^2}{dx^2} + a_1\frac{d}{dx} + a_0$, obtenha a identidade de Lagrange

$$u\mathbf{L}\omega - \omega\mathbf{L}u = \frac{d}{dx}\{Q[(u, u'), (\omega, \omega')]\}$$

onde Q é uma forma bilinear e $\mathbf{L}$ um operador diferencial linear de segunda ordem. $\bar{\mathbf{L}}$ é chamado adjunto formal de $\mathbf{L}$. Mostre que se $\mathbf{L}$ for auto-adjunto, $\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}$.

6. Obtenha a forma auto-adjunta da equação de Bessel

$$\mathbf{L}u = \left[x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + (x^2 - n^2)\right]u = 0$$

7. Mostre que a equação de Riccati $\frac{du}{dx} + Pu + Qu^2 = R$ (não linear, se $Q \neq 0$) é transformada em uma equação diferencial linear de segunda ordem em v se

a. $u = \frac{v'}{Qv}$

b. $u = \frac{Rv}{v'}$

8. A equação $\left(x^2\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x\frac{d}{dx} + \beta\right)u = 0$, α e β constantes, é chamada equação de Euler. Obtenha uma solução na forma $\omega(x) = x^p$ e depois, pela identidade de Lagrange na forma auto-adjunta, calcule outra solução $u(x)$ linearmente independente de $\omega(x)$. Obtenha uma fatoração do operador de segunda ordem.

3.6.3 Operações Lineares Não Singulares com Coeficientes Analíticos

3.6.3.1 *Somas de Potências*

Analisaremos nesta secção equações diferenciais ordinárias lineares $\mathbf{L}u = 0$, onde o operador $\mathbf{L}$ é não singular e seus coeficientes $a_k(x)$ podem ser escritos como *séries de potências* convergentes em um intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Para maior simplicidade da notação e abrangendo a maior parte das equações de interesse teórico e prático, consideraremos ainda apenas os operadores de segunda ordem

Como $\mathbf{L}$ é não singular, a equação $\mathbf{L}u = 0$ pode ser substituída por $\frac{1}{a_2(x)}\mathbf{L}u = 0$ e, portanto, nesta secção nos restringiremos aos operadores do tipo

$$\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

onde

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} p_k (x - x_0)^k$$

$$q(x) = \sum_{k \geq 0} q_k (x - x_0)^k$$

são séries convergentes em $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Recordemos antes algumas propriedades das séries de potências.

Propriedade 1 A toda série de potências positivas cuja notação formal é $\sum_{k \geq 0} c_k (x - x_0)^k$, está associado um número $R \geqslant 0$ (que pode ser infinito) chamado raio de convergência da série, tal que:

a. Se $R > 0$ (ou $R = +\infty$), a série converge pontualmente para $|x - x_0| < R$, isto é, existe o limite

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k = f(x)$$

para todo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, e converge uniformemente para $|x - x_0| < R - \delta$, $\delta > 0$.

b. Se $R < \infty$, a série diverge para $|x - x_0| > R$. Portanto, se a série converge em $x = x_1$, então ela converge para $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ e, se diverge em $x = x_2$, então ela diverge para $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$. Por este motivo os pontos de convergência de uma série de potências de $(x - x_0)$ constituem um intervalo simétrico com relação a x_0, isto é, serão o intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Propriedade 2 A função representada pela série de potências em $(x_0 - R, x_0 + R)$ tem derivada que é a série de potências derivada termo a termo. Em outras palavras, se $f(x) = \sum_{k \geq 0} c_k (x - x_0)^k$, então existe $\frac{df}{dx}$ em $(x_0 - R, x_0 + R)$ que pode ser representada pela série $\frac{df}{dx}(x) = \sum_{k \geq 1} k\, c_k (x - x_0)^{k-1}$, cujo raio de convergência é R. Portanto, $f(x)$ tem infinitas derivadas e

$$\frac{d^m f}{dx^m}(x) = \sum_{k \geq m} k(k-1), \ldots, (k-m+1)\, c_k (x - x_0)^{k-m}$$

onde a série de potências tem raio de convergência R.

Propriedade 3 A função representada por uma série de potências de raio de convergência R pode ser integrada termo a termo e a série obtida tem raio de convergência R, isto é,

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{c_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

tem raio de convergência R, e $F'(x) = f(x)$.

Propriedade 4 Uma função $f(x)$ pode ser representada por uma única (se houver) série de potências de $(x - x_0)$ e neste caso esta é a série de Taylor, e, portanto,

$$\frac{d^m f}{dx^m}(x_0) = m!\, c_m, \text{ isto é, } c_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m f}{dx^m}(x_0)$$

Observação:

Uma função $f(x) = \sum_{k \geq 0} c_k (x - x_0)^k$ pode ser representada por séries de potências de $(x - x_1)$ se $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$, isto é, $f(x) = \sum_{k \geq 0} d_k (x - x_1)^k$ e seu raio de convergência é igual ao valor

$$\min \{ |x_1 - (x_0 + R)|, |x_1 - (x_0 - R)| \}$$

Propriedade 5 O raio de convergência de uma série pode ser obtido por

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}}=\frac{1}{\lim_{k\to\infty}\sup_{m\geq k}|c_m|^{1/m}}$$

Observação:

O $\overline{\lim_{k\to\infty}} a_k$ é chamado limite superior e sempre existe entre 0 e $+\infty$ (inclusive) se $a_k\geqslant 0$.

EXEMPLO 1

A série $\sum_{k\geq\infty} k!x^k$ tem raio de convergência nulo e, portanto, não define nenhuma função analítica. (Observe que $k!\,|x|^k\to\infty$ se $x\neq 0$.) ■

EXEMPLO 2

A série $\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$ converge para todo x e, portanto, tem raio de convergência $R=+\infty$.

Observe que

$$\sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k!}}=|x|\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}\leqslant\frac{1}{2}\qquad(k\in\mathbb{N})$$

para $|x|<m$ e para $k>k_m$ para um certo k_m ($\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k!}=\infty$!). Prove!

Então

$$\left|\sum_n^m\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\sum_n^m\frac{|x|^k}{k!}\leqslant\sum_n^m\frac{1}{2^k}$$

como esta série geométrica numérica converge, pelo teste de Weierstrass vem que $\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$ converge para $|x|<m$. Mas este m pode ser qualquer, logo $R=\infty$.

A função definida pela série é a exponencial e^x. ■

EXEMPLO 3

A série mais útil e uma das mais simples é a série que representa a função $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geq 0}x^k$$

se $|x|<1$, então a série é geométrica e converge pois

$$\sum_{k\geq 0}^{N}x^k=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{N+1}}{1-x}\qquad\text{e}\qquad x^{N+1}\to 0\text{ quando }N\to\infty$$

A série não converge se $|x|>1$, pois neste caso $|x|^N\to\infty$ quando $N\to\infty$.

Observe o fato interessante: a série só é definida como função para $|x|<1$; entretanto, a função $\frac{1}{1-x}$ pode ser definida para todo $x\neq 1$. Mas a função $\frac{1}{1-x}$ pode ser expandida em séries de potências em torno de qualquer ponto $x\neq 1$. Basta escrever

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x+x_0-x_0}=\frac{1}{1-x_0}\left(\frac{1}{1-\dfrac{x-x_0}{1-x_0}}\right)$$

e

$$\frac{1}{1-\dfrac{x-x_0}{1-x_0}}=\sum_{k\geq 0}\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^k \quad \text{se} \quad \left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right|<1$$

ou seja

$$|x-x_0|<|1-x_0|$$

(Interprete este fato!) Obtenha o raio de convergência da série.

Logo

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1-x_0)^{k+1}}(x-x_0)^k \Rightarrow c_k=\frac{1}{(1-x_0)^{k+1}}$$

As operações de soma, produto, divisão e composição, com séries de potências de mesmo termo $(x-x_0)$, podem ser efetuadas tal como polinômios em seu intervalo de convergência. Isto é evidente para a soma. Vejamos, agora, para o produto.

Propriedade 6 Se $f(x)=\sum_{k\geq 0} c_k\,(x-x_0)^k$ e $g(x)=\sum_{k\geq 0}^{k} b_k\,(x-x_0)^k$ são convergentes em (x_0-R, x_0+R) então a função produto $f(x)\cdot g(x)=h(x)$ é analítica neste intervalo e a sua série $h(x)=\sum_{k\geq 0} d_k\,(x-x_0)^k$ tem coeficientes dados pela fórmula de convolução: $d_k=\sum_{j=0}^{k} c_{k-j}b_j$. Portanto, o cálculo de $\sum_{k\geq 0}^{N} d_k(x-x_0)^k$ pode ser obtido pelo produto polinomial de $\sum_{k\geq 0}^{N} c_k(x-x_0)^k$ e $\sum_{k\geq 0}^{N} b_k(x-x_0)^k$.

Propriedade 7 Se $f(x)\neq 0$ no intervalo (x_0-R, x_0+R), a função recíproca $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ é analítica neste intervalo e seu desenvolvimento em séries de potências

$$h(x)=\frac{1}{f(x)}=\sum_{k\geq 0} d_k\,(x-x_0)^k$$

satisfaz a fórmula

$$\sum_{j=0}^{k} d_{k-j}c_j=\begin{cases}1 & \text{se } k=0\\ 0 & \text{se } k>0\end{cases}$$

Portanto, o cálculo de $\sum_{k\geq 0}^{N} d_k\,(x-x_0)^k$ pode ser obtido pela divisão polinomial de $\sum_{k=0}^{N} c_k\,(x-x_0)^k$ por $f(x)$ até a ordem N. O mesmo se pode dizer para divisões $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Propriedade 8 Tomemos agora $x_0=0$ por simplicidade

$$f(x)=\sum_{k\geq 0} c_k\,x^k \quad \text{e} \quad g(y)=\sum_{k\geq 0} b_k\,y^k$$

e suponhamos que $c_0=0$, isto é, $f(0)=0$. Então podemos compor $h(x)=g[f(x)]$ para x em uma vizinhança de zero, $h(x)$ é uma função analítica em um intervalo incluindo a origem e, se $h(x)=\sum_{k\geq 0} d_k x^k$, podemos calcular $\sum_{k\geq 0} d_k\,x^k$ através da composição polinomial de $\sum_{k\geq 0} d_k\,y^k$ com $\sum_{k\geq 1} c_k\,x^k$.

Propriedade 9 Se $f'(0) = c_1 \neq 0$, então existe a função inversa $h(y)$ analítica em um intervalo em torno de $y = 0$

$$h(f(x)) = x, \quad |x| < R \quad \text{e se} \quad h(y) = \sum_{k \geq 1} d_k y^k$$

podemos calcular $\sum_{k \geq 1}^{N} d_k y^k$ por inversão de $\sum_{k \geq 1}^{N} c_k x^k$ como pelo teorema de Lagrange-Bürman*.

O cálculo com séries por meio de operações polinomiais é uma técnica analítica construtiva extremamente útil, embora pouco enfatizada nos livros elementares.

3.6.3.2 *Resolução da Equação* $\mathbf{Lu} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right)u = 0$ *com Coeficientes* p *e* q *Analíticos*

Pelas propriedades que vimos na Secção 3.6.3.1, todas as operações usuais que se realizam com funções (soma, produto, recíproca, derivação, integração, composição, inversão), quando efetuadas sobre funções analíticas representadas por séries de mesmas potências em um intervalo de convergência, produzem novas funções analíticas cujas séries reduzidas (isto é, a soma até a ordem N) são obtidas por operações polinomiais.

O operador $\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$ é constituído de derivação e produto por funções analíticas ($p(x)$ e $q(x)$), quando calculado em uma função analítica, dará como resultado uma nova função analítica.

Se $p(x)$ e $q(x)$ têm representação em séries de potências de $(x - x_0)$ válidas em $(x_0 - R, x_0 + R)$, então $\mathbf{L}$ passará a atuar no espaço das funções analíticas em $(x_0 - r, x_0 + r)$ para $r \leqslant R$, $C^{\omega}[(x_0 - r, x_0 + r); \mathbb{R}]$ com resultados nele mesmo.

Nada mais razoável, portanto, que tentar calcular a base das soluções da equação homogênea $\mathbf{L}u = 0$ no espaço das funções analíticas definidas em uma vizinhança de x_0, ou seja, procuraremos as soluções desta equação na forma $u(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$.

A questão se reduzirá a duas etapas. A primeira delas consiste na obtenção formal dos coeficientes para operações polinomiais e a segunda, na demonstração de que a série obtida converge em um intervalo não trivial ($r > 0$), isto é, a série realmente define uma função analítica que será, portanto, solução da equação homogênea.

Antes de analisar o caso geral, estudemos alguns exemplos simples seguindo a argumentação acima.

EXEMPLO 4 Equação de Airy

A equação de Airy é muito utilizada em problemas de propagação de ondas, sendo definida por

$$\mathbf{L} = D^2 - x, \quad \text{logo} \quad p(x) \equiv 0 \quad \text{e} \quad q(x) = -x$$

---

* HENRICI, P. *Applied and Computational Complex Analysis*. New York, Wiley, 1974, 1v.

Tentaremos obter então soluções de $Lu = 0$ na forma de funções analíticas $\sum_{k\geq 0} a_k x^k = u(x)$:

$$Du = \frac{du}{dx} = \sum_{k\geq 1} k\, a_k\, x^{k-1} = \sum_{k\geq 0} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k$$

$$D^2u = \frac{d^2u}{dx^2} = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k\, x^{k-2} = \sum_{k\geq 0} (k+2)\,(k+1) a_{k+2} x^k$$

$$xu = \sum_{k\geq 0} a_k\, x^{k+1} = \sum_{k\geq 0} a_{k-1}\, x^k$$

(tomando $a_{k-1} = 0$ para uniformizar a notação).

Colocando estes valores na equação e igualando coeficientes de mesma potência, obtemos

$$D^2u - xu = \sum_{k\geq 0} [(k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} - a_{k-1}]\, x^k = 0$$

Pela unicidade da expansão (se a função for analítica) temos

$$(k+2)\,(k-1) a_{k+2} - a_{k-1} = 0 \quad \text{para todo} \quad k \geq 0$$

ou seja

$$a_{k+2} = \frac{1}{(k+2)\,(k-1)}\, a_{k-1}$$

que é uma fórmula de recorrência (de coeficientes variáveis).

Para calcularmos os termos de uma fórmula de recorrência explicitamente precisamos das condições iniciais.

Como $a_{-1} = 0$ para $k = 0$, temos

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1}\, a_{-1} = 0$$

$$a_{3+2} = a_5 = \frac{1}{(3+2)\,(3+1)}\, a_{3-1} = 0$$

e portanto (verifique indutivamente) $a_{3m+2} = 0\ \forall m \in \mathbb{N}$, ou seja, a relação de recorrência é mesmo de segunda ordem, apesar de ser da forma

$$\left[E^3 - \frac{1}{(k+3)\,(k+2)}\right] a_k = 0$$

Fornecendo então os valores de a_0 e a_1 podemos construir a_k recursivamente por

$$a_{3m} \begin{cases} a_3 = \dfrac{1}{3 \cdot 2}\, a_0 \\ \vdots \\ a_{3m} = \dfrac{1}{(3m)\,(3m-1)\,3\,(m-1)\,[3\,(m-1)-1]\,\ldots\ldots}\, a_0 = \dfrac{a_0}{\prod\limits_{k=1}^{m} (3k)\,(3k-1)} \end{cases}$$

$$a_{3m+1} \begin{cases} a_4 = \dfrac{1}{4 \cdot 3}\, a_1 \\ \vdots \\ a_{3m+1} = \dfrac{1}{(3m+1)\,(3m)}\, a_{3(m-1)+1} = \dfrac{1}{(3m+1)\,(3m)}\, a_{3m-2} = \\ \qquad = \dfrac{1}{(3m+1)\,(3m)\,[3\,(m-1)+1]\,[3\,(m-1)]}\, a_1 = \dfrac{a_1}{\prod\limits_{k=1}^{m} (3k+1)\,(3k)} \end{cases}$$

Observe agora que $u(0) = a_0$ e $u'(0) = a_1$; portanto, a_0 e a_1 são as condições iniciais apropriadas para o problema de Cauchy da equação de Airy.

Observe ainda que a série $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ é convergente para todo x. (Verifique!)

Portanto $u(x)$ é uma função analítica definida pela série de potências acima (fixados a_0 e a_1) em toda reta real.

Escolhendo

$$u(0)=0,\ u'(0)=1$$

e

$$v(0)=1,\ v'(0)=0$$

obtemos

$$u(x)=x+\sum_{m\geq 1}\frac{x^{3m+1}}{(3k+1)\ldots 4\cdot 3}=\sum_{m\geq 1}\frac{x^{3m+1}}{\prod_{k=1}^{m}(3k+1)(3k)}$$

e

$$v(x)=1+\sum_{m\geq 1}\frac{x^{3m}}{\prod_{k=1}^{m}(3k)(3k-1)}$$

que são soluções linearmente independentes (por quê?) e portanto formam uma base do espaço de soluções da equação homogênea. ■

EXEMPLO 5 Equação de Legendre

$$\mathbf{L}=(1-x^2)D^2-2xD+k(k+1)$$
$$\mathbf{L}u=0$$

Observe que esta equação tem uma singularidade em $x=1$ e $x=-1$. Consideraremos, portanto, o operador no intervalo $(-1, 1)$ em torno de $x=0$ que é um ponto ordinário para $\mathbf{L}$. Esta equação aparece com freqüência em problemas de equações diferenciais parciais.

Temos

$$a_2(x)=1-x^2$$
$$a_1(x)=-2x$$
$$a_0(x)=k(k+1)$$

Procuremos então as soluções da equação homogênea na forma $u(x)=\sum_{m\geq 0}a_m x^m$. (Para facilitar o formalismo podemos escrever $u(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m x^m$ com $a_m=0$ se $m<0$.)

$$D^2u=\sum_{m\geq 0}(m-1)\,m\,a_m x^{m-2}=\sum_{m\geq 0}(m+1)(m+2)\,a_{m+2}\,x^m$$

$$x^2D^2u=\sum_{m\geq 0}(m-1)\,m\,a_m\,x^m=\sum_{m\geq 0}(m-1)\,m\,a_m\,x^m$$

$$xDu=\sum_{m\geq 0}m\,a_m\,x^m$$

$$k(k+1)u=\sum_{m\geq 0}k(k+1)\,a_m\,x^m$$

Portanto

$$\mathbf{L}u=(1-x^2)D^2u-2x\,Du+k(k+1)u=0$$

ou seja

$$\sum_{m\geq 0}[(m+1)(m+2)a_{m+2}-(m-1)m\,a_m-2m\,a_m+k(k+1)a_m]\,x^m=0$$

Igualando os coeficientes de cada potência a zero temos

$$(m+1)(m+2)\,a_{m+2}-(m-1)m\,a_m-2m\,a_m+k(k+1)\,a_m=0$$

ou

$$a_{m+2}=\frac{(m-1)m+2m-k(k+1)}{(m+2)(m+1)}\,a_m=\frac{(m-k)(m+k+1)}{(m+2)(m+1)}\,a_m$$

Portanto temos uma fórmula do tipo

$$a_{m+2} = f(m)\, a_m, \qquad f(m) = \frac{(m-k)\,(m+k+1)}{(m+2)\,(m+1)}$$

e podemos calcular todos os coeficientes recursivamente, os de ordem par começando por a_0 e os de ordem ímpar começando por a_1. Podemos mesmo obter uma fórmula analítica para o cálculo de cada coeficiente

$$a_2 = f(0)a_0, \ldots, a_{2p+2} = f(2p)a_{2p} = f(2p)f(2_{p-2})a_{2p-2}, \ldots, a_{2p+2} = \left(\prod_{n=0}^{p} f(2n)\right) a_0$$

e analogamente, como

$$a_{2p+1} = a_{(2p-1)+2} = f(2_{p-1})\, a_{2p-1}$$

vem

$$a_{2p+1} = \left(\prod_{n=1}^{p} f(2n-1)\right) a_1$$

Observe agora que $f(m) \to 1$ quando $m \to \infty$ e, portanto, a série converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Desta forma podemos escrever $u(x)$ como

$$u(x) = a_0 + \sum_{p=0}^{\infty} \left(\prod_{n=0}^{p} f(2n)\right) a_0 x^{2p+2} + a_1 x \sum_{p=1}^{\infty} \left(\prod_{n=1}^{p} f(2n-1)\right) a_1 x^{2p+1}$$

ou

$$u(x) = v(x) + w(x)$$

onde

$$v(0) = a_0, \qquad v'(0) = 0$$

e

$$w(0) = 0, \qquad w'(0) = a_1$$

e é claro que se tomarmos $a_0 = 1 = a_1$ então $v(x)$ e $w(x)$ formam uma base para o espaço de soluções da equação homogênea $\mathbf{L}u = 0$ em $(-1, 1)$.

Observemos também que $w(x)$ é um polinômio de grau $2(q-1)$ se

$$k = 2q + 1 \qquad (k \text{ inteiro ímpar})$$

e $v(x)$ é um polinômio de grau $2q$ se

$$k = 2q \qquad (k \text{ inteiro par})$$

Estes polinômios $P_k(x) = w(x)$ ou $v(x)$ são chamados *polinômios de Legendre* (Figura 3.26) ■

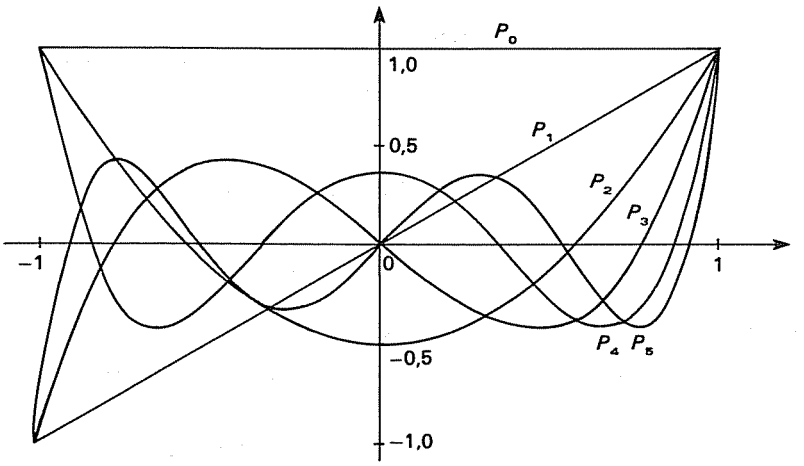


Figura 3.26 Polinômios de Legendre

EXERCÍCIOS

1. Verifique as afirmações sobre as funções de Legendre $v(x)$ e $w(x)$ para $k=2q$ e $k=2q+1$.
2. Obtenha uma fórmula explícita para os polinômios de Legendre e os seis primeiros $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.
3. Obtenha uma base para o espaço de soluções da equação homogênea de Hermite $\mathbf{L}u=0$ com $\mathbf{L}=D^2-2xD+\lambda$, λ constante.
   Obtenha os chamados polinômios de Hermite para λ inteiro.
4. Obtenha os polinômios de Tchebychev T_n que satisfazem a equação
$$\mathbf{L}u=0; \quad \mathbf{L}=(1-x^2)D^2-xD+n^2$$
5. Obtenha os polinômios de Laguerre $\mathbf{L}_n(\alpha)$ que satisfazem a equação
$$\mathbf{L}u=0; \quad \mathbf{L}=xD^2+(\alpha+1-x)D+n$$
   Observe que $x=0$ é ponto de singularidade para $\mathbf{L}$.
   Observação:
   A nomenclatura para estes polinômios, em geral, se aplica aos polinômios "normalizados", que formam uma base especial de $N(\mathbf{L})$.
   Nos exercícios de 6 a 11 obtenha as soluções das equações como séries de potências até a sexta ordem:

6. $u''-(1+y^2)u=0$, $u(0)=-2$ e $u'(0)=2$
7. $u''-x^2u+u'=0$, $u(0)=1$ e $u'(0)=0$
8. $u''-e^xu=0$, $u(0)=0$ e $u'(0)=1$
9. $u'-x^2-u^2=0$, $u(0)=0$ (Observe que a equação é não linear.)
10. $u'=e^u+xu$, $u(0)=0$ (Idem)
11. $u''=-xu$, $u(0)=0$ e $u'(0)=1$

Analisemos agora o problema teórico de construção formal de soluções analíticas para equações do tipo

$$\mathbf{L}u=0; \qquad \mathbf{L}=D^2+p(x)D+q(x)$$

onde $p(x)=\sum_{k\geq 1} p_k x^k$ e $q(x)=\sum_{k\geq 0} q_k x^k$ são séries de potências convergentes em $(-R, R)$.

Procuremos então as soluções na forma $u(x)=\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ pelo método dos coeficientes de Euler, isto é, procuraremos obter uma forma recursiva para o cálculo da seqüência de coeficientes.

$$Du=\sum_{k\geq 0} k a_k x^{k-1}=\sum_{k\geq 0}(k+1)\,a_{k+1}\,x^k$$

$$D^2u=\sum_{k\geq 0} k\,(k-1)\,a_k\,x^{k-2}=\sum_{k\geq 0}(k+2)\,(k+1)\,a_{k+2}\,x^k$$

$$pDu=\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k}(j+1)a_{j+1}\,p_{k-j}\right)x^k$$

$$qu=\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\,q_{k-j}\right)x^k$$

$$\mathbf{L}u=D^2u+pDu+qu=$$

$$=\sum_{u\geq 0}\left\{(k+2)\,(k+1)a_{k+2}+\sum_{j=0}^{k}(j+1)a_{j+1}\,p_{k-j}+\sum_{j=0}^{k} a_j q_{k=j}\right\}x^k$$

Igualando a zero termo a termo, temos

$$a_{k+2} = \frac{-\sum_{j=0}^{k} (j+1)a_{j+1}p_{k-j} - \sum_{j=0}^{k} a_j q_{k-j}}{(k+2)(k+1)} \qquad (k \geqslant 0)$$

Observe que esta fórmula poderia ser escrita como

$$a_{k+2} = \sum_{j=0}^{k} \beta_j(k)\, a_j + \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(k) a_{j+1}$$

ou seja, a_{k+2} é obtido linearmente (com coeficientes α_j, β_j variando com k, em geral) de $\{a_j\}_{0 \leq j \leq k+1}$, fornecendo assim uma fórmula que possibilita o cálculo recursivo dos coeficientes a partir de a_1 e a_0 e, portanto, de uma única maneira.

Podemos obter assim duas soluções formais

$$u(x) = 1 + \sum_{k \geq 2} a_k x^k, \quad u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0$$

e

$$v(x) = \sum_{k \geq 1} a_k x^k \quad \text{onde} \quad v(0) = 0 \quad \text{e} \quad v'(0) = 1 = a_1$$

que são, linearmente independentes. (Verifique!)

Portanto, a solução formal de Euler para o problema está completa e, para provarmos que $u(x)$ e $v(x)$ são soluções analíticas, basta mostrar que as séries convergem.

Analisaremos agora o problema de convergência das séries formais por meio do teorema de Cauchy.

Teorema de Cauchy Consideremos a equação $\frac{d^2}{dx^2}u + p(x)\frac{d}{dx}u + q(x)u = 0$ onde

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} p_k x^n \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{k \geq 0} q_k x^k$$

são séries de potências convergentes em $(-R, R)$. Então as soluções formais $u = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ desta equação convergem no intervalo $(-R, R)$ e formam todo o espaço das soluções, $N(\mathbf{L})$.

Demonstração: Já vimos que os coeficientes a_k são obtidos recursivamente por meio da expressão

$$k(k+1)\, a_{k+2} = -\sum_{j=0}^{k} a_{j+1}\, p_{k-j}(j+1) - \sum_{j=0}^{k} a_j q_{k-j}$$

para todo $k \geqslant 0$, uma vez fornecidos os valores iniciais a_0 e a_1.

Provemos então a convergência de $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ pelo método dos majorantes de Cauchy.

Observe inicialmente que se $0 < R_0 < R$, como $\sum_{k\geq 0}^{N} p_k R_0^k$ converge, quando $N \to \infty$, é fácil ver que $|p_k| R_0^k = |\sum^{N+1} - \sum^{N}|_{N\to\infty} \to 0$ e, portanto, existe uma constante M_1 tal que $|p_k| R_0^k \leqslant M_1$ ou $|p_k| \leqslant M_1 R_0^{-k}$. Analogamente, existe M_2 tal que $|q_k| \leqslant M_2 R_0^{-k}$ para todo $k \geqslant 0$. Tome $M_0 = \max\{M_1, M_2\}$.

Considere agora as funções $P(x) = \sum_{k\geq 0} (MR_0^{-k}) x^k = M \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{R_0}}$, chamadas majorante de p, visto que os seus coeficientes de potências correspondentes são maiores em valor absoluto do que os de p. Verifique que

$$R_0 P'(x) = \sum_{k\geq 0} [(k+1) MR_0^{-k}] x^k = Q(x) = \frac{MR_0^2}{(R_0 - x)^2}$$

também é majorante de $q(x)$ ($|q_k| \leqslant (k+1) MR_0^{-k}$).

A equação $v'' = \dfrac{MR_0}{R_0 - x} v' + \dfrac{MR_0^2}{(R_0 - x)^2} v$ tem solução convergente para $|x| < R_0$, dada por $v(x) = \left(1 - \dfrac{x}{R_0}\right)^u$. Verifique isto observando que esta é uma equação de Euler; Exemplo 8 Secção 3.6.2).

Observe agora que $v(x) = \sum_{k\geq 0} A_k x^k$ e

$$A_{k+2} = \sum_{j=0}^{k} (j+1) P_{k-j} A_{j+1} + \sum_{j=0}^{k} A_j Q_{k-j}$$

e que o cálculo de A_{k+2} é obtido de forma semelhante a a_{k+2}, apenas com a diferença de que os coeficientes P_{k-j} e Q_{k-j} são maiores que $|p_{k-j}|$ e $|q_{k-j}|$ e os termos são positivos. É claro daí que, se $A_0 > |a_0|$ e $A_1 > |a_1|$, teremos $A_{k+2} > |a_{k+2}|$, indutivamente.

Como $\sum A_k x^k$ converge em $(-R_0, R_0)$, então $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$, por comparação, converge em $(-R_0, R_0)$. Como R_0 $(0 < R_0 < R)$ é arbitrário, vê-se que $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ converge em $(-R, R)$.

Este argumento, extremamente engenhoso, é utilizado em muitas demonstrações em Matemática e foi inventado por Cauchy para a prova dada acima. Apresentamos a demonstração rigorosa deste teorema como um exemplo dos argumentos utilizados nesta área. "Uma boa demonstração é aquela que nos faz mais sábios". (Yu I. Manin).

3.6.4 Operadores Diferenciais Lineares Singulares com Coeficientes Analíticos

Na secção anterior vimos como obter soluções formais de equações homogêneas $Lu = 0$ para operadores não singulares e analíticos, $L = a_2 D^2 + a_1 D + a_0$ onde $a_k(x)$ são analíticos e $a_2(x) \neq 0$ em $(-R, R)$.

Se o coeficiente $a_2(x)$ se anula em $x=0$, veremos que o método de Euler pode falhar, não fornecendo mais uma fórmula recursiva para o cálculo dos coeficientes da série formal, $u(x)=\sum_{k\geq 0} u_k x^k$.

É interessante observar que os operadores singulares são muito comuns nas aplicações e, em geral, a análise das soluções da equação homogênea deve ser feita exatamente nas vizinhanças da singularidade. Esta é uma situação típica em Matemática, em que alguns pontos excepcionais, chamados geralmente de singulares, acumulam uma quantidade muito grande de informações sobre o problema e, por este motivo, não podem ser evitados; muito pelo contrário, devem ser analisados com maior cuidado e interesse.

Aqui também isto é verdade e uma das equações mais importantes da Física Matemática, a *equação de Bessel*

$$\mathbf{L}u=\left[x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}+(x^2-n^2)\right]u=0$$

geralmente tem que ser estudada nas vizinhanças de sua singularidade $x=0$, o mesmo acontecendo com as equações *hipergeométricas*

$$\left[(1-x)\,x\frac{d^2}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)]\,x\frac{d}{dx}-\alpha\beta\right]u=0$$

cujas soluções abrangem os polinômios ortogonais clássicos e inúmeras funções da Física Matemática.

A não existência destas séries formais nos sugere que as soluções das equações tenham algum tipo de singularidade nestes pontos, uma vez que o próprio método de Euler-Cauchy nos garante que existem soluções analíticas em $(-R,0)$ e $(0,R)$.

A atitude a ser tomada, então, é tentar prever estas singularidades já na forma da solução procurada, ou seja, "modelar" o termo singular por meio de uma expressão que possa representá-la.

Existem basicamente três tipos de singularidades em $x=0$ para funções $f(x)$ analíticas em $0<|x|<R$:

1. *Pólos de ordem (inteira)* $m>0$

Neste caso a função $f(x)$ tem uma singularidade do tipo $\frac{1}{x^m}$ e podemos escrevê-la na forma $f(x)=\frac{1}{x^m}h(x)$ onde $h(x)=\sum_{k\geq 0} h_k x^k$ é analítica em $|x|<R$. A singularidade é um pólo de ordem $m>0$ se $h_0\neq 0$. (Se $h_0=0$ então $h_1(x)=\frac{h(x)}{x}$ é analítica e $f(x)=\frac{1}{x^{m-1}}h_1(x)$.)

Observe que neste caso também podemos escrever

$$f(x)=\sum_{-m}^{\infty} a_k x^k,\ (a_{-m}\neq 0)$$

válida para $0<|x|<R$, denominada *série de Laurent*.

2. *Ramificações*

Este tipo de singularidade é gerado pela função $\log x$ ou composições desta com outras funções analíticas como $e^{p \log x} = x^p$.

Observe que, neste caso, estamos analisando o intervalo positivo $(0, R)$ para ficarmos com a função log do cálculo elementar.

O estudo das singularidades das funções analíticas, e particularmente as ramificações, é mais natural quando se estende a função para valores no plano complexo, o que pode ser feito através das séries de potências*.

3. *Singularidade essencial*

Neste caso a função toma a forma: $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k x^k$ para $0 < |x| < R$, e para todo N inteiro positivo existe $m > N$ tal que $a_{-m} \neq 0$. Esta condição assegura que a singularidade não é um pólo.

As singularidades mais simples são, certamente, aquelas do tipo pólo. As singularidades do tipo essencial são extremamente complexas no que se refere ao comportamento da função em suas proximidades. No estudo que faremos de operadores singulares nos restringiremos à situações em que as soluções de equação homogênea tenham singularidades do tipo pólo ou ramificações.

Estamos tratando aqui de singularidades do operador diferencial e das soluções da equação homogênea, que estão no mesmo ponto $x = 0$, mas são conceitos distintos embora inter-relacionados. Portanto, estudaremos apenas os casos em que todas as *soluções* de $\mathbf{L}u = 0$ têm a sua singularidade em $x = 0$ "modelada" por expressões do tipo $x^p (\log x)^k h(x)$ (onde p é um número complexo, k um número inteiro e $h(x)$ uma função analítica) ou combinações lineares finitas delas:

$$\Sigma h_{jk}(x) x^{pj} (\log x)^k$$

Nestes casos diremos que o operador analítico

$$\mathbf{L} = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

tem uma singularidade regular em $x = 0$. Caso contrário diremos que é irregular.

A caracterização desta situação através da forma de $\mathbf{L}$ e a construção explícita e algorítmica das soluções se constitui na teoria de Fuchs-Frobenius.

Apresentaremos apenas as construções formais das soluções. As demonstrações de convergência se fazem usualmente pelo método dos majorantes de Cauchy.

Iniciaremos o estudo pelo caso em que o operador $\mathbf{L}$ tem uma singularidade fraca, isto é, $a_2(x)$ tem apenas um zero simples em $x = 0$

$$a_2(x) = \sum_{k \geq 1} a_{2k} x^k = x \left(\sum_{k \geq 1} a_{2k} x^{k-1} \right) \text{ com } a_{21} \neq 0.$$

---

* A origem do termo ramificação provém do fato de que a função $\log z$ no plano complexo é multivalente, ou seja, de certa forma, $\log z$ representa várias funções. Por exemplo, $f(z) = z^{1/3}$, $z \in \mathbb{C}$ representa três funções distintas, as três raízes terceiras de z.

Dividindo a equação $\mathbf{L}u = 0$ por $\sum_{n\geq 1} a_{2k}\, x^{k-1}$ que é analítica e não nula em $x = 0$, obtemos a forma canônica dos operadores analíticos com singularidades fracas

$$\mathscr{L} = x\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

$p(x) = \sum_{k\geq 0} p_k\, x^k$ e $q(x) = \sum_{k\geq 0} q_k\, x^k$, analíticas em $(-R, R)$.

Tentaremos, então, obter uma solução formal $u(x) = \sum_{k\geq 0} u_k\, x_k$ pelo método de Euler

$$Du = \sum_{k\geq 0} k\, u_k\, x^{k-1} = \sum_{k\geq 0} (k+1)\, u_{k+1}\, x^k$$

$$xD^2u = \sum_{k\geq 0} k(k-1)\, u_k\, x^{k-1} = \sum_{k\geq 0} (k+1)\, k\, u_{k+1}\, x^k$$

$$p(x)\, Du = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} (j+1)\, u_{j+1}\, p_{k-j} \right) x^k$$

$$q(x)\, u = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} u_j\, q_{k-j} \right) x^k$$

$$\mathbf{L}u = \sum_{k\geq 0} \left[(k+1)\, k\, u_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} (j+1)\, u_{j+1}\, p_{k-j} + \sum_{j=0}^{k} u_j\, q_{k-j} \right] x^k = 0$$

Igualando a zero o coeficiente de cada potência k de x e separando o coeficiente u_{k+1} que tem o maior índice em cada termo, obtemos

$$[(k+1)\, k + (k+1)\, p_0]\, u_{k+1} = \text{combinação linear de } u_0, \ldots, u_k$$

ou dividindo por $k+1$, $[k + p_0]u_{k+1} = \text{combinação linear de } u_0, \ldots, u_k$.

Observe que temos aí uma fórmula recursiva de *primeiro grau* se p_0 *não* for um inteiro negativo.

Portanto, já neste caso de singularidade fraca temos duas dificuldades na construção da solução formal pelo método de Euler. A primeira delas é que no máximo uma solução pode ser obtida, pois a fórmula recursiva é de primeira ordem e apenas o valor de u_0 pode ser atribuído livremente; u_1 fica automaticamente determinado pela fórmula. Esta não chega a ser uma grande dificuldade porque podemos calcular outra solução, linearmente independente, pelo método de redução da ordem (ou variação das constantes, Secção 3.6.2).

Mas há uma segunda dificuldade: a fórmula recursiva pode falhar na $N+1$-ésima etapa se $p_0 = -N$, isto é, se p_0 for inteiro negativo. Esta equação é satisfeita somente se o termo à direita também se anula e, conseqüentemente, u_{N+1} fica livre. Portanto, neste caso o dado livre do processo recursivo é u_{N+1}; daí para frente obtemos os outros termos recursivamente, sem dificuldades, através da fórmula e de u_{N+1}, já que $k + p_0 \neq 0$ se $k > N$. Os termos u_N, u_{N-1}, ..., u_0 são feitos nulos e assim a fórmula recursiva é satisfeita até a $N+1$-ésima etapa. Neste caso, então

$$u(x) = \sum_{k\geq N+1} u_k\, x^k$$

Portanto, o método de Euler ainda se salva no caso de singularidades fracas e fornece uma solução, a outra pode ser obtida pelo método de variação das constantes.

EXERCÍCIOS

1. Enuncie um teorema para o cálculo de uma solução formal em série de potências da equação $\mathbf{L}u = 0$ onde $\mathbf{L}$ é analítico com singularidade fraca.
2. Aplique o método de Euler (modificado) e da variação das constantes para obter a solução completa de

$$a.\ \left[x\frac{d}{dx} + (3x-1)\frac{d}{dx} + 2\right]u = 0 \qquad b.\ \left[\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dx} + (2x - x^3)\right]u = 0$$

A próxima etapa natural será abordar um operador

$$\mathbf{L} = a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

cuja singularidade é dada por um zero de segunda ordem de $a_2(x)$ em $x = 0$.

Utilizando o mesmo argumento, analisaremos o operador na forma

$$\mathbf{L} = x^2\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas como antes.

Entretanto, esta já é uma situação muito geral que pode resultar em singularidades essenciais para as soluções.

Por exemplo, a equação

$$x^2u'' + (2x+1)u' = 0$$

tem $u = e^{1/x}$ como solução e, portanto

$$\mathbf{L} = x^2D + (2x+1)D$$

é irregular em $x = 0$.

A teoria que permite caracterizar a classe de operadores analíticos regulares e que, além disto, fornece um método recursivo para o cálculo das soluções foi desenvolvida por L. Fuchs (1833-1902) e G. Frobenius (1849-1917). Focalizaremos apenas o aspecto formal da teoria.

Teorema de Fuchs-Frobenius O operador linear analítico em $(-R, R)$ do tipo

$$\mathbf{L} = x^2D^2 + xpD + q$$

é regular, isto é, as soluções de $\mathbf{L}u = 0$ apresentam apenas singularidades em $x = 0$ do tipo pólo ou ramificação.

Apresentaremos em seguida um esboço da demonstração. Como tentativa inicial vamos "modelar" a singularidade da solução em $x = 0$ na forma $u = x^\rho h(x)$, onde $h(x)$ deve ser uma função analítica.

Calculando $\mathbf{L}(x^\rho h)$, obtemos

$$\mathbf{L}(x^\rho h) = xh'' + (p + 2\rho)h' + \frac{1}{x}[\rho(\rho - 1) + \rho p + q]\, h = 0$$

que será vista como uma equação diferencial na função h. Esta equação é singular mas podemos tornar a singularidade fraca se

$$\frac{1}{x}[\rho(\rho - 1) + \rho p + q]$$

for analítica em $x = 0$, e para que isto ocorra $\rho(\rho - 1) + \rho p + q$ deve ter uma expansão em x sem termo independente, isto é,

$$\rho(\rho - 1) + \rho p_0 + q_0 = 0 \tag{4}$$

A Equação (4), denominada *Equação Indicial*, nos fornece a oportunidade de escolher o expoente ρ adequadamente como uma de suas raízes.

O polinômio

$$I(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda p_0 + q_0$$

é denominado polinômio indicial da equação $\mathbf{L}u = 0$.

Consideremos apenas os casos em que $I(\lambda)$ tenha raízes reais.

Suponhamos que ρ seja uma raiz indicial real. Vamos aplicar o método de Euler (modificado) para a obtenção de h na forma

$$h(x) = \sum_{k \geq 0} h_k\, x^k$$

Efetuando os cálculos usuais, obtemos uma equação recursiva para os coeficientes h_k do tipo

$$[(k+1)k + 2\rho(k+1) + (k+1)p_0 + \rho(\rho - 1)p_0 + q_0]h_{k+1} = \text{combinação linear}$$

de $\{h_j\}_{0 \leq j \leq k}$.

Podemos assim escrever o coeficiente de h_k como $I(\rho + k + 1)$.

Verificamos imediatamente que:

1. Se as raízes (reais)

$$\rho_{1,2} = \frac{1 - p_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - p_0}{2}\right)^2 - q_0}$$

da equação indicial não diferem entre si por um número inteiro, o processo recursivo para o cálculo de h pode ser realizado para ambos os expoentes e o método fornece duas soluções linearmente independentes

$$u_1(x) = x^{\rho_1} h_1(x) \qquad \text{e} \qquad u_2(x) = x^{\rho_2} h_2(x)$$

onde h_1 e h_2 são analíticas.

2. Se as raízes são tais que $\rho_1 = \rho_2 + n$, $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geqslant 0$, então o método nos dá uma solução na forma

$$u_1(x) = x^{\rho_1} h_1(x) \qquad (\rho_1 \geqslant \rho_2)$$

Agora, como $I(\rho_2 + n) = 0$, o método de Euler para singularidades fracas produz uma solução do tipo $h_2(x) = x^n h_0(x)$, h_0 analítica. Logo, a solução u_2 será da forma

$$u_2(x) = x^{\rho_2} x^n h_0(x) = x^{\rho_1} h_0(x)$$

Temos, neste caso, que u_1 e u_2 são linearmente dependentes. (Verifique!)

É necessário, pois, a utilização de outro método para completar a solução da equação homogênea. Para a equação de segunda ordem, o método de redução de ordem (fatoração) pode ser empregado e uma solução u_2 linearmente independente de $u_1(x) = x^{\rho_1} h_1(x)$ vem dada por

$$u_2(x) = \int \frac{\exp\left(-\int \frac{p}{x}\right)}{u_1^2}$$

Vamos analisar melhor a forma da solução u_2 dada pela integral indefinida. Como $u_1 = x^{\rho_1} h_1$ e $h_1(0) \neq 0$, podemos escrever $\frac{1}{h_1^2}$ como uma série de potências em x

$$\frac{1}{h_1^2(x)} = H_1(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k, \text{ com } a_0 \neq 0$$

Portanto

$$\frac{1}{u_1^2} = x^{-2\rho_1} H_1(x)$$

Observemos agora que $\frac{-p(x)}{x} = \frac{-p_0}{x} - p_1 - p_2 x, \ldots,$ e portanto $e^{-\int \frac{p}{x}} = x^{-p_0} G(x)$, onde $G(x)$ é uma série de potências. Assim,

$$\frac{\exp\left(-\int \frac{p}{x}\right)}{u_1^2} = x^{-2\rho_1 - p_0} \quad \text{(série de potências)}$$

Agora, como

$$\rho_1 = \frac{1 - p_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - p_0}{2}\right)^2 - q_0}$$

então

$$-2\rho_1 - p_0 = -1 - 2\sqrt{\left(\frac{1 - p_0}{2}\right)^2 - q_0} = -1 - n \quad \text{pois} \quad \rho_1 - \rho_2 = n$$

Desta forma, podemos escrever sucessivamente

$$\frac{\exp\left(-\int \frac{p}{x}\right)}{u_1^2} = x^{-(n+1)} \quad \text{(série de potências em } x\text{)}$$

e

$$\int \frac{\exp\left(-\int \frac{p}{x}\right)}{u_1^2}\, dx = x^{-n} \quad \text{(série de potências de } x\text{)} + C \ln |x|$$

e finalmente

$$u_2(x) = x^{\rho_1} h_1(x) \int \frac{\exp\left(-\int \frac{p}{x}\right)}{u_1^2} = x^{\rho_1 - n} \quad \text{(série de potências de } x\text{)} + C u_1 \ln |x|$$

ou

$$u_2(x) = x^{\rho_2} \quad \text{(série de potências de } x\text{)} + C u_1 \ln |x|$$

Em resumo, se $\rho_1 = \rho_2 + n$ (n inteiro e $n \geqslant 0$) as soluções u_1 e u_2 linearmente independentes são dadas por

$$u_1(x) = x^{\rho_1} h_1(x)$$
$$u_2(x) = x^{\rho_2} h_2(x) + u_1 \ln |x|$$

onde h_1 e h_2 são analíticas em $(-R, R)$.

3. Se as raízes indiciais forem complexas devemos considerar as funções de variável real e valor complexo

$$x^{a+ib} = x^a x^{ib} = x^a e^{ib \ln x}$$

que, para $x > 0$, podem ser escritas como

$$x^a \quad \text{(série de potências em } \ln x\text{)}$$

e portanto, neste caso, as singularidades com ramificações aparecerão com ordem infinita. As soluções reais serão obtidas da parte real e da parte imaginária das soluções complexas (ver Exemplo 7).

O tratamento destas situações exige uma abordagem via teoria de funções de variável complexa, que foge ao escopo deste nosso texto; o leitor pode consultar outras fontes*.

Desenvolveremos agora alguns exemplos para aclarar os argumentos apresentados.

---

* **BIRKHOFF, G. & Rota, R.C.** *Ordinary Differencial Equations*. New York, Ginn Co., 1962.
BENDER, C.M. & Orszag, S.A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York, McGraw-Hill, 1978.
INCE, E.L. *Ordinary Differential Equations*. New York, Dover, 1953.

EXEMPLO 6 Equação singular na origem x = 0

Determine duas soluções linearmente independentes da equação singular

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)\, y = 0 \qquad (0 < x < +\infty)$$

Solução: Seja

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \qquad (a_0 \neq 0)$$

Então

$$Dy = y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)\, a_n x^{n+s-1}$$

$$D^2y = y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)\,(n+s-1)\, a_n\, x^{n+s-2}$$

Substituindo y e suas derivadas na equação vem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)\,(n+s-1)\, a_n\, x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)\, a_n\, x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+s+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+s} = 0$$

ou

$$x^s \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)\,(n+s-1) + (n+s) - 1]\, a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^n \right\} = 0$$

Escrevemos separadamente os termos que aparecem na primeira mas não na segunda soma, isto é, os termos com $n = 0$ e $n = 1$

$$a_0\,(s^2 - 1)\, x^s + a_1\,[(s+1)^2 - 1]\, x^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n\,[(s+n)^2 - 1] + a_{n-2}\}\, x^{s+n} = 0$$

Logo, é necessário que

$$\boxed{s^2 - 1 = 0} \qquad (\text{pois } a_0 \neq 0)$$

Tal equação que provém da menor potência de x^s é a equação indicial da equação diferencial correspondente e determina os valores possíveis de s que, neste caso particular, são $s_1 = 1$ e $s_2 = -1$.

A segunda condição a ser satisfeita é

$$a_1\,[(s+1)^2 - 1] = 0$$

e como $[(s+1)^2 - 1] \neq 0$ para $s = 1$ ou $s = -1$, segue-se que $a_1 = 0$.

Finalmente, a condição seguinte deve ser válida para todos os valores de $n \geqslant 2$

$$a_n\,[(s+n)^2 - 1] + a_{n-2} = 0$$

ou

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{1 - (s+n)^2} \quad (n \geqslant 2) \quad \text{(Fórmula de recorrência que determina todos os coeficientes).}$$

Para $s = 1$, temos

$$a_2 = -\frac{1}{8} a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{24} a_2 = \frac{1}{192} a_0$$

e de uma maneira geral

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{1-(1+2)^2} \cdot \frac{1}{1-(1+4)^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-(1+2n)^2} a_0$$

E como $a_1 = 0$, segue-se que $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = 0$.

Desta forma obtemos uma solução $y_1(x)$ da equação diferencial, onde

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n+1} = a_0\left(x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{192}x^5 - \ldots\right)$$

E como

$$\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = \frac{1}{(3+2n)^2 - 1} \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty$$

então, pelo teste da razão, a série que define $y_1(x)$ é analítica para todos os valores (finitos) de x. ■

EXEMPLO 7

A equação de Euler

$$x^2u'' + xu' + u = 0$$

tem raízes indiciais $\rho_1 = i$ e $\rho_2 = -i$ $(\rho_1 - \rho_2 = 2i)$.
Portanto, o método de Frobenius produz duas soluções complexas

$$u_1(x) = x^i = e^{i \ln |x|}$$
$$u_2(x) = x^{-i} = e^{-i \ln |x|}, \quad x \neq 0$$

de onde tiramos as soluções reais por superposição

$$w_1(x) = \cos(\ln x)$$
$$w_2(x) = \operatorname{sen}(\ln x), \quad x \neq 0$$ ■

EXEMPLO 8 Equação de Bessel de ordem zero

Analisar, pelo método de Frobenius, as soluções de:

$$\boxed{x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x\,y = 0}$$

Solução: Tomando $y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_0 \neq 0)$, juntamente com suas derivadas e substituindo na equação de Bessel, vem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)\,a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)\,a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0$$

De onde,

a. $[s(s-1)+s]\,a_0 = 0 \qquad (n=0)$
b. $[(s+1)s + (s+1)]a_1 = 0 \qquad (n=1)$
c. $[(n+s)(n+s-1) + (n+s)]a_n + a_{n-2} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$

De (*a*) obtemos a equação indicial

$$s^2 = 0$$

cujas raízes são ambas nulas, $s_1 = s_2 = 0$.

Agora, para que (*b*) seja satisfeita devemos ter $a_1 = 0$, e a Equação (*c*) pode ser escrita

$$a_n = \frac{-a_{2n-2}}{(n+s)^2}$$

como $a_3 = a_5 = \ldots = 0$, tomando $s = 0$, obtemos a fórmula de recorrência

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{4n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Assim,

$$a_2 = -\frac{a_0}{4} = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2^2} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2^2}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^3 \cdot 3^2} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^6} = -\frac{a_0}{(2 \cdot 3)^2 2^6}$$

$$a_8 = -\frac{a_6}{2^2 \cdot 4^2} = \frac{a_0}{(2 \cdot 3 \cdot 4)^2 2^8} \quad \text{etc.}$$

De uma maneira geral podemos escrever

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(n!)^2 2^{2n}}$$

Tomando $a_0 = 1$, obtemos uma solução da equação de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

Tal função é denominada função de Bessel de primeira espécie, de ordem 0.

Para obter uma segunda solução da equação de Bessel, linearmente independente $J_0(x)$, tomamos

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

juntamente com suas derivadas

$$y_2'(x) = J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$$

$$y_2''(x) = J_0'' \ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=1} n(n-1) x^{n-2}$$

e substituímos na equação de Bessel, obtendo:

$$2J_0' + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Como $J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n-1}$. Usando este resultado na equação anterior, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n-2} n!(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Logo

$$-x + \frac{1}{2^2 \cdot 2} x^3 - \frac{1}{2^4 \cdot 6 \cdot 2} + \ldots$$
$$+ a_1 + 2^2 a_2 x + 3^2 a_3 x^2 + \ldots$$
$$+ a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \ldots = 0$$

Daí

$$a_1 = 0$$

$$-1 + 4a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}$$

e

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n+1)!n!} + (2n+2)^2 a_{2n+2} + a_{2n} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3\ldots)$$

Assim, para $n = 1$

$$\frac{1}{8} + 16a_4 + a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{-1}{2^{2\cdot 2}(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{128}$$

para $n = 2$

$$-\frac{1}{2^4 \cdot 3!2!} + 36a_6 + a_4 \Rightarrow 36a_6 = \frac{1}{2^{2\cdot 3}\cdot 3} + \frac{1}{2^{2\cdot 3}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2\cdot 3}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

Logo

$$a_6 = \frac{1}{2^{2\cdot 3}(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{13824} \cong 0{,}0008$$

De uma maneira geral temos

$$a_{2m} = \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right) = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{p}\right) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Do fato de $a_1 = 0$, temos que $a_3 = a_5 = \ldots = 0$.
Assim, a solução y_2 pode ser escrita na forma

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m!)^2}\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{p}\right]x^{2m} \cong J_0(x)\ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + 0{,}0008x^6 - 0{,}000014x^8 + \ldots$$

Como $y_2(x)$ e J_0 são linearmente independentes, a solução geral da equação de Bessel de ordem zero é dada por

$$y(x) = J_0(x)\,(A_1 + A_2 \ln x) + A_2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + \ldots\right)$$

onde A_1 e A_2 são constantes.

Tomando o caso particular em que $A_1 \cdot A_2 = \dfrac{\pi}{2}$ e $A_2 = \gamma - \ln 2$ onde

$$\gamma = \lim_{s\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{s}\frac{1}{p} - \ln s\right) \cong 0{,}5772 \text{ (constante de Euler)}$$

a solução particular obtida é denominada *função de Neumann* de ordem zero (ver Figura 3.27) e vem dada por

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{2^m\,(m!)^2}\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{p}\right)x^{2m}\right]$$

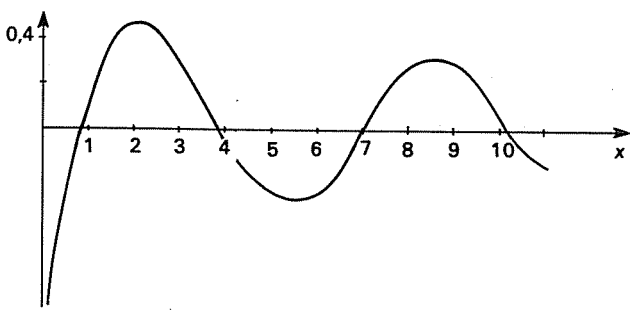


Figura 3.27 Função de Neumann de ordem zero

Como já vimos, se as raízes da equação indicial diferem por um número inteiro positivo, isto é

$$s_1 - s_2 = N > 0$$

então, as soluções da equação diferencial correspondente são dadas por

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{e} \quad y_2 = A y_1(x) \ln x + x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

onde a constante A pode eventualmente ser igual a zero.

No Exemplo 6, da equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)\, y = 0$$

obtivemos a equação indicial

$$s^2 - 1 = 0$$

de modo que suas raízes $s_1 = 1$ e $s_2 = -1$ diferem por um um número inteiro positivo ($s_1 - s_2 = 2$).

Para $s = 1$, obtivemos

$$y_1(x) = a_0 \left(x - \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{192} x^5 + \ldots \right)$$

De uma maneira geral uma equação do tipo

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)\, y = 0$$

denominada *equação de Bessel de ordem* λ tem como equação indicial

$$(s^2 - \lambda) = 0$$

cujas raízes são $s_1 = \lambda$ e $s_2 = -\lambda$.

Para $s = \lambda$, obtemos uma solução

$$J_\lambda(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

com

$$a_1 = a_3 = \ldots = 0$$

e

$$a_{2m} = -\frac{1}{2^2 m (\lambda + m)} \quad a_{2m-2} \qquad (m = 1, 2 \ldots)$$

Observações:

a. Se λ não é inteiro, então $J_{-\lambda}(x)$ também é solução da equação de Bessel de ordem λ, e a solução geral é dada por

$$y(x) = A_1 J_\lambda(x) + A_2 J_{-\lambda}(x), \qquad \text{para todo } x \neq 0$$

b. Se λ é inteiro, então $J_{-\lambda}(x)$ e $J_\lambda(x)$ são linearmente dependentes pois $J_{-\lambda}(x) = (-1)^\lambda J_\lambda(x)$ (Verifique!)

Neste caso, agindo como no Exemplo 8 (equação de Bessel de ordem zero), obtemos uma segunda solução linearmente independente de $J_\lambda(x)$. Tal solução, escrita na forma

$$Y_\lambda(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda\pi} [J_\lambda(x) \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(x)] \quad (\lambda = 1, 2 \ldots)$$

é denominada *função de Neumann de ordem* λ. Se λ é inteiro obtemos a função de Neumann no limite quando $\lambda \to n$, isto é

$$Y_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J\lambda}{\partial \lambda} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda = n} \quad \text{(Verifique!)}$$

Para maiores informações sobre as funções de Bessel consulte Tijonov-Samarsky ou o tratado de Watson*.

c. É costume considerar o valor da constante a_0 dado por

$$a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$$

onde $\Gamma(\lambda+1)$ é a *função gama* definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt \qquad (\alpha > 0) \tag{1}$$

que satisfaz a seguinte propriedade básica $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, para todo $\alpha > 0$. De fato, integrando por partes (1), obtemos

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^\alpha\, dt = e^{-t}\, t^\alpha \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt = \alpha\Gamma(\alpha)$$

Se α é um inteiro não negativo, temos

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha! \qquad (\alpha = 0, 1, 2 \ldots)$$

Desta maneira, podemos considerar a função Γ como uma generalização da função fatorial. Por exemplo:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} \quad \text{(Verifique!)}$$

Retornando aos coeficientes da expansão de J_λ, temos

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\lambda+1)} = -\frac{1}{2^{2+\lambda}1!\Gamma(\lambda+2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2\, 2(\lambda+2)} = \frac{1}{2^{4+\lambda}2!\Gamma(\lambda+3)} \text{ etc.}$$

Em geral

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\lambda}m!\Gamma(\lambda+m+1)}$$

Assim, uma solução particular da equação de Bessel vem dada por

$$J_\lambda(x) = x^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, x^{2m}}{2^{2m+\lambda}m!\Gamma(\lambda+m+1)}$$

Esta solução é conhecida como *função de Bessel de ordem* λ.

EXERCÍCIOS

1. Comprove que a equação

$$x^2y'' + \left(x^2 + \frac{3}{16}\right)y = 0$$

tem como soluções linearmente independentes

$$y_1(x) = a_0\, x^{1/4}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{42}x^4 \ldots\right)$$

---

* **TIJONOV, A.N. & Samarsky, A.A.** *Ecuaciones de La Física Matemática.* **Moscou, Mir, 1972.**
WATSON, G.N. *A Treatise on the Bessel Functions.* **2nd ed. New York, Cambridge University Press, 1966.**

e

$$y_2(x) = a_0\, x^{3/4}\left(1 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{18}x^4 \ldots\right)$$

Observe que, neste caso, a equação indicial é dada por

$$s(s-1) + \frac{3}{16} = 0 \qquad \left(p = 0 \quad \text{e} \quad q = \frac{3}{16}\right)$$

cujas raízes são $s_1 = \frac{1}{4}$ e $s_2 = \frac{3}{4}$ (que não diferem por um número inteiro).

2. Encontre a solução geral da equação de Bessel de ordem 1.

3. *a*. Resolva a equação de Bessel de ordem $\frac{1}{2}$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0$$

b. Considere a mudança de variável $y = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$. Mostre que $\dfrac{d^2u}{dx^2} + u = 0$.

Resolva esta equação e compare com o resultado obtido na parte (*a*).

4. Mostre que $Y_0(x) = J_0(x)\displaystyle\int \frac{dx}{xJ_0^2(x)}$.

5. Encontre uma solução da equação de Laguerre

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \qquad (\lambda \text{ constante})$$

da forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Verifique se esta solução se reduz a um polinômio de grau λ quando λ é um inteiro positivo (polinômio de Laguerre).

6. Obtenha a fórmula para a função geradora de $\{J_k(x)\}$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_k(x)\,\alpha^k = \exp\left[\frac{x}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

expandindo o termo à direita e comprovando que os coeficientes satisfazem a equação de Bessel

$$\left[x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + (x^2 - k^2)\right]u = 0$$

Nos exercícios de 7 a 12 mostre que as equações são regulares e obtenha os seus expoentes característicos (índices), escrevendo a forma geral da solução:

7. $\left(x\dfrac{d^2}{dx^2} + (1-x)\dfrac{d}{dx} + \alpha\right) = \mathbf{L};\ \mathbf{L}u = 0, \quad x = 0$ (Laguerre)

8. $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{u}{x}\ \dfrac{d}{dx} + \dfrac{1}{x}\right)u = 0, \quad x = 0$

9. $\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{d}{dx}\right] + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right] = \mathbf{L}, \quad \mathbf{L}u = 0, \quad x = \pm 1$ (Legendre)

10. $\left[4x(1-x)\dfrac{d^2}{dx^2} + 2(1-2x)\dfrac{d}{dx} + (\lambda - 16k + 32kx)\right] = \mathbf{L}, \quad x = 0$ (Mathieu)

11. $\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{1-x^2}{4x^2} = \mathbf{L}, \quad x = 0$

12. $x\dfrac{d^2}{dx^2}+(\lambda-x)\dfrac{d}{dx}-\alpha=\mathbf{L}$ (Kummer)

13. Analise e obtenha as soluções da equação de Kummer pelo método exposto nesta secção.

14. Obtenha a solução

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

para a equação hipergeométrica (pelo método de Frobenius)

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+(\gamma-x(\alpha+\beta+1))\frac{d}{dx}-\alpha\beta\right]u=0$$

Mostre que a segunda solução é da forma

$$x^{1-\gamma}F(\beta-\gamma+1,\ \alpha-\gamma+1,2-\gamma,x)$$

15. Mostre pelo método de Frobenius que a equação

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1-x^2}{4x^2}u=0$$

tem uma base de soluções da forma

$$u_1(x)=x^{1/2}\left(1+\frac{x^2}{16}+\frac{x^4}{1.024}+\ldots\right)$$

$$u_2(x)=u_1\log x-\frac{x^{3/2}}{16}\ldots$$

16. Mostre que o núcleo de $\mathbf{L}$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)\right]u=\mathbf{L}$$

tem base na forma

$$u_1(x)=1-(2n+1)\frac{x^2}{4}+(4n^2+4n+3)\frac{x^4}{96}+\ldots$$

$$u_2(x)=x-(2n+1)\frac{x^3}{12}+(4n^2+4n+7)\frac{x^5}{480}-\ldots$$

17. Mostre que a equação de Laguerre associada

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2}+(k+1-x)\frac{d}{dx}+(n-k)\right]u=\mathbf{L}$$

tem solução polinomial $L_n^k(x)$ para todos os inteiros positivos k e n.

18. Analise as fórmulas de recorrência para séries formais do tipo $\sum_{k\geq 0}a_k\,x^{\alpha+k}$ para as equações

a. $x^3\dfrac{d^2}{dx^2}u=u$ *b.* $x^2\dfrac{d^2}{dx^2}u+(1+3x)\dfrac{d}{dx}u+u=0$

3.6.5 Funções de Green e o Método de Superposição de Dirac para a Equação Não Homogênea

O nosso objetivo nesta secção é utilizar o princípio de superposição de maneira bem geral, para que possamos escrever a solução completa de $\mathbf{L}u=f$ com um mínimo de informações. Este mínimo certamente deve incluir as soluções da equação homogênea, uma vez que necessitamos dela para a solução geral e, conseqüentemen-

te, também para a resolução de problemas com condições auxiliares (problema de Cauchy e problemas de valores laterais).

A questão se resume, então, na obtenção de uma solução particular qualquer de $\mathbf{L}u = f$.

Se $\mathbf{L}$ for não singular analítico e f também for analítica, então a equação $\mathbf{L}u = f$ poderá ser resolvida pelo mesmo método que a equação homogênea; a única diferença é que as fórmulas de recorrência para os coeficientes $\{C_k\}_{k\geq 0}$; $u = \sum_{k\geq 0} C_k(x-x_0)^k$ serão não homogêneas.

Entretanto, o nosso objetivo aqui é mais ambicioso: queremos resolver $\mathbf{L}u = f$ para f em uma ampla classe de funções (bem mais ampla do que o espaço das funções analíticas).

Consideraremos, por simplicidade de notação, apenas os operadores de segunda ordem,

$$\mathbf{L} = a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$$

não singulares; $a_2(x) \neq 0$ em (a, b), com coeficientes contínuos e $a_2'(x)$ contínua.

Vamos supor, então, que conhecemos $N(\mathbf{L})$ na forma de uma base $\{u_1(x), u_2(x)\}$ e, portanto, sabemos resolver qualquer problema de Cauchy homogêneo

$$\begin{cases} \mathbf{L}v = 0 \\ I_0 = v \end{cases}$$

O princípio de superposição parte da representação de $f(x)$ como soma, infinita (séries) ou contínua (integrais), de termos para os quais a equação não homogênea pode ser resolvida.

Utilizaremos o método de Green e Dirac que representa uma função $f(x)$ por superposição contínua (no limite) de pulsos

$$f(x) \sim \int_a^b f(s)\,\delta_\varepsilon(x-s)\,ds$$

onde $\delta_\varepsilon(x)$ são pulsos "quase perfeitos" concentrados em $x = 0$, ou seja

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon(x) \geqslant 0, \ \delta_\varepsilon \text{ continuamente diferenciáveis} \\ \delta_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{se} \quad |x| > \varepsilon \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,dx = I_\varepsilon, \text{ onde } I_\varepsilon \to 1 \text{ quando } \varepsilon \to 0 \quad \text{(ver Figura 3.28)} \end{cases}$$

(releia o comentário sobre a natureza física destes pulsos na Secção 3.4.8).

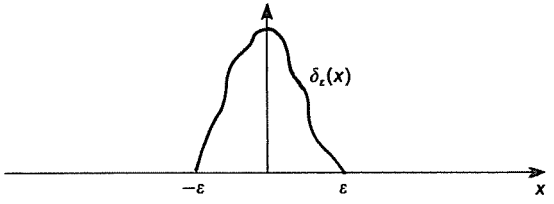


Figura 3.28

Esta representação de $f(x)$ é aproximada para $\varepsilon \neq 0$, e

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^b f(s)\, \delta_\varepsilon(x-s)ds = f(x)$$

Vejamos como a função $f_\varepsilon(x) = \int_a^b \delta_\varepsilon(x-s)\, f(s)ds$ tende a $f(x)$ em (a, b) quando $\varepsilon \to 0$.

Inicialmente verificamos que

$$f(x) - \int_a^b \delta_\varepsilon(x-s)\, f(x)ds$$

ou seja

$$f(x) - \int_a^b \delta_\varepsilon(x-s)\, f(x)ds = (1 - I_\varepsilon)\, f(x)$$

Comparando agora $f(x)$ com $f_\varepsilon(x)$ por intermédio desta aproximação temos

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| = |f(x) - I_\varepsilon f(x) + \int_a^b \delta_\varepsilon(x-s)\,[f(x) - f(s)]ds| \leqslant$$

$$\leqslant |1 - I_\varepsilon|\ |f(x)| + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |f(x) - f(s)|\ \delta_\varepsilon(x-s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |(1 - I_\varepsilon)|\ |f(x)| + \max_{x-\varepsilon \leq s \leq x+\varepsilon} |f(x) - f(s)|\, I_\varepsilon$$

Se $f(x)$ é uniformemente contínua em (a, b) então temos que $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant Q(\varepsilon)$ onde $Q(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ e independe de x, o mesmo acontecendo com a última expressão acima.

Seqüências de funções do tipo $\delta_{\varepsilon_n}(x)$ $(\varepsilon_n \to 0)$ são chamadas seqüências de Dirac.

É óbvio que a resolução de $\mathbf{L}G_\varepsilon = \delta_\varepsilon(x-s)$ pode ser tão difícil quanto a de $\mathbf{L}u = f$, ou talvez mais e, portanto, nestes termos não há simplificação. Porém, estamos interessados no limite, quando

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^b \delta_\varepsilon(x-s)\, f(s)\, ds$$

Como não existe o limite clássico, ponto a ponto, das funções $\delta_\varepsilon(x)$ quando $\varepsilon \to 0$, a nossa solução **não** *será procurada como solução de um problema limite* $\mathbf{L}u = \delta$, *mas como o limite das soluções de* $\mathbf{L}G_\varepsilon = \delta_\varepsilon(x-s)$.

Para utilizarmos o princípio de superposição (aproximadamente), devemos então resolver a equação $\mathbf{L}_x G_\varepsilon(x, s) = \delta_\varepsilon(x-s)$ para todo s em (a, b), de forma que "multiplicando ambos os termos por $f(s)ds$ e superpondo continuamente em s (isto é, integrando)" tenhamos

$$\int_a^b \mathbf{L}_x G_\varepsilon(x, s)\, f(s)\, ds = \int_a^b \delta_\varepsilon(x-s)\, f(s)\, ds \sim f(x)$$

$$\mathbf{L}_x\left(\int_a^b G_\varepsilon(x,s)\,f(s)ds\right)=\left(\int_a^b \delta_\varepsilon(x-s)\,f(s)\,ds\right)\sim f(x)$$

ou seja

$$\left(\int_a^b G_\varepsilon(x,s)\,f(s)\,ds\right)$$

deve ser solução para uma equação aproximada $\mathbf{L}u_\varepsilon = f_\varepsilon$. Isto significa que, se soubermos como o sistema responde aos pulsos então, por superposição, podemos reconstruir a sua resposta para qualquer entrada $f(x)$.

O que podemos esperar, então, é que para $\varepsilon \downarrow 0$ a solução $u_\varepsilon(x)$ tenha um limite clássico ponto a ponto $u(x)$ e que esta seja a solução de $\mathbf{L}u = f$.

Portanto, o nosso trabalho agora consiste de duas etapas, sendo a primeira delas a construção *teórica* de $G_\varepsilon(x,s)$ e a análise do limite para $\varepsilon \downarrow 0$, para mostrarmos, teoricamente, que ele existe. Neste caso, esta função limite será denominada *função de Green* denotada por $G(x,s)$. A segunda etapa consiste na construção *efetiva* de $G(x,s)$ e demonstração de que $\int_b^a G(x,s)f(s)ds$ é uma solução de $\mathbf{L}u = f$.

Observe inicialmente que $G_\varepsilon(x,s)$ satisfaz a equação homogênea para $x \leqslant s-\varepsilon$ e $x \geqslant s+\varepsilon$, onde $\delta_\varepsilon(x-s)=0$ (ver Figura 3.29). Portanto, nestas duas regiões sabemos como expressar $G_\varepsilon(x,s)$ em termos de $\{u_1(x), u_2(x)\}$ base de $N(\mathbf{L})$. Entretanto, não sabemos como se dá a transição de um intervalo para outro, durante o pulso.

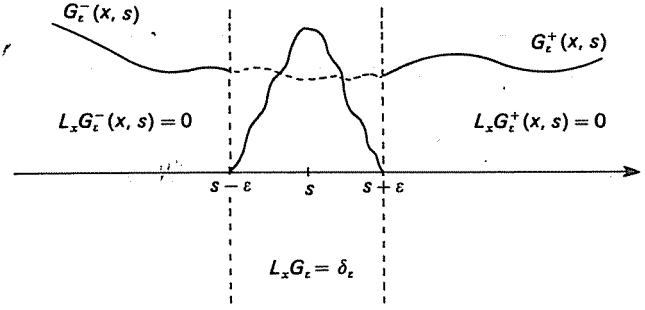


Figura 3.29

Na verdade, não nos interessa o comportamento de $G_\varepsilon(x,s)$ em $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$, uma vez que esta região desaparecerá para $\varepsilon \to 0$ e se houver a função limite $G(x,s)$ o nosso desconhecimento dela se restringirá a apenas um ponto. O que nos interessa é a forma como se faz a conexão entre o regime anterior ao pulso e o posterior, ou seja, a descrição exata da descontinuidade da função limite.

Para analisar isto, utilizamos a única informação de que dispomos sobre $G_\varepsilon(x,s)$ durante o pulso — a equação diferencial

$$\mathbf{L}_xG_\varepsilon(x,s)=\delta_\varepsilon(x-s)$$

Integrando entre $s-\varepsilon$ e $s+\varepsilon$

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\left\{a_2(x)\frac{\partial^2 G_\varepsilon}{\partial x^2}(x,s)+a_1(x)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x}(x,s)+a_0(x)G_\varepsilon(x,s)\right\}dx=I_\varepsilon=$$

$$=\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\left\{\frac{d}{dx}\left(a_2(x)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x}(x,s)\right)+\left(a_1(x)-a_2'(x)\right)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x}(x,s)+a_0(x)G_\varepsilon(x,s)\right\}dx$$

Logo,

$$a_2(x)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x}(x,s)\Big|_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}+\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\left\{(a_1(x)-a_2'(x)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial x}(x,s)+a_0(x)G_\varepsilon(x,s)\right\}dx=I_\varepsilon \tag{6}$$

Observe agora que uma solução da equação homogênea é caracterizada pelas condições iniciais do valor da função e da sua derivada no ponto inicial. Do ponto de vista físico é razoável que, no limite, a solução à esquerda do pulso (e a equação diferencial) determine a solução à direita. Para que seja caracterizada a solução do outro lado do pulso, uma vez conhecido um dos lados, é necessário que o valor de $G(x,s)$ e de sua derivada sejam "transmitidos" através da região do pulso. Estas condições são semelhantes às condições de choque que estudamos na Secção 3.4.8. Naquele caso, entretanto, a análise do problema era facilitada pela expressão de solução geral por meio de uma fórmula, o que não acontece aqui. Com base na Equação (6) e nos argumentos acima iremos supor então que $G(x,s)$ seja contínua em x para $x=s$ e que sua derivada $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,s)$ tenha um salto finito.

Portanto, o primeiro termo da Equação (6) quando $\varepsilon\to 0$ fica sendo $a_2(s)\left[\dfrac{\partial G}{\partial x}\right]_{s-}^{s+}$ (onde, $[h]_{s-}^{s+}$ é o salto de $h(x)$ em s, da esquerda para a direita.)

O segundo termo sob a integral (supondo $a_2'(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ contínuas) vai para zero quando $\varepsilon\downarrow 0$ e $I_\varepsilon\to 1$.

Portanto, temos $\left[\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right]_{s-}^{s+}=\dfrac{1}{a_2(s)}$ e a função $G(x,s)$ à direita deve ser a solução de

$$\begin{cases}\mathbf{L}_x G^+=0\\ G^+(s,s)=G^-(s,s)\\ \dfrac{\partial G^+}{\partial x}(s,s)=\dfrac{\partial G^-}{\partial x}(s,s)+\dfrac{1}{a_2(s)}\end{cases}$$

onde $G^-(x,s)=G(x,s)$ para $x<s$ e $G^+(x,s)=G(x,s)$ para $x>s$.

As condições de conexão ficam então completamente determinadas por:

$$\begin{cases}G^+(s,s)=G^-(s,s)\\ \dfrac{\partial G^+}{\partial x}(s,s)=\dfrac{\partial G^-}{\partial x}(s,s)+\dfrac{1}{a_2(s)}\end{cases} \tag{7}$$

Estas equações e o fato de que

$$\begin{cases} \mathbf{L}_x G^-(x,s) = 0 & \text{se} \quad x < s \\ \mathbf{L}_x G^+(x,s) = 0 & \text{se} \quad x > s \end{cases}$$

formam uma equação diferencial para $G(x,s)$ que pode então ser escrita como uma combinação linear de $u_1(x)$ e $u_2(x)$ à esquerda de s e outra à direita de s, ligadas pela condição de transição. Calculemos, então, uma expressão para

$$G(x,s) = \begin{cases} G^-(x,s), & x < s \\ G^+(x,s), & x > s \end{cases}$$

a partir das soluções homogêneas u_1 e u_2.
Como

$$G^-(x,s) = a(s)u_1(x) + b(s)\,u_2(x)$$

e

$$G^+(x,s) = A(s)u_1(x) + B(s)\,u_2(x)$$

obteremos conexões entre $(a(s), b(s))$ e $(A(s), B(s))$ impondo as condições de conexão

$$a(s)\,u_1(s) + b(s)\,u_2(s) = A(s)\,u_1(s) + B(s)\,u_2(s)$$

$$\frac{1}{a_2(s)} + a(s)\,u_1'(s) + b(s)\,u_2'(s) = A(s)\,u_1(s) + B(s)\,u_2'(s)$$

ou, matricialmente, se

$$V(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{pmatrix}$$

vem

$$V(s)\begin{pmatrix} A-a \\ B-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a_2(s)} \end{pmatrix}$$

e invertendo $V(s)$

$$\begin{pmatrix} A-a \\ B-b \end{pmatrix} = V^{-1}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a_2(s)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det V(s)}\begin{pmatrix} u_2' & -u_2 \\ -u_1' & u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a_2(s)} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - a = \dfrac{-u_2(s)}{\det V(s)}\,\dfrac{1}{a_2(s)} \\ B - b = \dfrac{u_1(s)}{\det V(s)}\,\dfrac{1}{a_2(s)} \end{cases} \tag{8}$$

Estas são as fórmulas de conexão entre os coeficientes na representação de G^+ e G^- na base $\{u_1, u_2\}$.

Observe que a determinação específica de uma função de Green dependerá das condições iniciais (por exemplo, se o problema for de Cauchy).

Antes de provar que $\int_a^b G(x, s) f(s)\, ds$ é realmente uma solução de $\mathbf{L}u = f$, estudemos então o Exemplo 9

EXEMPLO 9

Suponha que o nosso problema seja um problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f \\ u(x_0) = v_1 \\ u'(x_0) = v_2 \end{cases}$$

a ser estudado para $x > x_0$.

Solução: Como as condições iniciais podem ser satisfeitas por soluções da equação homogênea, estudaremos apenas o caso $v_1 = 0 = v_2$.

Tomando $s > x_0$ e estudando

$$\begin{cases} \mathbf{L}G_\varepsilon(x, s) = \delta_\varepsilon(x - s) \\ G_\varepsilon(x_0, s) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} G_\varepsilon(x_0, s) = 0 \end{cases}$$

verificamos que

$$G^-(x, s) \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 0 \qquad \text{e} \qquad b \equiv 0$$

e portanto

$$G^+(x, s) = A(s)u_1(x) + B(s)u_2(x)$$

satisfaz $\mathbf{L}_x G^+ = 0$ e as condições de conexão nos darão

$$A(s) = \frac{-u_2(s)}{\det v(s)} \cdot \frac{1}{a_2(s)} \qquad \text{e} \qquad B(s) = \frac{u_1(s)}{\det v(s)} \cdot \frac{1}{a_2(s)}$$

e portanto

$$G^+(x, s) = \frac{1}{a_2(s)} \quad \frac{-u_2(s)u_1(x) + u_1(s)u_2(x)}{\det v(s)}$$

ou seja

$$\boxed{G(x, s) = \frac{-u_2(s)u_1(x) + u_1(s)u_2(x)}{a_2(s) \det v(s)} H(x - s)}$$

Esta é a função de Green para o problema de valor inicial cuja solução pode, então, ser escrita como

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} G(x, s) f(s) ds = \int_{x_0}^{x} \frac{-u_2(s)u_1(x) + u_1(s)u_2(x)}{a_2(s) \det v(s)} f(s) ds$$

onde

$$v(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{bmatrix}$$

ou

$$u(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{a_2(s)}\,\frac{-u_2(s)u_1(x)+u_1(s)u_2(x)}{u_1(s)u_2'(s)-u_2(s)u_1'(s)}f(s)\,ds$$

A função

$$G(x,s)=\frac{1}{a_2(s)}\,\frac{u_1(s)u_2(x)-u_2(s)u_1(x)}{u_1(s)u_2'(s)-u_2(s)u_1'(s)}H(x-s)$$

é a função de Green para o problema de valor inicial homogêneo ($Iu=0$).

$$\text{Se}\quad \mathbf{L}=D^2+K^2\quad\text{então}\quad u_1(x)=e^{ikx},\quad u_2(x)=e^{-ikx}$$

e

$$G(x,s)=\frac{1}{ik}\left(\frac{e^{iks}e^{-ikx}-e^{-iks}e^{ikx}}{-e^{iks}e^{-iks}-e^{-iks}e^{iks}}\right)H(x-s)=\frac{e^{ik(x-s)}-e^{-ik(x-s)}}{2ik}H(x-s)$$

isto é

$$\boxed{G(x,s)=H(x-s)\,\frac{\operatorname{sen}k(x-s)}{k}}$$

Para finalizar calcule

$$\left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{s-}^{s+}$$

Mostre como obter a função de Green para condições iniciais não homogêneas uma vez resolvida a questão acima. ■

Voltando ao caso geral, verifiquemos agora que $\int_{x_0}^{x}G(x,s)f(s)ds$ é realmente uma solução de $\mathbf{L}u=f$.

Para isto calculemos (observe que $G(x,s)$ é diferenciável na região integrada $s<x$ e estamos usando $G^+(x,s)$):

$$a.\ \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}G(x,s)f(s)ds=G^+(x,s)f(s)\,|_{s=x}+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial G^+}{\partial x}(x,s)f(s)ds=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial G^+}{\partial x}(x,s)f(s)ds$$

$$b.\ \frac{d^2}{dx^2}\int_{x_0}^{x}G(x,s)f(s)ds=\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial G^+}{\partial x}(x,s)f(s)ds=\frac{\partial G^+}{\partial x}(x,s)f(s)\,|_{s\uparrow x}+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 G^+}{\partial x^2}(x,s)f(s)ds=\frac{\partial G^+}{\partial x}(x,s)f(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 G^+}{\partial x^2}(x,s)f(s)ds=$$

$$=\frac{1}{a_2(x)}f(x)+\int_{0}^{x}\frac{\partial^2 G^+}{\partial x^2}(x,s)f(s)ds$$

Daí podemos calcular

$$\mathbf{L}\int_{x_0}^{x} G(x,s)f(s)ds = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}\int_{x_0}^{x} G^+(x,s)f(s)ds + a_1(x)\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} G^+(x,s)f(s)ds +$$

$$+ a_0(x)\int_{x_0}^{x} G^+(x,s)f(s)ds = a_2(x)\left[\frac{1}{a_2(x)}f(x) + \int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}G^+(x,s)f(s)ds\right] +$$

$$+\int_{x_0}^{x} a_1(x)\frac{\partial G^+}{\partial x}(x,s)f(s)ds + \int_{x_0}^{x} a_0(x)G^+(x,s)f(s)ds = f(x) +$$

$$+\int_{x_0}^{x} \mathbf{L}_x G^+(x,s)f(s)ds = f(x)$$

Fica, portanto, provada a existência de uma função de Green e demonstrada a sua construção efetiva a partir das soluções homogêneas.

Suponhamos que $G(x,s)$ seja função de Green para $\mathbf{L}$, isto é,

$$\begin{cases} \mathbf{L}G^{\pm} = 0 \quad \text{e} \\ \dfrac{\partial G^+}{\partial x}(s,s) = \dfrac{\partial G^-}{\partial x}(s,s) + \dfrac{1}{a_2(s)} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} G^+(x,s) = G(x,s)H(x-s) \\ G^-(x,s) = G(x,s)H(s-x) \end{bmatrix} \\ G^+(s,s) = G^-(s,s) \end{cases}$$

Se $h(x)$ é solução da homogênea, então, $G(x,s) = G(x,s) + h(x)$ também é uma função de Green, isto é

$$\mathbf{L}_x\int_a^b G(x,s)f(s)ds = f(x)$$

Reuniremos os resultados acima no seguinte teorema:

Teorema de Green Seja

$$\mathbf{L}_x = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

um operador diferencial com coeficientes contínuos e $a_2(x) \neq 0$ em (a,b). Então, dada uma função f contínua em $[a,b]$, toda solução de $\mathbf{L}u = f$ pode ser escrita na forma

$$u(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

onde $G(x,s)$ é uma função contínua em x e s (denominada função de Green) que satisfaz às condições:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_x G = 0, \qquad x \neq s \\ \lim\limits_{x \downarrow s} G(x,s) = \lim\limits_{x \uparrow s} G(x,s) \\ \lim\limits_{x \downarrow s} \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,s) = \lim\limits_{x \uparrow s} \dfrac{\partial G}{\partial s}(x,s) + \dfrac{1}{a_2(s)} \end{cases}$$

Além disso, G_1 e G_2 são duas funções de Green se, e somente se

$$G_1(x, s) = G_2(x, s) + h(x)$$

onde $h \in N(\mathbf{L})$.

Como já foi visto, o atributo principal de uma função de Green é descrever o processo de transição que ocorre na solução da equação devido à influência de um pulso localizado.

Embora a função de Green não seja única e dependa das condições auxiliares, o processo de transição e as condições de conexão são inteiramente determinados pelo operador **L**.

Observe que para

$$\mathbf{L}_1 = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{L}_2 = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + b_1 \frac{d}{dx} + b_0$$

as condições de conexão são idênticas, mas não (em geral) as funções de Green, que dependem de $N(\mathbf{L}_1)$ e $N(\mathbf{L}_2)$.

Considere agora a construção de uma função de Green para um problema do tipo

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f \\ Au = 0 \end{cases}$$

onde Au representa condições auxiliares, lineares em geral.

O procedimento natural é o seguinte:

1. Seja $G_0(x, s)$ uma função de Green qualquer para **L**, definida em $[a, b]$.

2. Obtenha h, uma solução da equação homogênea satisfazendo as condições $Ah = -AG_0$ que dependem de s. Logo, $h(x, s)$ depende de s.

Então, $G(x, s) = G_0(x, s) + h(x, s)$ é função de Green para o problema

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f \\ Au = 0 \end{cases}$$

Verificação:

Seja

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds = \int_a^b (G_0(x, s) f(s) + h(x, s) f(s)) ds$$

Vem que

$$\mathbf{L}u = f(x) + \mathbf{L} \int_0^b h(x, s) f(s) ds = f(x)$$

e

$$Au(x) = \int_a^b (AG_0 + Ah) f(s) ds = 0, \quad \text{pois} \quad AG_0 + Ah = 0$$

Observação:

Ao contrário do problema de Cauchy, o problema de valores laterais

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f \\ Bu = \alpha \end{cases} \tag{9}$$

nem sempre tem solução. O estudo deste problema é de importância fundamental na Física Matemática. Observe que podemos reduzi-lo ao caso homogêneo

$$\begin{cases} \mathbf{L}v = f \\ Bv = 0 \end{cases}$$

pelo princípio de superposição, pois, em geral, não é difícil encontrar uma função qualquer g, duas vezes continuamente diferenciável, que satisfaça apenas as condições laterais. (B é um operador simples, comparado com $\mathbf{L}$). Encontrada g, calcule $\mathbf{L}g = F$ e agora procure a solução de

$$\begin{cases} \mathbf{L}v = f - F = f \\ Bv = 0 \end{cases} \tag{10}$$

É claro que $v + g = u$ é solução de (9) se, e somente se, v for solução de (10).

Portanto, o estudo de problemas laterais se resume ao caso homogêneo nas condições auxiliares, $Bu = 0$. Observe agora que estamos procurando soluções de $\mathbf{L}u = f$ no espaço de funções

$$V = \{\varphi \in C^2[(a, b), \mathbb{C}] \,;\, B\varphi = 0\}$$

ou seja, no núcleo de B em $C^2[(a, b), \mathbb{C}]$. Do ponto de vista da análise linear estamos estudando o operador linear $\mathbf{L}$ no espaço vetorial V. Como acontece sempre em análise linear, a primeira questão a ser estudada é a existência e caracterização dos autovalores e autovetores, isto é, os vetores sobre os quais a ação de $\mathbf{L}$ é a mais simples possível: multiplicação por um escalar, $\mathbf{L}v = \lambda v$. Observe que λ é associado a v. O estudo desta questão é chamado teoria de Sturm-Liouville e se constitui em uma das mais importantes áreas da análise matemática e um dos pilares da Física-Matemática moderna.

Tendo obtido uma solução w de $\mathbf{L}w = f$, calculamos Bw e, pelo princípio de superposição, basta agora estudar

$$\begin{cases} \mathbf{L}h = 0 \\ Bh = Bw = \beta \end{cases}$$

Suponha que u_1 e u_2 formem uma base de $N(\mathbf{L})$. Então, a questão se resume em procurar dois números C_1 e C_2, tais que $h = C_1u_1 + C_2u_2$ seja solução de $Bh = \beta$, já que h tem necessariamente que ser combinação linear de u_1 e u_2. Sendo B linear devemos ter

$$B(C_1u_1 + C_2u_2) = C_1Bu_1 + C_2Bu_2 = \beta$$

Pela Álgebra Linear verificamos então que o problema geral (para qualquer β) tem solução se, e somente se Bu_1 e Bu_2 forem linearmente independentes!

EXEMPLO 10

Seja

$$\mathbf{L} = D^2 + K^2, \qquad Bu = (u(0),\ u(l))$$

Tomemos

$$u_1(x) = e^{ikx} \quad \text{e} \quad u_2(x) = e^{-ikx} \quad \text{em} \quad N(\mathbf{L})$$
$$Bu_1 = (1, e^{ikl})$$
$$Bu_2 = (1, e^{-ikl})$$

Para verificar se Bu_1 e Bu_2 são linearmente independentes, calculamos

$$\det\begin{bmatrix}1 & e^{-ikl}\\ 1 & e^{+ikl}\end{bmatrix} = e^{ikl} - e^{-ikl} = 2i \operatorname{sen} kl$$

e vem que $\operatorname{sen} kl = 0 \Leftrightarrow kl = n\pi$, ou seja, $l = \dfrac{n\pi}{k}$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Portanto, o problema geral

$$\begin{cases} u'' + k^2 u = f \\ u_{(0)} = \beta_1 \\ u_{(l)} = \beta_2 \end{cases}$$

tem solução se, e somente se, $l \neq \dfrac{n\pi}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ■

EXEMPO 11

Considere agora o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u \\ Bu = 0 = [u(0),\ u(l)] \quad \text{com} \quad \mathbf{L} = D^2 \end{cases}$$

que significa procurar os λ complexos para os quais existe solução não nula de

$$\begin{cases} (D^2 - \lambda)u = 0 \\ Bu = 0 \end{cases}$$

Sejam $u_1(x) = e^{-\sqrt{\lambda}x}$, $u_2(x) = e^{+\sqrt{\lambda}x}$ base de $N(\mathbf{L})$.

Se u é solução do problema, $u = c_1u_1 + c_2u_2$ e devemos ter $c_1Bu_1 + cBu_2$ com c_1 ou $c_2 \neq 0$. Portanto, é necessário que

$$\det\begin{bmatrix}u_1(0) & u_1(l)\\ u_2(0) & u_2(l)\end{bmatrix} = 0$$

isto é, Bu_1 e Bu_2 *devem* ser linearmente dependentes. Mas

$$\det\begin{bmatrix}1 & e^{-\sqrt{\lambda}l}\\ 1 & e^{+\sqrt{\lambda}l}\end{bmatrix} = e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \Leftrightarrow e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1$$

para $\lambda \neq 0$. Portanto, só há solução se $2\sqrt{\lambda}l = i\,n\,2\pi, n \in \mathbb{Z}$, ou seja

$$\sqrt{\lambda} = i\frac{n\pi}{l}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Isto significa que os únicos autovalores de D^2 em $\{B\varphi = 0\}$ são $-\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ com $n \in \mathbb{N}$. Obtenha as autofunções! ■

A importância da teoria de Sturm-Liouville está no fato de que para operadores de segunda ordem gerais, e até singulares, as suas autofunções no espaço de condições laterais homogêneas $\{B\varphi = 0\}$, para B também linear e bem geral, formam uma "base" para este espaço, ou seja, se $\{v_n\}$ forem autofunções, então poderemos "escrever" todas as funções de $\{B\varphi = 0\}$ por meio de uma expansão de Fourier generalizada:

$$\varphi = \sum_{k \geq 0} c_k u_k$$

No exemplo acima temos exatamente a expansão clássica em séries de Fourier.

Este fato corresponde, na Álgebra Linear, à possibilidade de diagonalização do operador linear $\mathbf{L}$, simplificando-o enormemente.

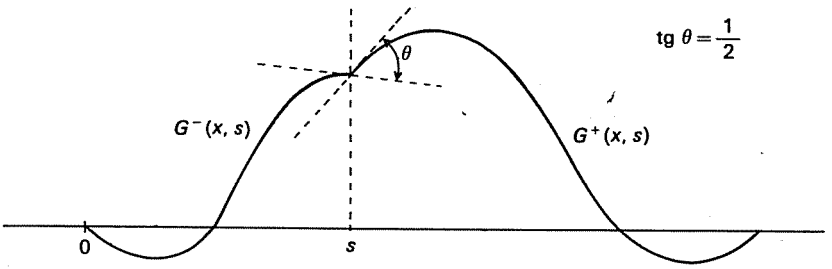
A teoria de Sturm-Louville, para ser desenvolvida, faz uso de resultados de análise matemática que estão ligeiramente acima dos assumidos para a leitura deste texto. Alertamos, todavia, o leitor interessado em operações diferenciais e suas aplicações físicas, que o estudo desta teoria é indispensável e se constitui na seqüência natural ao material aqui apresentado, existindo sobre o assunto excelentes referências*.

EXERCÍCIOS

1. Estude a função de Green para o operador $\mathbf{L} = D^2 + k^2$ no espaço

$$\{\varphi \in C^2;\ B\varphi = (\varphi(0),\ \varphi(\pi)) = 0\} = N(B)$$

Observe que a conexão de $G^-(x, s)$ com $G^+(x, s)$ em $x = s$ se faz conforme a figura abaixo.



$$\frac{\partial G^+}{\partial x}(s, s) = \frac{\partial G^-}{\partial x}(s, s) + \frac{1}{a_2(s)}$$

a. Para quais valores de k não existe a função $G(x, s, k)$? Apresente um argumento de Álgebra Linear para este fato.

b. Interprete o operador $f \to \int_0^\pi G(x, s) f(s) ds$ como o inverso de

$$\mathbf{L}: u \to \mathbf{L}u = f, \text{ em } N(B)$$

2. Obtenha e analise a função de Green para:

a. $\mathbf{L} = D^2 + 1$ em $\{\varphi : B\varphi = [\varphi(0),\ \varphi'(l)] = 0\}$

b. $\mathbf{L} = D^2 - 1$ em $\{\varphi : B\varphi = [\varphi(0),\ \varphi'(l)] = 0\}$

c. $\mathbf{L} = D^2$ em $\{\varphi : B\varphi = [\varphi(0),\ \varphi(l)] = 0\}$

O problema $\begin{cases} \mathbf{L}u = f \\ Bu = 0 \end{cases}$ é modelo para a pequena deflexão de uma corda flexível com carga distribuída $f(x)$ e presa nas extremidades. Interprete a função de Green e faça o gráfico.

d. $\mathbf{L} = D^4$ em $\{\varphi : B\varphi = (\varphi(0), \varphi''(0), \varphi(1), \varphi''(1)) = 0\}$

Estude este caso fazendo um tratamento análogo ao realizado para equações de segunda ordem.

O problema $\begin{cases} u^{(4)} = f \\ Bu = 0 \end{cases}$ é um modelo para a (pequena) deflexão de uma barra elástica horizontal suportada nas extremidades e $f(x)$ é a distribuição de carga.

Interprete a função de Green e faça um gráfico.

---

* COURANT, R. & Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York, Wiley, 1953, 1v.
STAKGOLD, I. *Green's Function and Boundary Value Problems*. New York, Wiley, 1979.

3. (Distribuição de Temperatura em Barra). Considere o modelo de distribuição estacionária de temperatura em uma barra cuja condutividade é função do ponto $K(x)$ e cuja fonte de produção de calor tem densidade $f(x)$. Então, o modelo matemático pode ser

$$-\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}T\right]=f, \quad x\in[0,l], \text{ sendo } l \text{ o comprimento da barra com}$$

$$\begin{cases}T(0)=0\\T'(l)=0\end{cases}$$

para extremidade esquerda à temperatura constante e extremidade direita isolada

$$\left[k(l)\frac{dT}{dx}(l)=\text{fluxo de calor em } x=l\right]$$

ou

$$\begin{cases}T(0)=0\\T(l)=0\end{cases}$$

se em ambas as extremidades a temperatura é constante, ou

$$\begin{cases}T'(0)=0\\T'(l)=0\end{cases}$$

se ambas as extremidades estão isoladas termicamente.

Observe que a função de Green $G(x,s)$ nos dá a distribuição de temperatura na barra como resultado de uma fonte concentrada unitária em $x=s$, ou seja, uma fonte de calor pontual unitária. Obtenha esta função de Green.

4. Considere o problema de Cauchy para o oscilador harmônico conservativo

$$\begin{cases}\mathbf{L}u=f\\Bu=0\end{cases} \text{ com } \begin{cases}\mathbf{L}=mD^2+k\\Bu=(u(0),\ u'(0))=0\end{cases}$$

Suponha agora que uma força muito grande atue sobre a partícula do oscilador harmônico em um intervalo de tempo muito curto em torno do instante $t=s$, fornecendo um impulso unitário ao sistema.

Modele a situação por meio da função de Green para o problema de valor inicial e argumente fisicamente sobre o termo propagador para $G(t,s)$ e sobre o fato de que $G(t,s)=0$ se $t\leqslant s$, e sobre o termo "causal" para designar o seu efeito.

5. Suponha agora que temos um tubo infinito $(-\infty,\infty)$ onde há uma substância em difusão, com absorção $k^2>0$ e densidade de fonte $f(x)$. Então, o processo estacionário pode ser modelado por

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+k^2u=f(x), \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

Suponha agora as condições laterais (singulares)

$$u(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}u(x)=0=\lim_{x\to+\infty}u(x)=u(\infty)$$

que significam absorção completa da substância a grandes distâncias. Modele a situação em que uma unidade de substância seja colocada pontualmente em $x=s$, por meio da função de Green. Resolva o problema.

Este mesmo problema poderia ser um modelo para situações envolvendo a propagação de ordem monocromática em um meio unidimensional. Argumente sobre isto.

6. O problema de vibração longitudinal de uma barra em uma freqüência ω tem a distribuição de amplitude $v(x)$ satisfazendo a equação

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dv}{dx}\right)+\omega^2k(x)v=0$$

Supondo a barra uniforme (isto é, $k(x)$, $\rho(x)$ e $A(x)$ constantes) de comprimento $[0, l]$, mostre que, fixadas as condições laterais (engastada ou livre), esta barra só poderá vibrar em determinadas freqüências. Obtenha a freqüência em que esta vibração se dá com maior amplitude (freqüência fundamental).

3.7 TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.7.1 Definição e Propriedades da Transformada de Laplace

Seja $f(t)$ uma função real definida para todo $t \geqslant 0$. A transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathscr{L}(f)$, é dada pela fórmula

$$\mathscr{L}(f) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \tag{1}$$

A função original $f(t)$ é chamada transformada inversa ou inversa de $F(s)$ e será denotada por $\mathscr{L}^{-1}(F)$. Assim

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = f(t).$$

Observamos que a integral imprópria da definição de $\mathscr{L}(f)$ é calculada tomando-se

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{a \to +\infty} \int_0^{a} e^{-st} f(t)\,dt$$

Portanto, $\mathscr{L}(f)$ só pode ser calculada se existir a integral do segundo membro acima para cada valor finito de a, e se o limite existir quando $a \to +\infty$.

O seguinte resultado fornece uma condição suficiente para a existência da transformada de Laplace:

Teorema de Existência A transformada de Laplace de $f(t)$ existe para todo $s > \alpha$, se

a. $f(t)$ tem no máximo um número finito de pontos de descontinuidade em qualquer intervalo $0 \leqslant t \leqslant a$, e ambos os limites laterais $f(t_0+)$ e $f(t_0-)$ de f existem em cada ponto de descontinuidade t_0. Neste caso, dizemos que $f(t)$ é contínua por partes.

b. Existem constantes α e M tais que

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \quad \text{para todo } t \geqslant 0$$

ou seja, $f(t)$ é de ordem exponencial.

Observações:

a. A propriedade de continuidade por partes assegura a existência das integrais finitas

$$\int_0^{a} e^{-st} f(t)\,dt$$

b. A propriedade da ordem exponencial assegura a convergência no infinito pois

$$|\mathscr{L}(f)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt \leqslant \int_0^\infty e^{-st} M e^{\alpha t} dt =$$

$$= M\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{M}{s-\alpha} \text{ para } s > \alpha$$

c. As condições sobre $f(t)$ impostas no Teorema de Existência são suficientes, mas não necessárias, senão vejamos:

Seja $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ $(t > 0)$. Tal função não pode ser estendida continuamente para $t = 0$ (pois $\lim\limits_{t \downarrow 0} f(t) = +\infty$, no entanto podemos calcular a integral imprópria:

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Por outro lado, considere $f(t) = 2\,t\,e^{t^2}\cos e^{t^2}$ $(t > 0)$, então

$$\int_0^\infty e^{-st}\,2t\,e^{t^2}\cos e^{t^2}dt = e^{-st}\operatorname{sen} e^{t^2}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} e^{t^2}dt = -\operatorname{sen} 1 + s\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} e^{t^2}dt$$

e como $|\operatorname{sen} e^{t^2}| \leqslant 1$, a última integral existe para todo $s > 0$. Observe, entretanto, que a função $f(t)$ não é de ordem exponencial (se bem que funções deste tipo dificilmente irão aparecer em problemas reais). Algumas funções elementares $f(t)$ e suas transformadas de Laplace $\mathscr{L}(f)$ serão apresentadas a seguir

EXEMPLO 1

Seja $f(t) = 1$, $t \geqslant 0$. Então

$$\mathscr{L}(f) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}dt = \lim_{a\to\infty}\frac{1-e^{-sa}}{s} = \begin{cases}\dfrac{1}{s} & \text{se } s > 0\\ -\infty & \text{se } s \leqslant 0\end{cases}$$

EXEMPLO 2

Seja $f(t) = e^{\alpha t}$, $t \geqslant 0$. Então

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(e^{\alpha t}) = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}e^{\alpha t}dt = \lim_{a\to\infty}\frac{e^{(\alpha-s)a}-1}{\alpha-s} = \begin{cases}\dfrac{1}{s-\alpha} & \text{se } s > \alpha\\ \infty & \text{se } s \leqslant \alpha\end{cases}$$

EXEMPLO 3

Seja $f(t) = \cos \omega t$, $t \geqslant 0$. Então

$$\mathscr{L}(f) = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}\cos \omega t\,dt$$

Tomando $\displaystyle\int_0^a e^{-st}\cos \omega t\,dt$ e integrando por partes, obtemos

$$F(s) = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-st}\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\Big|_0^a + \frac{s}{\omega}\int_0^a e^{-st}\operatorname{sen}\omega t\,dt\right] = \frac{s}{\omega}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}\omega t\,dt \qquad \text{se } s > 0$$

Uma segunda integração por partes nos fornece

$$F(s)=\frac{s}{\omega}\left[\frac{1}{\omega}-\frac{s}{\omega}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\right]=\frac{s}{\omega^2}-\frac{s^2}{\omega^2}F(s)$$

Resolvendo para $F(s)$ teremos

$$F(s)=\frac{\frac{s}{\omega^2}}{1+\frac{s^2}{\omega^2}}=\frac{s}{s^2+\omega^2}\qquad (s>0)$$

EXEMPLO 4

Se $F(t)=\operatorname{sen}\omega t$, $t\geqslant 0$, então

$$\mathscr{L}(f)=F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad (s>0)\qquad \text{(Verifique!)}$$

A transformada de Laplace associa a cada função $f(t)$ uma nova função $F(s)$, como um operador atuando sobre funções. Uma das propriedades mais importantes deste operador é dada no seguinte teorema:

Teorema da Linearidade A transformada de Laplace é um operador linear, isto é

$$\mathscr{L}(kf+\lambda g)=k\mathscr{L}(f)+\lambda\mathscr{L}(g)$$

para todo par de funções $f(t)$ e $g(t)$ cujas transformadas de Laplace existam, com k e λ sendo constantes arbitrárias. (Demonstre.)

Este resultado pode simplificar os cálculos na obtenção de transformadas de Laplace de algumas funções. Temos, do Exemplo 2, que

$$\mathscr{L}\{e^{i\omega t}\}=\frac{1}{s-i\omega}=\frac{s+\omega i}{(s-\omega i)(s+\omega i)}=\frac{s+\omega i}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad (2)$$

Por outro lado, $e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\operatorname{sen}\omega t$; portanto

$$\mathscr{L}\,(e^{i\omega t})=\mathscr{L}\,(\cos\omega t)+i\mathscr{L}\,(\operatorname{sen}\omega t)\qquad (3)$$

(da linearidade de $\mathscr{L}$).

Logo, igualando as partes reais e imaginárias das Equações (2) e (3) obtemos

$$\mathscr{L}\,(\cos\omega t)=\frac{s}{s^2+\omega^2}\qquad \text{e}\qquad \mathscr{L}\,(\operatorname{sen}\omega t)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Outras transformadas podem ser obtidas usando-se a seguinte propriedade:

Teorema do Deslocamento Se $\mathscr{L}(f)=F(s)$ para $s>k$, então

$$\mathscr{L}\,(e^{\alpha t}f(t))=F(s-\alpha)\qquad \text{para}\qquad s>k+\alpha$$

Demonstração: Como $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\mathscr{L}(f(t))$, então

$$F(s-\alpha)=\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}[e^{\alpha t}f(t)]dt=\mathscr{L}(e^{\alpha t}f(t))$$

EXEMPLO 5

Seja $f(t)=e^{\alpha t}\cos \omega t$. Então

$$\mathscr{L}(f)=\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

A sua verificação é imediata, usando-se o Exemplo 3 e o Teorema do Deslocamento. ■

EXEMPLO 6

$$\mathscr{L}(e^{\alpha t}\operatorname{sen}\omega t)=\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}\qquad\text{(Verifique!)}$$ ■

Teorema da Derivação Seja $F(s)=\mathscr{L}(f)$, então

a. $\mathscr{L}(f')=s\mathscr{L}(f)-f(0)=sF(s)-f(0)$
b. $\mathscr{L}(f'')=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

Observação:

Estamos supondo, evidentemente, que f seja uma função suficientemente bem comportada, de maneira que existam $\mathscr{L}(f')$ e $\mathscr{L}(f'')$ para $s>\alpha$.

Usando a definição da transformada de Laplace de f', temos

Demonstração:

a. $\mathscr{L}(f')=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}f'(t)dt=\lim_{a\to\infty}e^{-st}f(t)\Big|_0^a+\lim_{a\to\infty}s\int_0^a e^{-st}f(t)dt=$
$=-f(0)+s\mathscr{L}(f)=sF(s)-f(0)$

b. Usando a equação da parte (*a*), temos

$$\mathscr{L}(f'')=s\mathscr{L}(f')-f'(0)=s[sF(s)-f(0)]-f'(0)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

De uma maneira geral, podemos enunciar o seguinte resultado. Se $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ forem contínuas e $f^{(n)}$ for contínua por partes em qualquer intervalo $0\leqslant t\leqslant a$ e se cada função $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ for de ordem exponencial (com constantes M e α), então existe $\mathscr{L}(f^{(n)})$ para $s>\alpha$, e é dada por

$$\mathscr{L}(f^{(n)})=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

EXEMPLO 7

Seja $f(t) = t^n$ (n inteiro positivo), então

$$\mathcal{L}(f) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0$$

Demonstração: Temos que

$$f'(t) = nt^{n-1}$$
$$f''(t) = n(n-1)t^{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n-1)}(t) = n(n-1)\ \ldots\ [n-(n-2)]\, t^{n-(n-1)} = n(n-1)\ \ldots\ 2t$$
$$f^{(n)}(t) = n!$$

Também

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

Portanto

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^n}\,\mathcal{L}(f^{(n)}) = \frac{1}{s^n}\,\mathcal{L}(n!) = \frac{n!}{s^n}\,\mathcal{L}(1) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

EXEMPLO 8

Seja $f(t) = t \operatorname{sen} \omega t$, então

$$\mathcal{L}(f) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Demonstração: Temos

$$f'(t) = \operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t$$

e

$$f''(t) = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \operatorname{sen} \omega t = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 f(t)$$

e portanto

$$\mathcal{L}(f'') = 2\omega\,\mathcal{L}(\cos \omega t) - \omega^2\,\mathcal{L}(f) = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2} - \omega^2\,\mathcal{L}(f) \qquad (s > 0)$$

Por outro lado, $\mathcal{L}(f'') = s^2\,\mathcal{L}(f)$ pois $f(0) = f'(0) = 0$.

Então

$$\frac{2\omega s}{s^2+\omega^2} - \omega^2\,\mathcal{L}(f) = s^2\,\mathcal{L}(f)$$

donde

$$\mathcal{L}(f) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

3.7.2 Solução de Problemas de Cauchy Usando Transformada de Laplace

Agora já temos condições para resolver um problema de valor inicial

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=g(t),\ y(0)=y_0 \text{ e } y'(0)=y'_0$$

reduzindo-o, por meio da transformada de Laplace, à resolução de uma equação algébrica.

EXEMPLO 9

Consideremos o problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=x^2 \text{ com } y(0)=1 \text{ e } y'(0)=3$$

Solução: Tomando as transformadas de Laplace de ambos os membros da equação diferencial, temos

$$\mathcal{L}(y''-y'-2y)=\mathcal{L}(x^2)$$

Como

$$\mathcal{L}(y'')=s^2\mathcal{L}(y)-s\,y(0)-y'(0)=s^2\mathcal{L}(y)-s-3$$

e

$$\mathcal{L}(y')=s\mathcal{L}(y)-y(0)=s\mathcal{L}(y)-1$$

usando a linearidade do operador transformada de Laplace, obtemos

$$(s^2\mathcal{L}(y)-s-3)-(s\mathcal{L}(y)-1)-2\mathcal{L}(y)=\frac{2}{s^3}$$

ou

$$\mathcal{L}(y)=\frac{s^4+2s^3+2}{s^3(s^2-s-2)}=Y(s)$$

Desta forma, obtivemos uma expressão para a transformada de Laplace $Y(s)$ da solução $y=\varphi(x)$ do problema de valor inicial dado. Para determinar a função φ, devemos encontrar a função cuja transformada de Laplace seja $Y(s)$, isto é, $\varphi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Observamos que existe uma fórmula geral para a transformada inversa de Laplace, mas sua utilização pressupõe um conhecimento da teoria de funções complexas*. Assim, ao invés de usar qualquer fórmula geral, procuraremos a inversa somente usando propriedades do operador transformada de Laplace.

Escrevendo $Y(s)$ em frações parciais, temos

$$Y(s)=\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{D}{s-2}+\frac{E}{s+1}=\frac{s^4+2s^3+2}{s^3(s-2)(s+1)}$$

Isto implica que

$$s^4(C+D+E)+s^3(B-C+D-2E)+s^2(A-B-2C)+s(-A-2B)-2A=s^4+2s^3+2$$

Donde,

$$\begin{aligned}
&C+D+E=1\\
&B-C+D-2E=2\\
&A-B-2C=0\\
&-A-2B=0\\
&-2A=2
\end{aligned}$$

* Para maiores detalhes veja BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1978 e BELMANN, R.E. & Roth, R.S. *The Laplace Transform*. Singapore, World Scient. Publ., 1984.

Das três últimas equações, tiramos

$$A=-1, \qquad B=\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad C=-\frac{3}{4}$$

cujos valores substituídos nas duas primeiras, nos dão

$$\begin{cases} D-2E=\dfrac{3}{4} \\ D+E=\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Logo

$$E=\frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad D=\frac{17}{12}$$

Assim

$$Y(s)=\frac{-1}{s^3}+\frac{1/2}{s^2}+\frac{-3/4}{s}+\frac{17/12}{s-2}+\frac{1/3}{s+1}$$

e portanto

$$Y(s)=\mathscr{L}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}+\frac{17}{12}e^{2x}+\frac{1}{3}e^{-x}\right)$$

de modo que

$$y=\varphi(x)=\frac{17}{12}e^{2x}+\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

é a função contínua que satisfaz o problema de valor inicial. Pelo Teorema de Unicidade (ver Secção 3.3.2) existe apenas esta solução contínua.

A vantagem do método das transformadas de Laplace está no fato de que tanto problemas homogêneos como não homogêneos são resolvidos da mesma forma e obtemos diretamente a solução particular. A dificuldade para o cálculo da transformada inversa $Y=\mathscr{L}^{-1}\{\lambda(s)\}$ pode ser amenizada com um quadro das transformadas de Laplace de funções elementares. ■

Teorema Se $\mathscr{L}(f(t))=F(s)$ então $L\,(t\,f(t))=-\dfrac{d}{ds}F(s)$.

Demonstração: Temos que

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt.$$

Diferenciando ambos os membros desta expressão em relação a s, obtemos

$$\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st})f(t)dt=$$

$$=\int_0^\infty -t\,e^{-st}f(t)dt=-\int_0^\infty e^{-st}\,t\,f(t)dt=-\mathscr{L}\,(t\,f(t))$$

Quadro 3.1 Transformadas de Laplace das funções elementares

$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathscr{L}(f(t))$	
1	$\frac{1}{s}$	$(s>0)$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$(s>\alpha)$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$(s>0)$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$(s>0)$
$e^{\alpha t} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$(s>\alpha)$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$(s>\alpha)$
t^n (n inteiro positivo)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(s>0)$
t^r $(r>-1)$	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$	$(s>0)$
$t^n e^{\alpha t}$ (n inteiro positivo)	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$(s>\alpha)$
$\operatorname{sen} h\, \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	$(s>\lvert\alpha\rvert)$
$\cos h\, \alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$(s>\lvert\alpha\rvert)$
$t \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$(s>0)$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s-\alpha)$	
$f(kt)$	$\frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right)$	$(k>0)$

EXERCÍCIOS

1. Demonstre a veracidade do quadro acima.
   Nos problemas seguintes, use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado:
2. $y''-3y'+2y=e^{2t}$, $y(0)=0$ e $y'(0)=1$
3. $y''-2y'+y=1+e^{-t}$, $y(0)=1$ e $y'(0)=0$
4. $y''-y=\operatorname{sen} t$, $y(0)=1$ e $y'(0)=1$
5. $y^{(3)}-y=0$, $y(0)=2$ e $y'(0)=1$
6. Considerando que a transformada de Laplace de uma série de potências possa ser calculada termo a termo, mostre que

$$a.\ \mathscr{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\frac{1}{s^2+1}\qquad (s>1)$$

e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\operatorname{sen} t\qquad \text{(série de Taylor de } f(t)=\operatorname{sen} t)$$

$$b.\ \mathscr{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)=\frac{1}{s-1}\qquad (s>1)\Leftrightarrow e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$c.\ \mathscr{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\qquad (s>1)\Leftrightarrow \mathscr{L}(J_0(t))=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

7. Resolva o problema de valor inicial

$$y''-ty=0\qquad \text{(Equação de Airy)},\qquad y(0)=0\qquad \text{e}\qquad y'(0)=1$$

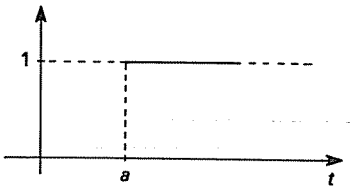
Observação: Não fique desapontado se não chegar a uma solução explícita*. (Ver Exemplo 4 da Secção 6.3.3.2.)

3.7.3 Transformada de Laplace de Funções Descontínuas

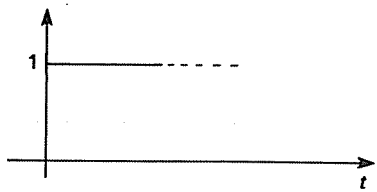
As aplicações mais interessantes do método das transformadas de Laplace ocorrem na solução de problemas de valor inicial que envolvem equações diferenciais lineares com funções forçadas descontínuas ou impulsivas.

Vamos inicialmente calcular a transformada de Laplace de algumas funções com descontinuidade de saltos. A função mais simples com uma única descontinuidade de salto, denominada função de Heaviside (ver Figura 3.30) é definida por

$$H_a(t)=\begin{cases}0 & \text{se } t<a\\ 1 & \text{se } t>a\end{cases}\qquad a\geqslant 0,\qquad H_a(t)=H(t-a)$$



(a) Função degrau unitário: $H_a(t)$



(b) Função degrau unitário: $H_0(t)=H(t)$

Figura 3.30 Funções de Heaviside (degrau unitário)

A transformada de Laplace de $H_a(t)$ é

$$\mathscr{L}(H_a(t))=\int_0^{\infty}e^{-st}H_a(t)dt=\int_a^{\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^{\infty}$$

* Se você insiste em saber mais sobre esta importante função consulte SIDOROV, Yv. V.; Fedoryuk, M.V.; Shabunin, M.I. *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscou, Mir, 1985 (secção 45.5).

Supondo que $s > 0$, vem

$$\mathcal{L}\,(H_a(t)) = \frac{e^{-as}}{s}, \qquad s > 0$$

A função $H(t)$, como já vimos, é importante para a construção de outras funções com descontinuidades de salto, periódicas, como as mostradas na Figura 3.31.

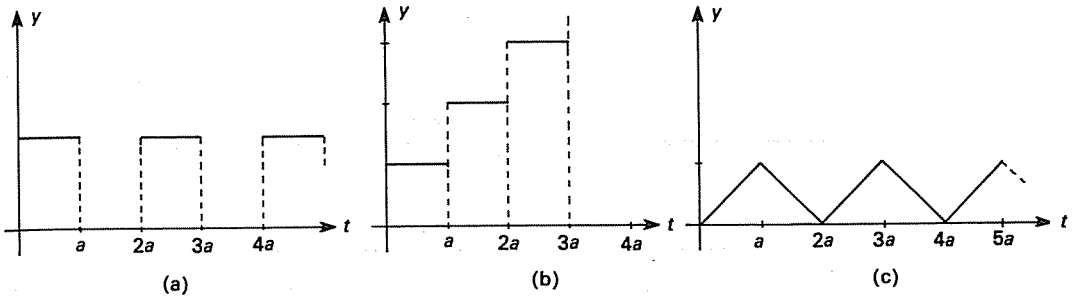


Figura 3.31

EXEMPLO 10

Este exemplo é ilustrado pela Figura 3.31*a*, onde $y = f(t)$ representa uma onda quadrada periódica e sua expressão, em termos das funções degraus unitários, é dada por

$$f(t) = k\,[H_0(t) - H_a(t) + H_{2a}(t) - H_{3a}(t) + \ldots]$$

Sua transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}(f) = k\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s} - \frac{e^{-3as}}{s} + \ldots\right] = \frac{k}{s}\,[1 - e^{-as}\,(1 - e^{-as} + e^{-2as} - \ldots)]$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nas}$, que se encontra entre colchetes acima, é uma série geométrica de razão $-e^{-as}$ e, portanto, sua soma será $\dfrac{1}{1+e^{-as}}$. Então

$$\mathcal{L}(f) = \frac{k}{s}\left[1 - \frac{e^{-as}}{1+e^{-as}}\right] = \frac{k}{s(1+e^{-as})}$$

■

EXEMPLO 11

Com base na Figura 3.31*b*

$$f(t) = H_0(t) + H_a(t) + H_{2a}(t) + H_{3a}(t) + \ldots$$

Usando a linearidade da transformada de Laplace, obtemos

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s} + \frac{e^{-3as}}{s} + \ldots = \frac{1}{s}\,[1 + e^{-as}\,(1 + e^{-as} + e^{-2as} + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{s}\left[1 + e^{-as}\,\frac{1}{1-e^{-as}}\right] = \frac{1}{s(1-e^{-as})}$$

■

EXEMPLO 12

A função $f(t)$, dada na Figura 3.31*c*, tem como derivada (quase em todo ponto) a função

$$g(t) = H_0(t) - 2H_a(t) + 2H_{2a}(t) - 2H_{3a}(t) + \ldots$$

e

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1 - e^{-as}}{s(1 + e^{-as})} \qquad \text{(Verifique!)}$$

Agora, temos que $f' = g$ e, portanto,

$$\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) = s\mathcal{L}(f)$$

Então

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(g) = \frac{1 - e^{-as}}{s^2(1 + e^{-as})} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{e^{-as/2}(e^{as/2} - e^{-as/2})}{e^{-as/2}(e^{as/2} + e^{-as/2})} = \frac{1}{s^2} \operatorname{tg} h \frac{as}{2}$$

EXEMPLO 13

Seja $f(t)$ uma função definida em $0 \leqslant t < \infty$, e seja $g(t)$ a função obtida de f movendo o seu gráfico (ver Figura 3.32) de a unidades para a direita, ou seja

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < a \\ f(t-a) & \text{se } t \geqslant a \end{cases}$$

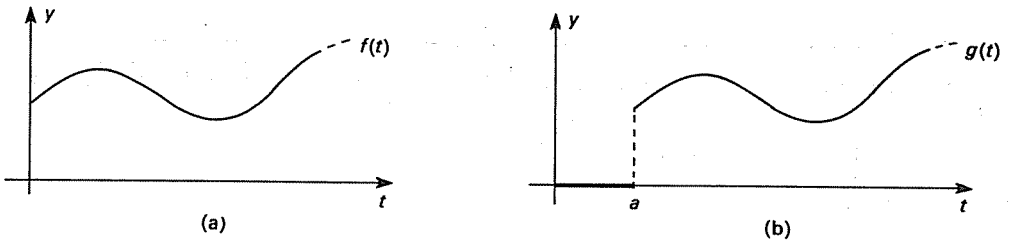


Figura 3.32

Neste caso podemos escrever

$$g(t) = H_a(t) f(t-a)$$

$$\mathcal{L}(g) = \int_0^\infty e^{-st} H_a(t) f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$

Tomando a mudança de variável $z = t - a$ na integral, vem

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-s(z+a)} f(z)dz = e^{-as} = \int_0^\infty e^{-sz} f(z)dz = e^{-as}\mathcal{L}(f)$$

EXEMPLO 14

Seja $y = y(t)$ o deslocamento de um sistema de controle automático de pressão (ver Figura 3.33), onde $y = 0$ corresponde à posição de equilíbrio devido a uma pressão constante. Supondo que o amortecimento do sistema seja proporcional à velocidade $\frac{dy}{dt}$ e que, no instante inicial $t = 0$, a pressão seja subitamente adicionada na forma de uma função degrau unitária, devemos calcular o valor do deslocamento y em cada instante t. Consideremos os dados:

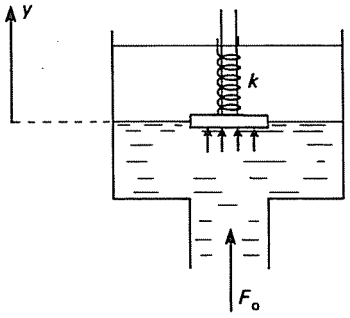


Figura 3.33

F_0: força devida à pressão no instante $t = 0$
m: massa das partes que se movem no sistema mecânico
c: constante de amortecimento
k: constante da mola

Solução: A equação diferencial que corresponde ao sistema de controle automático é dada por

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F_0 H_0(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação diferencial temos

$$m\,[s^2\,F(s) - s\,y(0) - y'(0)] + c\,[s\,F(s) - y(0)] + k\,F(s) = F_0\,\frac{1}{s}$$

Usando as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, vem

$$F(s)\,[ms^2 + cs + k] = \frac{F_0}{s} \qquad \text{ou} \qquad F(s) = \frac{F_0}{s(ms^2 + cs + k)}$$

Agora devemos considerar três casos distintos em relação às raízes de $ms^2 + cs + k = 0$

1. $c^2 > 4mk$ (raízes reais e distintas)
2. $c^2 = 4mk$ (raízes reais e iguais)
3. $c^2 < 4mk$ (raízes complexas conjugadas)

No caso **1**, usando frações parciais, podemos escrever

$$F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s - \dfrac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}} + \frac{A_3}{s - \dfrac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}}$$

Considerando, por simplicidade

$$\alpha = \frac{-c}{2m} \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt{\alpha^2 - \frac{k}{m}}$$

obtemos

$$A_1 = \frac{F_0}{k}m, \quad A_2 = \frac{F_0}{k}m\ \frac{(1-\omega)}{2\omega} \quad \text{e} \quad A_3 = -\frac{F_0}{k}m\left(\frac{1+\omega}{2\omega}\right)$$

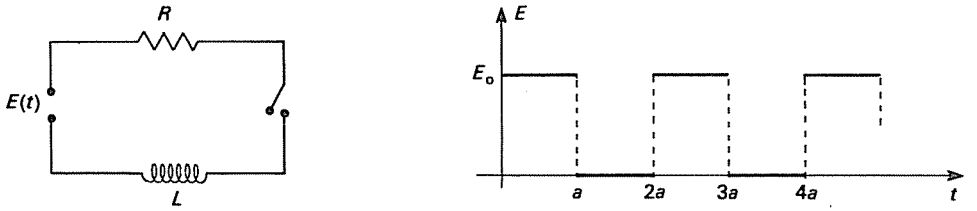
A transformada inversa de Laplace nos dá

$$y(t) = \frac{F_0}{k}m + \frac{mF_0}{k}\ \frac{(1-\omega)}{2\omega}\,e^{(\alpha+\omega)t} - \frac{mF_0}{k}\ \frac{(1+\omega)}{2\omega}\,e^{(\alpha-\omega)t} = \frac{F_0}{k}m\left[1 + e^{\alpha t}\left(\frac{1-\omega}{2\omega}e^{\omega t} - \frac{1+\omega}{2\omega}e^{-\omega}\right)\right]$$

Os outros casos são resolvidos analogamente. (Verifique!) ■

EXEMPLO 15

Encontre o valor da corrente $i(t)$ em um circuito RL (ver Figura 3.34*a*) em que $E(t)$ é dado por $E(t) = E_0[H_a(t) - H_a(t) + H_{2a}(t) - H_{3a}(t) + \ldots]$ (ver Figura 3.34*b*), com $I(0) = 0$



(a) (b)

Figura 3.34

Solução: Conforme já vimos anteriormente, a equação do circuito é

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t), \quad \text{com} \quad I(0) = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$L\,(s\,F(s) - I(0)) + R\,F(s) = E_0\,\mathscr{L}\,(H_0(t) - H_a(t) + \ldots)$$

Como $I(0) = 0$, vem

$$F(s) = \frac{E_0/L}{s + R/L}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s} - \frac{e^{-3as}}{s} + \ldots\right]$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{E_0/L}{s(s + R/L)}\right\} = \frac{E_0}{R}\,(1 - e^{-R/Lt})$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{E_0/L \cdot e^{-as}}{s(s + R/L)}\right] = \frac{E_0}{R}\,(1 - e^{-R/L(t-a)})\,u_a(t) \qquad \text{(ver Exemplo 4)}$$

Então

$$I(t) = \frac{E_0}{R}\,(1 - e^{-R/Lt}) \qquad \text{se} \qquad t < a$$

e

$$I(t) = \frac{E_0}{R}\,(1 - e^{-R/Lt}) - \frac{E_0}{R}\,(1 - e^{-R/L(t-a)}) = \frac{E_0}{R}\,e^{-R/Lt}\,[1 - e^{R/La}] \qquad \text{se} \qquad a < t < 2a \text{ etc.}$$

Em geral, somamos a progressão geométrica finita e obtemos

$$I(t) = \frac{E_0}{R}\left[\delta - \frac{e^{R/Lt}}{1 + e^{R/La}} - (-1)^n\,\frac{e^{-R/L[t-(n+1)a]}}{1 + e^{R/La}}\right]$$

onde

$$\delta = \begin{cases} 0 & (n \text{ ímpar}) \\ 1 & (n \text{ par}) \end{cases} \qquad na < t < (n+1)a$$

Obtenha as soluções destes exemplos com o método da Secção 3.4.8 e compare!* ■

---

* Para um desenvolvimento maior da teoria de transformadas de Laplace, suas aplicações e relações com o cálculo operacional, veja:

CHURCHILL, R.V. *Operational Calculus*, 3. ed. New York, McGraw-Hill, 1972.

MIKUSINSKY, J. *Operational Calculus*. Elmsford, Pergamon Press, 1957.

BELMANN, R.E. & Roth, R.S. *The Laplace Transform*, Singapore, World Scient. Publ., 1984.

3.7.4 Função Delta de Dirac e a Transformada de Laplace

Já tivemos a oportunidade de analisar as funções fortemente concentradas em um ponto, denominadas pulsos ou impulsos (ver Secções 3.4.7 e 3.6.5). Tais "funções" foram definidas por Dirac (1930) como sendo

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t\neq 0\\ \infty & \text{se} \quad t=0\end{cases}$$

satisfazendo a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

Obviamente, $\delta(t)$ não é uma função no sentido matemático usual; no entanto, podemos operar formalmente como se fosse uma função ordinária, para obtermos

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta(t)dt=f(0)$$

para toda função contínua $f(t)$.

Neste sentido, Dirac usou o seguinte raciocínio: como $\delta(t)$ é nula para todo $t\neq 0$, os limites de integração podem ser substituídos por $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$, onde ε é um número positivo pequeno. Além disso, como $f(t)$ é contínua em $t=0$, seus valores no intervalo $(-\varepsilon,\varepsilon)$ são aproximadamente iguais a $f(0)$, isto é

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\delta(t)dt=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(t)\,\delta(t)dt\cong f(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=f(0)$$

A aproximação será tanto melhor quanto menor for ε. Embora a utilização deste método sempre tivesse bons resultados nos problemas físicos, chegando-se a respostas corretas, foi muito ridicularizado pela maioria dos matemáticos da época, até que L. Schwartz (matemático francês), em 1940, generalizou o conceito de funções, ampliando a classe de modo a ser incluída a função delta de Dirac com a chamada *Teoria das Distribuições*.

Como a função $\delta(t)$ corresponde a um impulso unitário em $t=0$, um impulso num ponto arbitrário $t=t_0$ é dado por $\delta(t-t_0)$ com

$$\delta(t-t_0)=0 \qquad \text{para} \qquad t\neq t_0$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

A função delta não satisfaz as condições necessárias para a existência de sua transformada de Laplace; no entanto, esta pode ser formalmente definida por

$$\mathcal{L}\,(\delta(t-t_0))=\int_{0}^{\infty}e^{-st}\,\delta(t-t_0)dt$$

Tomando a mudança de variáveis $t - t_0 = z$ na integral, vem

$$\int_0^\infty e^{-s(z+t_0)}\delta(z)dz = e^{-st_0}\int_0^\infty e^{-sz}\delta(z)dz = e^{-st_0}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{-sz}\delta(z)dz = e^{-st_0}$$

para $t_0 \geqslant 0$, uma vez que

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} e^{-sz}\delta(z)dz = e^{-sz}\Big|_{z=0} = 1$$

EXEMPLO 16

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \delta(t - t_0) \qquad \text{com} \qquad y(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad y'(0) = 0$$

Solução: Tomando as transformadas de Laplace de ambos os membros da equação diferencial, obtemos

$$s^2F(s) - s\,y(0) - y'(0) + F(s) = e^{-st_0}$$

Usando as condições iniciais do problema e isolando $F(s)$, temos

$$F(s) = \frac{e^{-st_0}}{s^2 + 1}$$

Como

$$\mathcal{L}\,(H_{t_0}(t)\,f(t - t_0)) = e^{-st_0}\,\mathcal{L}(f) \qquad \text{(ver Exemplo 4)}$$

então

$$\mathcal{L}^{-1}\,\{e^{-st_0}\,F(s)\} = H_{t_0}(t)\,f(t - t_0)$$

Portanto

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-st_0}}{s^2 + 1}\right\} = H_{t_0}(t)\,\text{sen}\,(t - t_0)$$

é a solução do problema e pode ser escrita por

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < t_0 \\ \text{sen}\,(t - t_0) & \text{se} \quad t \geqslant t_0 \end{cases}$$

(ver Figura 3.35).

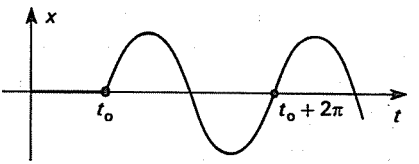


Figura 3.35

Pelos dados do problema, vemos que a solução é nula no intervalo $0 < t < t_0$, pois não há excitação externa até $t = t_0$ (ver Figura 3.35). O impulso em $t = t_0$ produz uma resposta que persiste periodicamente, uma vez que não existe amortecimento ($c = 0$). Observamos ainda que apesar da maneira "estranha" como atua a força impulsiva no instante $t = t_0$, a solução $x(t)$ é contínua neste ponto, embora sua derivada tenha uma descontinuidade de salto em $t = t_0$. ■

EXEMPLO 17

Consideremos o movimento de um oscilador harmônico amortecido sob a ação de uma força que representa um golpe instantâneo quando $t = t_0 > 0$. Suponhamos ainda que o sistema esteja em repouso no instante $t = 0$. Vamos calcular o deslocamento $x(t)$ em cada instante $t \geqslant t_0$.

Solução: A equação diferencial será

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = g(t) \qquad \text{com } x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

A forma da função $g(t)$ não é conhecida, mas sabemos que seu impulso é dado por

$$I=\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} g(t)dt \qquad (\varepsilon>0)$$

onde ε pode ser tomado arbitrariamente pequeno. Tal força pode ser aproximada por

$$g(t)\cong I\delta(t-t_0)$$

Então, a equação diferencial pode ser escrita por

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{I}{m}\delta(t-t_0), \qquad \text{onde} \qquad \alpha=\frac{c}{2m} \qquad \text{e} \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Aplicando as transformadas de Laplace em ambos os membros da equação e usando os valores iniciais, obtemos

$$s^2F(s)+2\alpha s\,F(s)+\omega_0^2F(s)=\frac{I}{m}e^{-st_0}$$

Isolando $F(s)$

$$F(s)=\frac{I}{m}\;\frac{e^{-st_0}}{s^2+2\alpha s+\omega_0^2}$$

Vamos supor que $c^2<4km$, isto é, $\omega_0^2>\alpha^2$ e, portanto, existe ω tal que $\omega^2=\omega_0^2-\alpha^2$. $F(s)$ pode ser escrito por

$$F(s)=\frac{I}{m}\;\frac{e^{-st_0}}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2-\alpha^2}=\frac{I}{m}\;\frac{e^{-st_0}}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

Agora, como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\}=\operatorname{sen}\omega t$$

então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega}\;\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\right\}=\frac{1}{\omega}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega t \quad \text{(ver Exemplo 6)}$$

Portanto

$$x(t)=\frac{I}{\omega m}H_{t_0}(t)\,e^{-\alpha(t-t_0)}\operatorname{sen}\omega(t-t_0) \qquad \text{(ver Exemplo 4)}$$

ou

$$x(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t<t_0\\ \dfrac{I}{m\omega}\,e^{-\alpha(t-t_0)}\operatorname{sen}\omega(t-t_0) & \text{se} \quad t\geqslant t_0\end{cases}$$

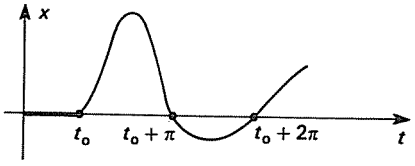


Figura 3.36

(ver Figura 3.36)

Observação:

No exemplo que acabamos de ver, a força externa, por hipótese, age instantaneamente em $t=t_0$. Assim, o oscilador obedece à equação homogênea

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2x=0 \qquad (t\neq 0)$$

tanto para $t<t_0$ como para $t>t_0$, com $x(t)=0$ e $\dot{x}(t)=0$ para $t<t_0$.

Para $t>t_0$ a solução geral da equação homogênea é dada por

$$x(t)=Ae^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\omega t+\theta) \qquad \text{(Verifique!)}$$

As condições físicas impõem que $x(t)$ seja contínua em todos os pontos, inclusive em $t=t_0$, o mesmo não ocorrendo com $x(t)$ em $t=t_0$.

Usando estes fatos, podemos integrar a equação

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{I}{m}\delta(t-t_0)$$

de $t_0-\varepsilon$ a $t_0+\varepsilon$ para encontrar o valor de A e θ

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\ddot{x}dt+2\alpha\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\dot{x}dt+\omega_0^2\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}x dt=\frac{I}{m}$$

ou

$$\dot{x}(t_0+\varepsilon)-\dot{x}(t_0-\varepsilon)+2\alpha\left[x(t_0+\varepsilon)-x(t_0-\varepsilon)\right]+\omega_0^2\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}x dt=\frac{I}{m}$$

Como x é contínua, tomando $\varepsilon\to 0$, a expressão acima fica:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\dot{x}\,(t_0+\varepsilon)-\dot{x}(t-\varepsilon)\right]=\frac{I}{m}$$

Ainda

$$\dot{x}(t-\varepsilon)=0,\quad \text{pois}\quad \dot{x}(t)=0\quad \text{para}\quad t<t_0$$

Então

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\dot{x}\,(t_0+\varepsilon)\right]=\lim_{t\to t_0+}\dot{x}(t)=\frac{I}{m}$$

Por outro lado, tomando $x(t)=A\,e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,(\omega t+\theta)$, obtemos

$$\dot{x}(t)=-\alpha e^{-\alpha t}A\,\text{sen}\,(\omega t+\theta)+\omega A e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\theta)=-\alpha x(t)+\omega A e^{-\alpha t}\cos(\cos\omega t+\theta)\qquad (t>t_0)$$

Logo

$$\lim_{t\to t_0}\dot{x}(t)=A\omega e^{-\alpha t_0}\cos(\omega t_0+\theta)=\frac{I}{m}$$

pois

$$\lim_{t\to t_0-}-\alpha x(t)=-\alpha e^{-\alpha t_0}A\,\text{sen}\,(\omega t_0+\theta)=0$$

(pois x é contínua em t_0 e $x(t)=0$ para $t<t_0$).

Como A deve ser distinto de zero, segue-se que $\text{sen}\,(\omega t_0+\theta)=0$. Logo

$$\omega t_0+\theta=\pi n\Rightarrow\theta=\pi n-\omega t_0$$

Então

$$\cos(\omega t_0+\theta)=(-1)^n\qquad \text{e, portanto,}\qquad A=(-1)^n\left(\frac{I}{\omega m}\right)e^{\alpha t_0}$$

A solução geral será, então, dada por

$$x(t)=(-1)^n\frac{I}{\omega m}e^{-\alpha(t-t_0)}\,\text{sen}\,[\omega(t-t_0)+n\pi]\qquad (t>t_0)$$

ou

$$x(t)=\frac{I}{\omega m}e^{-\alpha(t-t_0)}\,\text{sen}\,\omega\,(t-t_0)\qquad (t>t_0)$$

o que mostra que a solução obtida por meio do cálculo com $\delta(t)$ é a correta!

EXERCÍCIOS

1. Use o mesmo argumento da observação acima para mostrar que a solução obtida por meio do cálculo com $\delta(t)$, na equação
$$\ddot{x} + x = \delta(t - t_0)$$
leva à resposta física correta.
2. Use a transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial:
   a. $y' + 2y = \delta(t-1)$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$
   b. $y'' + 2y' - 3y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
   c. $y'' + y = \delta(t - \pi)$ sen t, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

   Compare a solução destes problemas obtidas pelo método da Secção 3.4.8.

PROJETO

A definição de $\delta(x)$ por
$$\delta(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
não é correta e nem ao menos pode ser usada para definir uma função, quanto mais uma função integrável!!

Se definíssemos $\delta(x)$ através da propriedade
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$
para toda f contínua, teríamos um novo fracasso, pois é possível mostrar que não existe nenhuma função com esta propriedade.

O que existe é seqüência de funções $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, fortemente concentradas, satisfazendo
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x)\, dx = f(0)$$

Tal seqüência é denominada *seqüência delta*.

Verifique se a seqüência
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n}{2} & \text{se } |x| < \dfrac{1}{n} \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$
é uma seqüência delta.

Muitas vezes é útil construir seqüências delta que sejam contínuas e diferenciáveis. (Verifique se φ_n acima satisfaz estas condições), com todos os seus elementos *normalizados*, isto é
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) = 1$$

Calcule o valor de A para que a seguinte seqüência seja delta normalizada
$$\varphi_n(x) = An\, e^{-n^2x^2}$$
Desenhe tal seqüência para vários valores de n.

Mostre que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{d\varphi_n}{dx} f(x)\, dx = -f'(0)$$
para toda função f diferenciável.

Capítulo 4

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

4.1 INTRODUÇÃO

Sistemas de equações diferenciais já apareceram no capítulo anterior como modelos matemáticos de redes de circuitos *RLC* e de osciladores mecânicos acoplados. Estes são os exemplos típicos de sistemas de equações diferenciais ordinárias e seu estudo deu origem a grande parte das técnicas e da nomenclatura desenvolvidas pela teoria. Entretanto, inúmeros outros exemplos em diversas áreas da própria Física (vibrações moleculares), da Engenharia (vibrações de estruturas), da Química (reações múltiplas), da Ecologia (competição de espécies), Demografia, Epidemiologia, Economia etc. poderiam ser citados e alguns serão tratados neste capítulo. A semidiscretização de problemas evolutivos de equações parciais, tal como o exemplo da corda vibrante do capítulo anterior, também dá origem a sistemas de equações diferenciais ordinárias. Além destas importantes aplicações, dispomos de algumas motivações teóricas que por si só bastariam para justificar a importância do seu estudo. A principal delas é a possibilidade de transformar qualquer equação diferencial explícita de ordem n

$$\frac{d^n u}{dt^n} = F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right) \tag{1}$$

em um sistema de equações de primeira ordem. Se, por exemplo, definirmos

$$u_1 = u,\ u_2 = \frac{du}{dt},\ \ldots,\ u_n = \frac{d^{n-1}u}{dt^n}$$

teremos

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= u_3 \\ &\vdots \\ \frac{du_n}{dt} &= F(t, u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned} \tag{2}$$

Se escrevermos o vetor $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathbf{u}$, o sistema poderá ser dado na forma vetorial por

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \tag{3}$$

onde

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \dots\dots \\ \frac{du_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{u}) \\ f_2(t, \mathbf{u}) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(t, \mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ F(t, u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 1

A equação do oscilador harmônico para vibrações mecânicas

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = \varphi(t)$$

pode ser transformada num sistema de duas equações de primeira ordem. Basta tomar $u_1 = u$ e escrever

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_2 \\ \dfrac{du_2}{dt} = F(t, u_1, u_2) = \dfrac{1}{m}\left(\varphi(t) - \dfrac{k}{m}u_1 - \dfrac{c}{m}u_2\right) \end{cases}$$

ou, na forma vetorial

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{1}{m}\left(\varphi(t) - \frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2\right) \end{pmatrix}$$

■

Simplificar a notação traz vantagens não apenas visuais e formais mas, como veremos neste capítulo, ela é decisiva para o desenvolvimento da teoria.

Se a equação for linear do tipo $\mathbf{L}u = 0$

$$\mathbf{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k \quad (a_n(x) \neq 0)$$

então o sistema tomará a forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} \tag{4}$$

onde A é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{-a_0}{a_n} & \frac{-a_1}{a_n} & \frac{-a_2}{a_n} & \dots & \frac{-a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

Observe que o problema de Cauchy para a equação

$$\begin{cases} \dfrac{d^n u}{dt^n} = F\left(t, u, \dfrac{du}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right) \\ u(0) = \alpha_0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

se transforma no problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) = \alpha \end{cases} \tag{5}$$

onde

$$\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

cuja semelhança com as equações de primeira ordem reais será explorada ao máximo.

Sob este ponto de vista as soluções da Equação (1) adquirem uma interpretação geométrica, como curvas $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ no espaço $\mathbb{R}^n$, que dará origem aos chamados métodos qualitativos (geométricos), os quais constituem a principal técnica disponível para o estudo de equações não lineares, a serem tratadas no próximo capítulo.

Neste capítulo focalizaremos a nossa atenção nos sistemas de equações diferenciais lineares que podem ser escritas como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u} + \mathbf{f}(t) \tag{6}$$

onde $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ é uma função diferenciável definida no intervalo (a, b) e com valores em $\mathbb{R}^n$. ou seja. uma trajetória em $\mathbb{R}^n$ cuja velocidade (vetorial) é

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{du_1}{dt}, \ldots, \frac{du_n}{dt}\right)$$

$A(t)$ é uma matriz $n \times n$ cujos coeficientes $A_{ij}(t)$ são funções de t definidas em (a, b) e $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ é uma função definida em (a, b) com valores em $\mathbb{R}^n$ e representa a influência externa.

Os primeiros aspectos que estudaremos a respeito desta equação vetorial se referem à linearidade da operação efetuada sobre a função incógnita $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{Lu} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} - A\mathbf{u}$$

e o princípio de superposição associado a esta propriedade. Teremos oportunidade de verificar um estreito paralelo deste estudo com o do capítulo anterior, o que não

deve ser surpreendente, uma vez que estamos simplesmente utilizando os mesmos conceitos gerais de Álgebra Linear. Para isto demonstraremos o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u} + \mathbf{f}(t) \\ u(0) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

para $A(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ contínuos.

Este teorema nos fornecerá um processo analítico para a construção das soluções, embora do ponto de vista "prático" não esgote o problema. Aqui, como antes, a solução completa da equação não homogênea é escrita como soma de uma solução qualquer (particular) da equação $L\mathbf{u}_p = \mathbf{f}$ e a solução geral da equação homogênea correspondente $L\mathbf{h} = 0$; $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{h}$.

O primeiro resultado que mostra claramente a importância do paralelo entre as equações vetoriais (matriciais) e as escalares se refere ao cálculo de uma solução $\mathbf{u}_p$ a partir da solução geral da equação homogênea, por um procedimento formalmente idêntico àquele utilizado no caso de

$$\frac{dx}{dt} = ax + \varphi$$

Isto nos possibilitará obter a solução completa de $\mathbf{Lu} = \mathbf{f}$ de uma maneira muito simples, através de uma função de Green para o problema de Cauchy. Portanto, novamente, a resolução completa da equação $\mathbf{Lu} = \mathbf{f}$ se reduzirá ao cálculo da solução geral da equação homogênea, $\mathbf{Lh} = 0$.

Como, de certa forma, este problema vetorial inclui a teoria das equações escalares lineares de ordem n, é de se esperar que o cálculo analítico destas soluções no caso geral, em que $A(t)$ depende de t, deva ser um problema pelo menos tão difícil quanto aquele.

Por outro lado, felizmente, o problema para o caso especial em que A é uma matriz constante é completamente solúvel por métodos algébricos. Devido à sua importância na formulação de inúmeros modelos matemáticos, e ao fato de que esta é uma etapa indispensável para o estudo de problemas não lineares, deste ponto em diante trataremos quase que exclusivamente de equações diferenciais lineares (vetoriais) com matrizes constantes.

Para resolver este problema utilizaremos a notação operacional de Heaviside $\left(\dfrac{d}{dt} \equiv D\right)$ e o isomorfismo entre a álgebra dos polinômios de uma variável e os operadores diferenciais lineares do tipo $\sum_{k\geq 0}^{n} a_k D^k = P(D)$. Com isto imitaremos processos usuais de eliminação de incógnitas em sistemas de equações (algébricas) lineares, obtendo assim o desacoplamento do sistema em equações do tipo $P(D)u_k = 0$ para cada componente u_k da incógnita $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, que podem então ser estudadas pelos métodos desenvolvidos no capítulo anterior.

Este será o primeiro passo para a resolução completa da equação $\mathbf{Lu} = 0$.

4.2 PROPRIEDADES BÁSICAS DOS SISTEMAS LINEARES

Nesta e na próxima secção estudaremos alguns fatos relacionados diretamente com a linearidade da operação $\frac{d}{dt} - A = \mathbf{L}$ realizada sobre $\mathbf{u}$ na equação $\mathbf{Lu} = \mathbf{f}$. Como a argumentação é inteiramente semelhante àquela utilizada no capítulo anterior, reduziremos o desenvolvimento da teoria a algumas indicações.

Iniciaremos pelo

Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para o Problema de Cauchy "Se $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ contínua, isto é, cada $A_{ij}(t)$ é uma função contínua, definida em (a, b) e $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ é uma função contínua de (a, b) em $\mathbb{R}^n$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \alpha \quad t_0 \in (a, b) \end{cases}$$

tem uma única solução $\mathbf{u}(t, \alpha)$, continuamente diferenciável em (a, b), para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$"

Este teorema será demonstrado na Secção 5.5 e segue, formalmente, as mesmas etapas para o caso de uma equação escalar linear.

Uma vez aceito este teorema, podemos então estabelecer as propriedades lineares gerais que devem ser verificadas pelo leitor. (A título de exemplo, acompanhe cada uma delas com a equação do oscilador harmônico na forma de um sistema.)

4.2.1 Propriedades Lineares Gerais

1. As soluções de $\mathbf{Lu} = 0$ formam um subespaço vetorial de

$$C^1[(a, b), \mathbb{R}^n] = \left\{ \begin{array}{l} \text{espaço vetorial das funções continuamente} \\ \text{diferenciáveis definidas em } (a, b) \text{ e com va-} \\ \text{lores em } \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

que chamaremos de núcleo de $\mathbf{L}$, e denotamos por $N(\mathbf{L})$.

Isto é, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ satisfazem $\mathbf{Lu} = \mathbf{Lv} = 0$, então o mesmo acontece com $(\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v})$ para todo escalar λ.

2. A solução do problema $\begin{cases} \mathbf{Lu} = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(t_0) = \alpha \end{cases}$ pode ser escrita de uma única forma, como soma das soluções de

$$\begin{cases} \mathbf{Lv} = \mathbf{f} \\ \mathbf{v}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathbf{Lw} = 0 \\ \mathbf{w}(t_0) = \alpha, \ \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \end{cases}$$

3. A solução completa de $\mathbf{Lu} = \mathbf{f}$ é da forma $\mathbf{u}_p +$, onde $\mathbf{Lu}_p = \mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ é solução geral da equação homogênea. Mostre que o conjunto de soluções de $\mathbf{Lu} = \mathbf{f}$ ("solução geral") é da forma $\{\mathbf{u}_p + \mathbf{h}, \mathbf{h} \in N(\mathbf{L})\} = S$.

4. A todo valor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ está associada uma única solução de $\mathbf{Lu} = 0$ como solução do problema de Cauchy $\begin{cases} \mathbf{Lu} = 0 \\ \mathbf{u}(t_0) = \alpha \end{cases}$ e vice-versa.

A cada solução de $\mathbf{Lu} = 0$ está associado um vetor $\alpha = \mathbf{u}(t_0)$. Esta associação é um isomorfismo linear entre $N(\mathbf{L}) \in \mathbb{R}^n$. Portanto, dim $N(\mathbf{L}) = n$.

5. Sejam $\mathbf{u}^k(t)$ as soluções (únicas) de $\begin{cases} \mathbf{Lu} = 0 \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{e}_k \end{cases}$ onde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1). \quad (\{\mathbf{e}_k\}_{1 \le k \le n} \text{ é a base canônica de } \mathbb{R}^n)$$

Então $\{\mathbf{u}^k(t)\}_{1 \le k \le n}$ são linearmente independentes e formam uma base de $N(\mathbf{L})$, isto é, para o espaço das soluções das equações homogêneas $\mathbf{Lu} = 0$.

Toda solução de $\mathbf{Lh} = 0$ pode ser escrita como

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t_0)\, \mathbf{u}^k(t)$$

6. Considere a matriz $U(t)$ com $U_{jk}(t) = u_j^k(t)$, isto é, a k-ésima coluna de U é formada pelas componentes do vetor $\mathbf{u}^k(t)$. A matriz $U(t)$ é chamada *matriz fundamental de soluções do sistema* e satisfaz o problema de Cauchy para a equação matricial

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = A(t)U \\ U(t_0) = I \end{cases}$$

$U(t)$ é a única soluçáó deste problema.

A solução do problema $\begin{cases} \mathbf{Lu} = 0 \\ \mathbf{u}(t_0) = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ é dada por $\mathbf{u}(t) = U(t)\alpha$.

A solução do problema de Cauchy geral para a equação *matricial*

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = AM \\ M(t_0) = M_0 \end{cases}$$

é dada por $M(t) = U(t)M_0$. (Basta multiplicar (1) por $\mathbf{u}_0$ à esquerda nas duas equações do problema.)

7. Considere o problema matricial

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = A(t)U \\ U(s) = I \end{cases}$$

A sua solução é única. Escrita como função de t e s, esta função matricial é chamada *matrizante* de A e denotada por $M(t, s)$.

Observe que se tomamos a matriz $N(t, s) = U(t)U^{-1}(s)$, onde U é a matriz fundamental, verificamos que

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{dU}{dt}(t)U^{-1}(s) = (A(t)U(t))U^{-1}(s)$$

ou

$$\frac{\partial N}{\partial t} = A(t)N$$

e que

$$N(s) = U(s)U^{-1}(s) = I$$

Portanto, $U(t)U^{-1}(s) = M(t, s)$.

A solução de $\mathbf{Lu} = 0$, $\mathbf{u}(s) = \alpha$, é dada por $M(t, s)\alpha = u(t)$. Se A é constante, então $M(t, s) = U(t)U^{-1}(s) = U(t - s)$.

Verificação: $\dfrac{d}{dt}U(t-s)\Big|_{t=s} = U(0) = I$. Então, $U(t)U^{-1}(s) = U(t - s)$.

8. Por que este último argumento não funciona se A é função de t, $\left(\dfrac{dA}{dt} \neq 0\right)$?

Considere o caso em que a matriz A é obtida pela transformação de uma equação diferencial escalar linear de ordem n

$$(a_nD^n + \ldots + a_0)x = 0, \text{ em um sistema } u_1 = x, \ldots, u_k = \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{-a_0}{a_n} & \dfrac{-a_1}{a_n} & \dfrac{-a_2}{a_n} & \ldots & \dfrac{-a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

Sejam $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$, n soluções da equação escalar.

Observe então que a matriz (chamada wronskiana)

$$W(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_{n-1} \\ D\varphi_0 & D\varphi_1 & \ldots & D\varphi_{n-1} \\ \vdots & & & \\ D^{n-1}\varphi_0 & D^{n-1}\varphi_1 & \ldots & D^{n-1}\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

$W_{kj} = \dfrac{d^j\varphi_k}{dt^j} = D^j\varphi_k$ é solução de $\begin{cases} \dfrac{dW}{dt} = AW \\ W(t_0) = W_0 \end{cases}$ e, portanto, $W(t) = U(t)\,W_0$.

O wronskiano de $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{N-1})$ é $\det W(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})$ e pode ser calculado por $\det W = \det U \cdot \det W_0$.

Em particular, verificamos que

a. Como $\det U(t) \neq 0$ para todo t, então, ou $\det W(t) \neq 0$ para todo t ou é identicamente nulo.

b. $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\det W \equiv 0$.

c. $\dfrac{d}{dt} \det W = Tr(A) \det W = \dfrac{-a_{n-1}}{a_n} \det W$

ou seja

$$\det W(\varphi_0, \ldots, \varphi_{N-1}) = \det W_0 \exp\left(\int_0^s \frac{-a_{n-1}(s)}{a_n(s)}\, ds \right)$$ vide teorema de Liouville na Secção 4.3.

9. Mudança de variáveis. Seja $\mathbf{v} = P\mathbf{u}$, onde P é matriz $n \times n$, constante.

Então, $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{v}$ e $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = P^{-1}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{u} = AP^{-1}\mathbf{v}$ de onde, $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = (PAP^{-1})\mathbf{v} = B\mathbf{v}$.

Portanto, a nova variável (vetorial) $\mathbf{v}(t) = P\mathbf{u}$ satisfaz uma equação linear cuja matriz de coeficientes é equivalente a A pela relação $B = PAP^{-1}$. Este fato é fundamental para o estudo de sistemas a coeficientes constantes em que a matriz A é diagonalizável. Se $PAP^{-1} = \Delta$ é diagonal, isto é, $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, o sistema fica completamente desacoplado.

$$\frac{dv_k}{dt} = \lambda_k v_k \Rightarrow v_k(t) = v_k(0)\, e^{\lambda_k t}$$

e, portanto, cada $u_j(t)$ será uma combinação linear das funções $e^{\lambda_k t}$.

10. Propriedade Transitiva do Matrizante.

$M(t, s)\alpha$ indica a posição, no instante t, de um ponto que se encontrava no instante s na posição α (observe que $M(s, s)\,\alpha = \alpha$) e que está se movimentando por meio do fluxo causado pelo campo vetorial $A(t)\alpha$. Portanto, é razoável que $M(t, t_1)\, M(t_1, t_0) = M(t, t_0)$ e isto é fácil provar. Basta mostrar que ambos os lados desta igualdade multiplicados por um $\alpha \in \mathbb{R}^n$ resolvem o mesmo problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} \\ u(t_1) = M(t_1, t_0) \end{cases}$$

e, portanto, pelo Teorema de Unicidade, devem coincidir.

11. Se A é constante $M(t, s) = U(t - s)$, onde $M(t, s)$ é matrizante de A. Neste caso,

$$\begin{cases} U(t_1)\, U(t_2) = U(t_1 + t_2) \\ U(0) = I \\ \dfrac{dU}{dt} = AU \end{cases}$$

Qual seria a notação ideal para esta função $U : (a, b) \to M_{n \times n}$, onde $M_{n \times n}$ é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$?

Compare com o caso $n = 1$.

$U(t)$ também é chamada *matriz de transição*, ou matriz de transferência, ou ainda matriz de transição de estado.

EXERCÍCIO ESPECIAL

1. *a.* Verifique as afirmações de 1 a 11 anteriores para o sistema obtido de um oscilador harmônico $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \cos \omega t$.
   b. Demonstre todas as afirmações para o caso geral.

4.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA (TEOREMAS DE EULER E LIOUVILLE)

Observe que a matriz fundamental $U(t)$ descreve completamente as soluções da equação vetorial $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$. Geometricamente, $U(t)$ é uma deformação de $\mathbb{R}^n$ com o tempo t, onde cada ponto é deslocado através de uma trajetória $U(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}(t)$ a partir da posição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, com velocidade $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{dU}{dt}\mathbf{x}_0 = A(t)\mathbf{u}(t)$. Isto é, a cada ponto por onde passa esta trajetória ela possui uma velocidade vetorial $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\,\mathbf{u}(t)$ prescrita pela equação diferencial para aquele ponto, naquele instante. Então $A(t)\mathbf{x}$ pode ser pensada como um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ que varia com o tempo: a cada ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e a cada instante t está assinalado o vetor velocidade $A(t)\mathbf{x}$. Uma trajetória $U(t)\mathbf{x}$ tangencia este campo variável a cada ponto, no instante em que passa por ele (ver Figura 4.1).

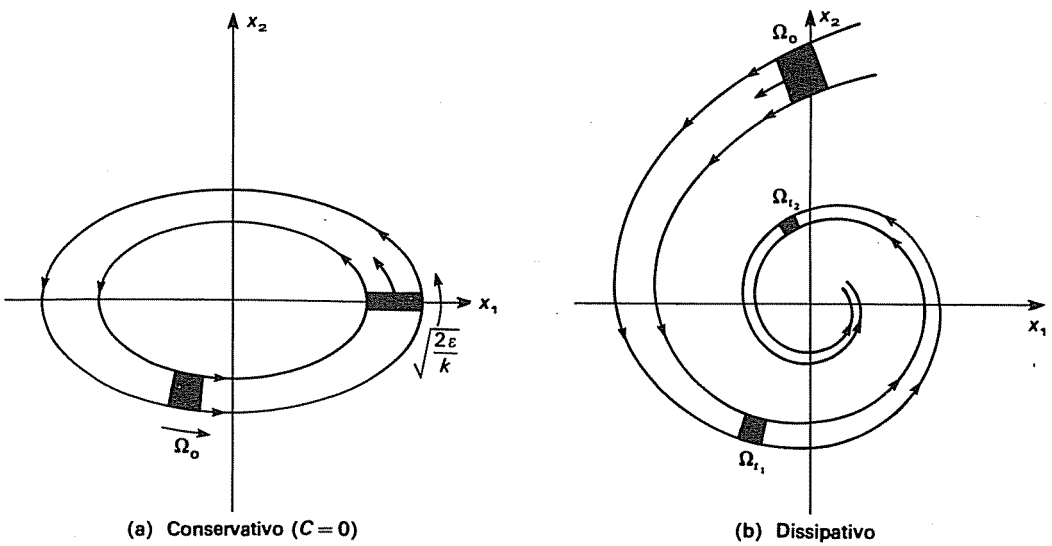


Figura 4.1 Fluxo plano do Oscilador Harmônico

Se $A(t) = A$ for constante, então o campo vetorial será fixo com o tempo e só poderá variar de ponto a ponto. Pensemos em $U(t)\mathbf{x}$ como uma deformação do plano e tomemos uma figura Ω que será transladada pela matriz $U(t)$ em uma figura Ω_t que se modifica e se movimenta com o tempo. Então, surge a questão: como se dá a variação da área (ou volume, se $n > 2$) de Ω_t com o tempo?

O volume de Ω_t é dado por $\int_{\Omega_t} d\mathbf{x}$. Fazendo uma mudança de variável $\mathbf{x} = U(t)\mathbf{x}_0$, temos $\text{vol}\,(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right| d\mathbf{x}_0 = \int_{\Omega_0} (\det U(t))\, d\mathbf{x}_0$.

Devemos determinar agora $\frac{d}{dt}\,\text{vol}\,(\Omega_t)$. Para isto precisamos calcular $\frac{d}{dt}(\det U(t))$, o que conseguiremos com uma elegante (e surpreendente) fórmula de Euler.

Teorema de Euler Se $U(t)$ é uma matriz $n \times n$ inversível e diferenciável em (a, b) então

$$\frac{d}{dt}(\det U(t)) = \det (U(t)) \quad Tr\left(U^{-1}\frac{dU}{dt}\right) \tag{1}$$

Observação:

$TrB = \text{traço de } B = \sum_{k=1}^{n} B_{kk} = \text{soma dos termos da diagonal.}$

Demonstração: (Derivada e limites de matrizes são feitos coordenada a coordenada.)

$$U(t+h) = U(t) + U'(t)h + R(h), \text{ onde } \lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$$

$$U(t+h) = U(t)\ (I + U^{-1}U'h + U^{-1}(t)R(h))$$

Com base na definição de determinante como soma de todos os possíveis produtos de n elementos da matriz, escolhendo-se um de cada linha e cada coluna (e dando a cada produto o sinal da permutação dos índices), você deve se convencer de que vale a seguinte observação: suponha P e Q matrizes $n \times n$ constantes; então

$$\det (I + Ph + Qh^2) = 1 + (Tr\ P) \cdot h + \text{termos do tipo } \alpha(h)$$

$\left(\text{isto é, que se aproximam de zero mais rápido do que } h\text{: } \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0\right)$

Então

$$\det U(t+h) = \det U(t) \cdot \det (I + U^{-1}U'h + U^{-1}(t)R(h))$$

Como $U^{-1}(t)\,R(h)$ é do tipo $\alpha(h)$, vemos que

$$\det U(t+h) = \det U(t)\ (1 + Tr(U^{-1}U')h + \alpha(h))$$

$$\frac{\det U(t+h) - \det U(t)}{h} = \det U(t) \cdot Tr\,(U^{-1}U') + \frac{\alpha(h)}{h}$$

No limite $h \to 0$ temos

$$\frac{d}{dt} \det U(t) = \det U(t)\ Tr\ (U^{-1}U')$$

que é o resultado desejado.

No caso particular em que a matriz $U(t)$ é solução de

$$\frac{dU}{dt} = AU$$

a fórmula de Euler pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \det U(t) = \det U(t)\ Tr\left(U^{-1}\frac{dU}{dt}\right) = \det U(t)\ Tr\ (U^{-1}AU)$$

e, fazendo uso da propriedade comutativa do traço: $Tr\ (PQ) = Tr\ (QP)$ (verifique), obtemos a *fórmula de Liouville*

$$\frac{d}{dt} \det U(t) = Tr\ (A(t)) \det U(t) \tag{2}$$

Concluímos daí que, $\frac{d}{dt}\ \text{vol}\ (\Omega_t) = \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt}\ (\det U(t))\, d\mathbf{x}_0 = \int_{\Omega_0} Tr\ (A) \det U(t)\, d\mathbf{x}_0$ e, retornando à variável antiga $\mathbf{x} = U(t)\mathbf{x}_0$ obtemos o seguinte resultado, que também é conhecido por fórmula de Liouville,

$$\frac{d}{dt}\ \text{vol}\ (\Omega_t) = \int_{\Omega_t} Tr\ (A(t))\, d\mathbf{x} \tag{3}$$

e que representa a taxa de variação do volume de um conjunto Ω_t transportado pelo fluxo de um campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x}$.

Em particular, se a matriz A tem traço nulo, a deformação processada por $U(t)$ preserva a área (volume) das figuras (regiões) deformadas (fluxo isovolumétrico) (vide o caso em que A é anti-simétrica no projeto 2).

Também podemos concluir de (2) que $\det U(t)$ satisfaz uma equação linear escalar cuja solução é

$$\det U(t) = \exp \int_0^t Tr\ [A(s)]\, ds \quad \text{(identidade de Jacobi)}$$

A relativa simplicidade da fórmula de Euler dá origem a uma grande quantidade de informações sobre o caráter geométrico do fluxo e que são essenciais em várias situações, como teremos oportunidade de constatar. Voltaremos a utilizá-la também no Capítulo 6, nos estudos das equações diferenciais parciais da mecânica do meio contínuo.

EXEMPLO 1

Analisar o fluxo causado no plano pelo sistema de equações lineares obtidas do oscilador harmônico $(mD^2 + cD + k)x = 0$.

$$x_1 = x,\ x_2 = \frac{dx}{dt},\ u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-k}{m} & \dfrac{-c}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-k}{m} & \dfrac{-c}{m} \end{pmatrix} = \frac{-c}{m}$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}(\text{vol}\ \Omega_t) = \frac{-c}{m}\,\text{vol}\ (\Omega_t)$$

Resolvendo esta equação linear de primeira ordem, vem

$$\text{vol}\ (\Omega_t) = \text{vol}\ (\Omega_0)e^{-ct/m}$$

Observe que o decréscimo da área de uma figura no plano de fase $(x, \dot{x})$, transportada pelo fluxo do oscilador harmônico, é causado pela dissipação e é exponencial (identidade de Jacobi). Se o oscilador harmônico for conservativo, $c = 0$, então o fluxo será isovolumétrico. Este é um fato muito geral que voltará a ser abordado. ■

EXERCÍCIO

1. Mostre que se A é matriz anti-simétrica então o fluxo em $\mathbb{R}^n$ descrito pela matriz fundamental $U(t)$, solução de $\frac{dU}{dt} = AU$ com $U(0) = t$, preserva o volume e também preserva o produto interno $\frac{d}{dt}\langle U(t)\alpha,\ U(t)\beta\rangle = 0$. Neste caso dizemos que o fluxo é isométrico.

   Mostre que o fluxo em $\mathbb{R}^3$, obtido da equação $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ onde $\boldsymbol{\omega}$ é um vetor fixo que representa uma velocidade angular, é isométrico.

4.4 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA: FUNÇÃO DE GREEN

Considere a equação escalar estudada no Capítulo 2

$$\frac{dx}{dt} - a(t)x = f(t)$$

Para que a expressão à esquerda seja uma derivada, multiplicamos por um fator ℓ*

$$\ell\frac{dx}{dt} - \ell a x = \frac{d}{dt}(bx) = \ell f$$

---

* Podemos interpretar este processo como uma tentativa de fatorar o operador linear da equação diferencial na composição das operações: 1.º) produto por uma função $b(t)$, 2.º) derivação com relação a t, nesta ordem.

Se conseguirmos colocar a equação nesta forma, sua solução se resumirá a uma integração

$$x = b^{-1} \int_0^t \ell f \, dt$$

Observe que, para isto, devemos ter $\ell = b\dfrac{db}{dt} = -a\ell = -ab$, ou seja, $b = \ell$ deve ser solução da equação homogênea adjunta. Tentaremos repetir o argumento para a equação vetorial

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = A\mathbf{w} + \mathbf{f} \tag{1}$$

com o cuidado que o caso requer.

Multiplicaremos $\dfrac{d\mathbf{w}}{dt} - A\mathbf{w}$ por uma matriz L para obter

$$L\frac{d\mathbf{w}}{dt} - LA\mathbf{w} = \frac{d}{dt}(B\mathbf{w}) \quad (B \text{ matriz})$$

Então, tal como antes, devemos ter $L = B$ e $\dfrac{dB}{dt} = -LA$, ou seja, L deve satisfazer a equação linear homogênea (matricial)

$$\frac{dL}{dt} = -LA \tag{2}$$

tomando a transposta, temos

$$\frac{dL^*}{dt} = -A^*L \tag{3}$$

que é chamada *equação adjunta* da equação matricial $\dfrac{dU}{dt} = AU$.

Supondo resolvida a equação homogênea adjunta temos $\dfrac{d}{dt}(Lw) = L\mathbf{f}$ e, portanto, a solução geral de (1) será dada por

$$\mathbf{w}(t) = L^{-1}(t) \int_0^t L(s)\mathbf{f}(s)ds + L^{-1}(t)c$$

Tomando

$$\mathbf{u}^0(t) = \int_0^t L^{-1}(t)L(s)\mathbf{f}(s)ds$$

então

$$\mathbf{u}^0(0) = 0$$

e portanto

$$\mathbf{u}^0 \text{ é solução de } \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIO

1. Repita o argumento acima para o oscilador harmônico.

Quando analisamos o funcionamento do sistema sob o ponto de vista de causa e efeito, a função

$$G(t, s) = L^{-1}(t)\, L(s)\, H(t-s) = \begin{cases} L^{-1}(t)\, L(s) \text{ se } t > s \\ 0 \text{ se } t < s \end{cases} \tag{4}$$

é chamada função de Green ou propagador, ou ainda função de influência, pois ela representa (em densidade) o fator de proporcionalidade entre a influência no instante s e o comportamento no instante t (ver Capítulo 3). Assim, o estado do sistema no instante t (cuja única influência exterior é dada por f e que se encontrava em repouso para $t \leqslant 0$) é a "soma" de todas as influências exteriores recebidas anteriormente a t e propagada. Então

$$\mathbf{u}^0(t) = \int_0^\infty G(t, s)\, f(s)\, ds \simeq \Sigma G(t, s)\, \Delta s\, f(s)$$

A representação é dita causal pois $G(t, s) = 0$ $(t < s)$, isto é, "influências futuras não causam efeitos passados".

Analisemos melhor, agora, esta função de Green.

O cálculo da matriz L e, portanto, da função de Green, é surpreendentemente simples, uma vez resolvida a equação homogênea, isto é, obtida a matriz fundamental $U(t)$. Basta observar que

$$\frac{dLU}{dt} = \frac{dL}{dt}\, U + L\, \frac{dU}{dt} = (-LA)\, U + L(AU) = 0$$

Portanto, LU é uma matriz constante. Se tomamos L^*(= transposta de L) como matriz fundamental de $\dfrac{dL^*}{dt} = -A^*L^*(L^*(0) = I)$ então, $L(0)U(0) = I$ e, portanto, $L(t) = U^{-1}(t)$.

A função de Green $G(t, s)$ será portanto representada pela expressão:

$$G(t, s) = U(t)U^{-1}(s)\, H(t-s)$$

e a solução completa de $\dfrac{d\mathbf{w}}{dt} = A\mathbf{w} + \mathbf{f}$ é dada por

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t U(t)\, U^{-1}(s)\, f(s)\, ds + U(t)\alpha \tag{5}$$

onde $\mathbf{w}(0) = \alpha$.

Concluímos assim o importante resultado: a solução completa da equação $\frac{d\mathbf{w}}{dt} = A\mathbf{w} + \mathbf{f}$ não homogênea onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ contínua e $\mathbf{f}(t)$ é uma função contínua de valores em $\mathbb{R}^n$, ambas definidas em um intervalo contendo a origem, é obtida pela fórmula (5), uma vez conhecida a matriz fundamental de soluções $U(t)$ que resolve o problema de Cauchy matricial *homogêneo* $\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU \\ U(0) = I \end{cases}$

Façamos agora uma correspondência entre esta solução e a obtida para a equação linear escalar de segunda ordem

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u\right) + q(x)\,u = 0 \tag{6}$$

Transformando esta equação em um sistema

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \tag{7}$$

temos

$$\frac{du_1(x)}{dx} = u_2(x)$$

e

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{-q}{p}u - \frac{p'}{p}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-q}{p} & \frac{-p'}{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Portanto, o problema $\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right) + q\mathbf{u} = f$ é equivalente a

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-q}{p} & \frac{-p'}{p} \end{pmatrix}\mathbf{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{p} \end{pmatrix} = A\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{9}$$

Suponha que v e u sejam soluções de $\mathbf{L}u = 0$ e $v(0) = 1, v'(0) = 0, u(0) = 0, u'(0) = 1$. Então, o wronskiano

$$U(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ v'(x) & u'(x) \end{pmatrix} \tag{10}$$

é solução fundamental de $\frac{d\mathbf{u}}{dx} = A\mathbf{u}$.

Como

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} u' & -u \\ -v' & v \end{pmatrix} \frac{1}{\det U}, \text{ temos pela Equação 5}$$

$$\mathbf{u}^0(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} v & u \\ v' & u' \end{pmatrix}_{(x)} \frac{1}{\det U(s)} \begin{pmatrix} u' & -u \\ -v' & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(s)}{p(s)} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \int_0^x \begin{pmatrix} v & u \\ v' & u' \end{pmatrix}_{(x)} \frac{1}{\det U(s)} \begin{pmatrix} -u(s)\frac{f(s)}{p(s)} \\ v(s)\frac{f(s)}{p(s)} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{u}_1^0(x) = \int_0^x \frac{[-v(x)\,u(s) + u(x)\,v(s)]}{v(s)\,u'(s) - v'(s)\,u(s)} \frac{f(s)}{p(s)}\, ds = u(x) \tag{11}$$

Compare esta fórmula com aquela obtida no capítulo anterior para a função de Green do problema de Cauchy para o operador autoadjunto $\mathbf{L} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q$.

As vantagens do ponto de vista matricial provêm da simplicidade da notação para a obtenção e memorização das fórmulas. A dificuldade no cálculo efetivo de uma solução é apenas mecânica, uma vez que as operações algébricas são elementares e diretas, sem nenhuma surpresa ou "truques" intermediários. Além disto, temos sempre a analogia com a equação de primeira ordem escalar que nos orienta.

4.5. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE CAUCHY LINEAR

O objetivo desta secção é apresentar o teorema central dos Capítulos 3 e 4 que nos fornece um método para a construção analítica de uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \tag{1}$$

($A(t)$ matriz $n \times n$ e $\mathbf{f}(t)$ função com valores em $\mathbb{R}^n$, contínuas em $[0, R]$) e, que, além disto, também nos garante a unicidade da solução obtida.

Teorema Existência e Unicidade de Soluções de Problemas de Cauchy para Sistemas Lineares. "Se $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas $A_{ij}(f)$ continuamente definidas em $[0, R]$, $\mathbf{f}: [0, R] \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$, então, existe uma única solução $\mathbf{u}: [0, R] \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável do problema de Cauchy (1)."

A demonstração deste teorema será baseada em uma interpretação operacional do problema (1) que passaremos a formular.

Observemos inicialmente que, se $\mathbf{v}:[0, R] \to \mathbb{R}^n$ for continuamente diferenciável podemos escrever,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \frac{d\mathbf{v}}{ds}(s)\, ds$$

e, portanto, se $\mathbf{u}(t)$ for solução de (1), temos

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t (A(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{f}(s))\, ds \tag{2}$$

que escreveremos na forma

$$\mathbf{u}(t) = \varphi(t) + \int_0^t A(s)\mathbf{u}(s)\, ds \tag{3}$$

onde

$$\varphi(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(s)\, ds.$$

Por outro lado, verificamos que, se $\mathbf{u}(t)$ for uma solução contínua da equação (3), concluímos que $\mathbf{u}(t)$ é também continuamente diferenciável, pois será integral primitiva de funções contínuas. Derivando a equação (3) concluímos ainda que $\mathbf{u}(t)$ é solução do problema de Cauchy (1), pois $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

Resumindo, podemos dizer que a resolução continuamente diferenciável de (1) *é equivalente à resolução contínua de* (3).

Passaremos então, daqui por diante, a analisar a equação (3) no espaço vetorial

$E =$ espaço vetorial das funções contínuas $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}:[0, R] \to \mathbb{R}^n$.

Se denotarmos agora pelo símbolo T a operação que transforma linearmente funções $\mathbf{v} \in E$ em funções $T\mathbf{v} \in E$ de acordo com

$$T\mathbf{v} \quad (t) = \int_0^t A(s)\mathbf{v}(s)\, ds \tag{4}$$

podemos escrever a equação (3) na forma

$$\mathbf{u} = \varphi + T\mathbf{u} \tag{5}$$

ou

$$(1 - T)\mathbf{u} = \varphi \tag{6}$$

(Verifique estas afirmações.)

Desta forma, o problema original se torna equivalente a uma equação do tipo (6) no espaço vetorial E onde $\varphi \in E$ é dada e $\mathbf{u}$ é a incógnita a ser calculada.

Sob o ponto de vista operacional, o problema (1) torna-se agora equivalente à obtenção de uma operação $S: E \to E$, inversa de $1 - T$, e é por este caminho que buscaremos a sua solução.

Observe que, se S é inversa de $1 - T$ então:

1. $(1 - T)S\varphi = \varphi$ para todo $\varphi \in E$ (inversa à direita)
2. $S(1 - T)\mathbf{u} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in E$ (inversa à esquerda)

Significando respectivamente que **1.** existe solução $S\varphi$ para toda equação (6) e **2.** a solução $S\varphi$ é única (verifique).

A vantagem da formulação do problema (1) em termos do operador linear T no espaço E é que, à semelhança do que fizemos no capítulo 3 com os operadores D e Δ, podemos desenvolver um cálculo operacional que sugere expressões formais para a solução que, de outra maneira, seriam difíceis obter.

É importante notar que para equações de coeficientes constantes é suficiente uma *álgebra* operacional, mas, para o tratamento de equações de coeficientes variáveis é necessário um *cálculo* operacional que estende a álgebra polinomial com a inclusão de operações limite. Por exemplo, neste caso usando uma analogia à série geométrica

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Somos levados a procurar a solução do nosso problema na forma

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

onde (tal como antes) as potências T^k são definidas como o operador resultante da aplicação k vezes sucessivas de T e $T^0 =$ identidade.

Não é óbvio, naturalmente, que esta expressão para S está bem definida para todo $\varphi \in E$ e muito menos que S é realmente um operador inverso de $1 - T$.

Entretanto, esta sugestão por si própria já nos fornece um roteiro a seguir para a demonstração do teorema e que consistirá dos seguintes passos: mostrar que (*a*) S é bem definido. (*b*) S é inverso à direita para $1 - T$ e (*c*) S é inverso à esquerda de $1 - T$.

Antes da demonstração rigorosa destes fatos utilizaremos o formalismo apresentado para analisarmos, a título de exemplo, o problema (1) com $\mathbf{f} \equiv 0$ e A constante. Neste caso, $\varphi(x) = \mathbf{u}_0$ (constante) e o operador T atua da seguinte maneira:

$$T\mathbf{u}_0 \quad (t) = \int_0^t A\mathbf{u}_0 \, ds = t\, A\mathbf{u}_0$$

$$T^2\mathbf{u}_0 \quad (t) = \int_0^t A(sA\mathbf{u}_0)\, ds = \frac{t^2}{2} A^2\mathbf{u}.$$

e, indutivamente,

$$T^k\mathbf{u}_0 \quad (t) = \int_0^t A(T^{k-1}\mathbf{u}_0 \quad (s))\, ds = \frac{t^k}{k!} A^k\mathbf{u}_0$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \mathbf{u}_0 = S\mathbf{u}_0(t)$$

A matriz $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ é solução matricial fundamental do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU \\ U(0) = I \end{cases}$$

Devido à expressão que define $U(t)$ e a propriedade 11 da Secção 4.2.1 ($U(t+s) = U(t)U(s)$) é natural definir a notação exponencial para esta matriz

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = e^{tA}$$

Observe que se $\varphi(t)$ não for constante a expressão não é tão simples como a que foi obtida. Neste caso (problema não homogêneo) podemos dispor da fórmula de Green e escrever a solução de (1), com A constante, como

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{f}(s)\, ds$$

que é inteiramente análoga à expressão para a equação escalar.

EXERCÍCIOS

1. Obtenha e^{tD} no caso em que D é matriz diagonal $n \times n$.
2. Se $PAP^{-1} = D$ (diagonal) mostre que
$$e^{tA} = P^{-1} e^{tD} P$$
3. Com base nos exercícios 1 e 2 escreva a solução do oscilador harmônio com $c^2 - 4km \neq 0$, quando colocado na forma de um sistema.
4. Escreva a equação de *Airy* na forma de um sistema e obtenha sua solução em série pelo método desta secção.
5. Mostre que se A e B comutam, então, $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
6. Se $A = \lambda I + N$, onde $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, calcule e^{tA}.

   Observe que λI e N comutam, e que N é nilpotente, isto é, $N^m = 0$ para algum m (qual?). Neste caso, $e^{tA} = \sum^{m} \frac{t^k}{k!} N^k$.
7. Diagonalize a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (simétrica!) e resolva $\dfrac{dV}{dt} = AV$ por meio da exponencial e^{tA}. Obtenha a solução geral de $\dfrac{dv}{dt} = Av + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$

Lema O operador $S: E \to E$ linear,

1. é bem definido pelo limite $S\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} S^n\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k\varphi \quad (t)$
2. $(1 - T)S\varphi = \varphi$ para todo $\varphi \in E$
3. $S(1 - T)\mathbf{u} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in E$.

Demonstração:

A demonstração de convergência será feita basicamente através do método dos majorantes de Cauchy e do teste de comparação de Weierstrass embora utilizemos aqui uma notação mais próxima da análise funcional moderna.

Definiremos inicialmente módulo de um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ por $\| \alpha \| = \max_{1 \le i \le n} | \alpha_i |$ e a norma de um elemento $\mathbf{v} \in E$ por $\| \mathbf{v} \|_0 = \max_{0 \le t \le k} \| \mathbf{v}(t) \|$.

Definiremos também módulo de uma matriz A por $\| A \| = \max_{1 \le i,\, j \le n} | A_{ij} |$ e norma de $A(t)$ por $\| A \|_0 = \max_{0 \le t \le k} \| A(t) \|$*.

Observamos agora que, para cada componente i de $T\mathbf{v}(t)$ temos

$$| (T\mathbf{v})_i(t) | = \left| \int_0^t \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(s)\mathbf{v}_j(s)\, ds \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_0^t | A_{ij}(s) | \; | \mathbf{v}_j(s) | \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \| A \|_0 \sum_j \int_0^t | \mathbf{v}_j(s) | \, ds \leqslant n \| A \|_0 \int_0^t \| \mathbf{v}(s) \| \, ds$$

Fazendo $a = n \| A \|_0$ e tomando $\| T\mathbf{v}(t) \| = \max_i | (T\mathbf{v})_i(t) |$ temos

$$\| T\mathbf{v}\ (t) \| \leqslant a \int_0^t \| \mathbf{v}(s) \| \, ds$$

e

$$\| T^2\mathbf{v}\ (t) \| = \| T(T\mathbf{v})\ (t) \| \leqslant a \int_0^t \| T\mathbf{v}\ (s) \| \, ds \leqslant a^2 \int_0^t \int_0^{s_1} \| \mathbf{v}\ (s_2) \| \, ds_2 \, ds_1$$

e, indutivamente,

$$\| T^k\mathbf{v}\ (t) \| \leqslant a^k \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{k-1}} \| \mathbf{v}(s_k) \| \, ds_k \ldots ds_1 \leqslant$$

$$\leqslant a^k \int_0^R \int_0^s \cdots \int_0^{s_{k-1}} \| \mathbf{v} \|_0 \, ds_k \ldots ds_1$$

---

* O leitor pode verificar que os "módulos" e "normas" assim definidos são normas nos espaços vetoriais correspondentes.

e, finalmente, integrando o termo à direita, temos

$$\| T^k \mathbf{v}\ (t) \| \leqslant \frac{a^k R^k}{k!} \| \mathbf{v} \|_0 \tag{7}$$

a. Pelo teste de comparação de Weierstrass concluímos imediatamente que as séries

$$(S^m \mathbf{v})_i\ (t) = \sum_{k=0}^{m} (T^k \mathbf{v})_i\ (t)$$

convergem uniformemente para funções contínuas em $[0, R]$ e denotaremos a n-upla destes limites por

$$S\mathbf{v}\ (t) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} T^k \mathbf{v}\ (t) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \mathbf{v}\ (t)$$

Fica assim demonstrada a existência do operador S.

b. Utilizando a aproximação $S^m \varphi = \sum_{k=0}^{m} T^k \varphi$ e, calculando, temos

$$\begin{aligned}(1 - T)\, S\varphi &= (1 - T)\, (S^m \varphi + S\varphi - S^m \varphi) = \\ &= (1 - T)\, S^m \varphi + S\varphi - S^m \varphi - T\,(S\varphi - S^m \varphi) = \\ &= \varphi - T^{m+1} \varphi + S\varphi - S^m \varphi - T\,(S\varphi - S^m \varphi)\end{aligned}$$

Pela desigualdade (7) verificamos que, para $m \to \infty$

$$T^{m+1} \varphi\ (t) \to 0$$
$$T\,(S\varphi - S^m \varphi)\ (t) \to 0$$

e, pelo item *a.* anterior

$$S\varphi\ (t) - S^m \varphi\ (t) \to 0$$

em que as convergências são todas uniformes em $[0, R]$.
Portanto, $(1 - T)\, S\varphi = \varphi$.

c. Calculando, temos

$$S^m\ (1 - T)\mathbf{u} = \left(\sum_{k=0}^{m} T^k \right) (1 - T)\mathbf{u} = \mathbf{u} - T^{m+1} \mathbf{u}$$

Fazendo $m \to \infty$, pelo que já foi exposto, concluímos que o limite (uniforme em $[0, R]$) da equação anterior nos dá

$$S\ (1 - T)\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Fica assim demonstrado o Lema e é natural portanto que seja utilizada a notação

$$S = (1 - T)^{-1}$$

■

Observações:

a. O teorema de existência e unicidade para soluções do problema (1) fica automaticamente demonstrado com o Lema pois, dada a equação $(1 - T)\mathbf{u} = \varphi$, $\mathbf{u} = S\varphi$ será solução; se $\mathbf{v}$ é uma outra solução da equação, aplicamos S e teremos

$$S(1 - T)\mathbf{v} = S\varphi$$

Como S é inverso à esquerda, $S(1 - T)\mathbf{v} = \mathbf{v}$, de onde $\mathbf{v} = S\varphi = \mathbf{u}$. Ou seja, $\mathbf{u} = S\varphi$ é a *solução única* do problema (1).

b. Este teorema abrange naturalmente o problema de Cauchy para equações escalares lineares de ordem n com coeficientes contínuos.

c. Consideremos agora o problema (1) no intervalo aberto à direita $[0, b)$. Pelo teorema anterior existe solução única em qualquer intervalo $[0, R]$, $0 < R < b$. Portanto, se $R_2 > R_1$, é óbvio que a solução no intervalo, $[0, R_2]$ é idêntica à solução no intervalo $[0, R_1]$. Isto significa que podem estender a solução em todo o intervalo $[0, b)$. Este argumento vale também para o caso $b = \infty$.

d. O teorema de existência e unicidade anterior também vale para o intervalo (a, b) com $a < 0 < b$. De fato, existe $\mathbf{v}(t)$ solução de (1) em $[0, b)$. Tomemos agora $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(-t)$ e observen os que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(-t)$ é solução do problema (1) em $(a, 0]$ se $\mathbf{w}(t)$ for solução de

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{w}}{dt} = B(t)\mathbf{w} + \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{w}(0) = u_0 \end{cases}$$

em $[0, -a)$, onde $B(t) = -A(-t)$ e $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(-t)$, e são contínuas.

Tomando $\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}(t) \text{ para } t \geqslant 0 \\ \mathbf{w}(-t) \text{ para } t \leqslant 0 \end{cases}$ obtemos uma solução continuamente diferenciável de (1) em (a, b) (verifique).

e. A existência de soluções do problema de Cauchy (1) válida para todo intervalo de definição da equação é uma particularidade das equações *lineares* que não ocorre no caso geral (veja por exemplo a Equação de Riccatti do Capítulo 2).

f. Em geral, os dados do problema (1) dependem de outros parâmetros ou então não têm os seus valores especificados exatamente quando são obtidos de um modelo concreto. Por exemplo, as medidas de m, c e k no oscilador harmônico são apenas aproximações dos valores reais. É portanto de grande interesse, teórico e prático, analisar a dependência da solução do problema (1) relativa a estas variações.

Supondo que A, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{u}_0$ dependem do parâmetro $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, então $A(t, \boldsymbol{\lambda})$, $\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\lambda})$ e $\mathbf{u}_0(\boldsymbol{\lambda})$ serão funções deste parâmetro, assim como a própria solução $\mathbf{u}(t, \boldsymbol{\lambda})$.

Consideraremos apenas o caso regular em que as funções $A_{ij}(t, \boldsymbol{\lambda})$, $f_i(t, \boldsymbol{\lambda})$ e $u_{0i}(\boldsymbol{\lambda})$ dependem continuamente de $\boldsymbol{\lambda}$ onde $\| \boldsymbol{\lambda} \| \leqslant \rho$.

Basta observarmos agora que a desigualdade (7) do Lema é satisfeita se tomarmos

$$\max_{0 \leq t \leq R} \| \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\lambda}) \| = \| \mathbf{v} \|_\infty$$

com $\| \boldsymbol{\lambda} \| \leqslant \rho$, e escrevemos

$$\| T_{\mathbf{v}}^k(t, \boldsymbol{\lambda}) \| \leqslant \frac{a^k R^k}{k_1} \| \mathbf{v} \|_\infty$$

Podemos assim aplicar o teste de comparação de Weierstrass e concluir que o limite $S(\mathbf{v}(t, \boldsymbol{\lambda})$ é uma função contínua em t e $\boldsymbol{\lambda}$.

Não é difícil estender este argumento para concluirmos que a diferenciabilidade contínua de $A(t, \boldsymbol{\lambda})$, $\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\lambda})$ e $u_0(\boldsymbol{\lambda})$ com relação a $\boldsymbol{\lambda}$ é herdada por $\mathbf{u}(t, \boldsymbol{\lambda})$. Este assunto será tratado com maior grau de generalidade no Capítulo 5.

O caso em que a dependência com relação a um parâmetro não é contínua (por exemplo na equação do oscilador harmônico com massa m muito pequena) é de grande importância em vários modelos físicos e biológicos. A teoria de perturbações singulares que trata especificamente destes problemas pode ser estudada na referência BENDER, C.M. & Orszag, S.A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York, McGraw-Hill International Student Edition, 1978.

PROJETO 1 DIFUSÃO

Considere um tubo longo contendo uma determinada substância em difusão no meio principal que preenche o tubo e que este processo se verifica em uma região delimitada entre as secções S_0 e S_n (ver Figura 4.2).

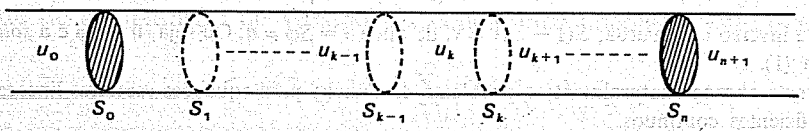


Figura 4.2

Se as secções S_k estão pouco separadas, considere u_k a concentração em média da substância entre S_{k-1} e S_k.

Pela Lei de Fick, a taxa de difusão desta substância através de uma destas secções S_k é proporcional à diferença das concentrações médias destes segmentos adjacentes.

Então, o processo é considerado contínuo no tempo e discreto no espaço, o que se costuma chamar de semidiscretização do problema. (Já fizemos isto antes com a corda vibrante!)

Desta forma, temos

$$\frac{du_k}{dt} = \alpha(u_{k+1} - u_k) + \alpha(u_{k-1} - u_k)$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{du_k}{dt} = u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = \Delta^2 u_{k-1}$$

e o sistema de equações toma a forma vetorial

$$\frac{du}{dt} = Au \text{ onde } A = \alpha \begin{pmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz simétrica.}$$

1. Tome o caso $n = 3$, $\alpha = 1$ e resolva o sistema calculando $U(t) = e^{tA}$. Analise $U(t)$ para $t \to \infty$. Suponha que haja uma produção da substância em cada segmento k na taxa de $f_k(t)$ e que antes de S_0 e depois de S_n a concentração seja desprezível (isto é, $u_0 \equiv 0 \equiv u_{n+1}$). Obtenha a solução e observe a simetria da matriz.

2. Suponha agora que S_0 e S_n sejam duas extremidades impermeáveis. Escreva o sistema para este caso e obtenha a solução das equações para $n = 3$.

PROJETO 2 FORÇA DE CORIOLIS E O MOVIMENTO DE UM PONTO MATERIAL

O movimento de um ponto material de massa m nas imediações da superfície terrestre, sob ação apenas da gravidade, quando visto sob um sistema de referência inercial, é descrito pela Segunda Lei de Newton

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g}$$

Se o sistema de referência utilizado para a localização do ponto está fixo na Terra, então a Segunda Lei de Newton deve ser corrigida por forças fictícias, como a "força" de Coriolis resultante da escolha de um sistema não inercial.

Consideremos a "força" de Coriolis resultante do movimento de rotação da Terra, exercida sobre o ponto m na forma $-2m\omega \times \mathbf{v}$, onde ω é o vetor que caracteriza a velocidade angular da Terra, suposta constante.

A equação de movimento que estudaremos será, então

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\omega \times \mathbf{v} + \mathbf{g}$$

que é da forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v} + \mathbf{g}$$

onde A é uma matriz anti-simétrica $A^t = -A$.

Obtenha esta matriz A cujo efeito sobre qualquer vetor $\mathbf{v} \in R^3$ seja equivalente ao produto vetorial $-2\omega \times \mathbf{v}$.

A solução de $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$, escrita como $\mathbf{u}(t) = \exp(tA)\mathbf{u}_0$, nos dá

$$\mathbf{v}(t) = e^{tA}\mathbf{v}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\mathbf{g}\,d\tau \quad \text{ou, com} \quad z = t - \tau$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{tA}\mathbf{v}_0 + \int_0^t e^{zA}\mathbf{g}\,dz$$

A posição $\mathbf{R}(t)$ do ponto material é dada por

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(s)\,ds = \mathbf{R}_0 + \int_0^t e^{sA}\mathbf{v}_0\,ds + \int_0^t \int_0^s e^{zA}\mathbf{g}\,dz$$

substituindo

$$e^{Az} = I + zA + \frac{z^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{z^k}{k!}A^k + \ldots$$

e

$$A\mathbf{v} = -2\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 - \omega \times \left(\mathbf{v}_0 t^2 + \frac{1}{3}\mathbf{g}t^3\right) + \omega x \left\{\omega x \left(\frac{2}{3}\mathbf{v}_0 t^3 + \frac{1}{6}\mathbf{g}t^4\right)\right\} + \ldots$$

Sabendo que $|\omega| \sim 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ podemos tomar como boa aproximação os termos de primeira ordem em A, desprezando os de ordem superior

$$\mathbf{R} \cong \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 - \omega \times \left(\mathbf{v}_0 t^2 + \frac{1}{3}\mathbf{g}t^3\right)$$

Portanto, em primeira ordem, o desvio da posição de um ponto material por influência da força de Coriolis é

$$\mathbf{D} = -\omega \times \left(\mathbf{v}_0 t^2 + \frac{1}{3}\mathbf{g}t^3\right)$$

O movimento de uma partícula de massa m e carga q em um campo elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ é descrito pela equação vetorial $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$ que, para o caso de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ constantes, tem a mesma forma da equação acima (c é a velocidade da luz). Analise melhor este problema e a aproximação feita, considerando o termo seguinte da expansão*.

---

* Os vários aspectos deste problema podem ser vistos em ARTSIMOVICH, L. & Lukyanov, S. Yu. *The Motion of Charged Particles in Electromagnetic and Magnetical Fields*. Moscou, Mir, 1980.

VAN ALLEN, F. Radiations Belts around the Earth. USA, *Scientific American*, March, 1959.

I. M. E. C. C.
BIBLIOTECA

4.6 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES — RESOLUÇÃO ALGÉBRICA

Nas secções anteriores estudamos o Teorema de Existência e Unicidade para soluções do problema de Cauchy, para a equação diferencial matricial de primeira ordem

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U,\ U(0) = I$$

que, pelo menos sob o ponto de vista teórico, resolve completamente qualquer sistema de equações diferenciais ordinárias lineares.

Entretanto, o processo iterativo fornecido pelo Teorema de Existência produz a solução $U(t)$ em forma de uma série infinita, mesmo no caso de coeficientes constantes que, como veremos a seguir, pode ser resolvido por operações algébricas (finitas) e funções elementares. Portanto, é interessante tentar obter um processo de resolução destes sistemas de coeficientes constantes diretamente por um método algébrico finito, sem a necessidade do cálculo de uma série infinita, que é sempre um problema a mais do ponto de vista numérico.

Para exemplificar a situação, analisemos o sistema de equações diferenciais para as correntes da rede *RLC* da Figura 4.3:

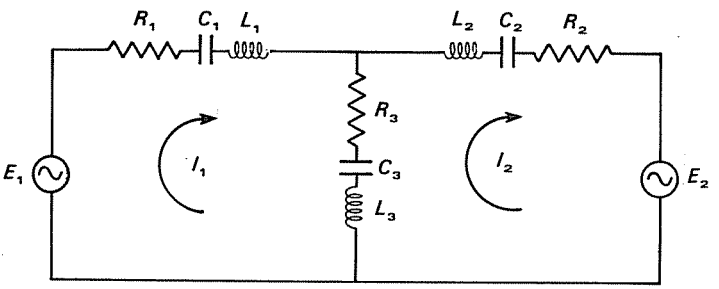


Figura 4.3

Escolhendo as duas correntes em cada malha, tal como na figura, a Lei dos Nós é automaticamente satisfeita. Analisemos agora as quedas de tensão em cada circuito para verificar a Lei das Malhas de Kirchhoff:

A queda total de tensão na malha 1 fornece

$$R_1 I_1 + \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} I_1\,ds + L_1\frac{d}{dt}I_1 + R_3(I_1 - I_2) + \frac{1}{C_3}\int_{t_0}^{t}(I_1 - I_2)ds +$$

$$+ L_3\frac{d}{dt}(I_1 - I_2) = E_1$$

de onde vem a equação, após a derivação

$$\left[(L_1 + L_3)D^2 + (R_1 + R_3)D + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right]I_1 + \left[-L_3D^2 - R_3D - \frac{1}{C_3}\right]I_2 = \frac{dE_1}{dt} \quad (1)$$

A queda de tensão da malha 2 nos dá, analogamente

$$\left[-L_3D^2 - R_3D - \frac{1}{C_3}\right] I_1 + \left[(L_2 + L_3)D^2 + (R_2 + R_3)D + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right] I_2 = \frac{dE_2}{dt} \quad (2)$$

Do ponto de vista matricial podemos escrever

$$(LD^2 + RD + S)\, I = \frac{dE}{dt}$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} L_1 + L_3 & -L_3 \\ -L_3 & L_2 + L_3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3} \\ -\frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

L = matriz de indutância
R = matriz de resistência
S = matriz de capacitância

ou podemos simplesmente escrever

$$Z(D)Y = \frac{dE}{dt} = F$$

onde $Z(D)$ é uma matriz cujos elementos são operadores diferenciais ordinários lineares e de coeficientes constantes

$$Z_{ij}(D) = L_{ij}D^2 + R_{ij}D + S_{ij}$$

Por exemplo

$$Z_{11}(D) = (L_1 + L_3)\, D^2 + (R_1 + R_3)\, D + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Portanto, para estudarmos um sistema como este fornecido pelo circuito RLC, o primeiro passo é desacoplar as equações, isto é, obter uma única equação para cada função incógnita em separado, através de substituições e combinações lineares das equações.

Para um sistema de duas incógnitas e de ordem baixa isto não é difícil de se obter por tentativas. Entretanto, se quisermos analisar o problema teórico e obter uma solução explícita geral, devemos então desenvolver um método sistemático de desacoplamento das equações.

Observe que o problema é muito semelhante ao problema algébrico de diagonalizar um sistema de equações algébricas lineares $Ax = b$.

Como sabemos, os elementos da matriz $Z(D)$ fazem parte de uma álgebra de operadores diferenciais polinomiais, onde as operações de soma e multiplicação se realizam tal como na álgebra dos polinômios.

Portanto, no que depender destas operações podemos imitar em $Z(D)$ exatamente o que se faz em qualquer outra matriz de coeficientes numéricos. O método de Cramer não nos é favorável pois, como o leitor deve se lembrar, a obtenção de matriz inversa envolve o cálculo do inverso do determinante e esta operação não tem similares na nossa álgebra dos polinômios. Utilizar a operação inversa obtida no final da Secção 4.4 poderia resolver a questão mas optaremos por outro caminho.

Podemos contornar este problema facilmente, realizando apenas parte da regra de Cramer.

Lembremos que a inversa de uma matriz A é obtida tomando-se as transpostas das matrizes dos adjuntos e dividindo-as por $\det A$. O adjunto ij de A, $A^{i/j}$, é o determinante da matriz, obtida depois de retirarmos de A a linha i e a coluna j, multiplicando o resultado por $(-i)^{i+j}$.

Também podemos calculá-lo por $\dfrac{\partial}{\partial A_{ij}}(\det A) = A^{i/j}$. (Verifique!) Assim, a matriz $\widetilde{A}$, $\widetilde{A}_{ij} = A^{j/i} = \dfrac{\partial}{\partial A_{ji}}(\det A)$ é tal que $\widetilde{A}A = (\det A)I$ e

$$\left(\frac{1}{\det A}\right)\widetilde{A} = A\left(\frac{1}{\det A}\widetilde{A}\right) = I \quad \text{ou seja,} \quad \frac{1}{\det A}\widetilde{A} = A^{-1}$$

Observemos agora que para efetuar o cálculo de $\widetilde{A}$ são utilizadas apenas operações de multiplicação e somas de seus elementos (determinantes) e, neste caso, podemos repetir exatamente as operações análogas na matriz operacional $Z(D)$ para obter a sua adjunta operacional $\widetilde{Z}(D)$, resultando

$$\widetilde{Z}(D)\,Z(D) = \det Z(D) \cdot \text{matriz identidade}$$

Mas observe que esta igualdade operacional significa que se aplicamos $\widetilde{Z}(D)$ no sistema $Z(D)Y = F$, obteremos n equações desacopladas com o mesmo operador diferencial: $\det Z(D)$.

$$\widetilde{Z}(D)\,(Z(D)Y) = \widetilde{Z}(D)\,F$$

$$\det Z(D)\,Y = \widetilde{Z}(D)\,F$$

$$\det Z(D)\,Y_k = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{Z}_{kj}(D)\,F_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Reuniremos estas conclusões no teorema que se segue.

Teorema Se $Z(D)$ é uma matriz $n \times n$ onde cada elemento $Z_{ij}(D)$ é um operador diferencial polinomial, então toda solução $U = (U_1, \ldots, U_n)$ da equação $Z(D)u = 0$ satisfaz o sistema desacoplado

$$\det Z(D)\,u_k = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{Z}_{kj}(D)\,F_j$$

onde $\widetilde{Z}(D)$ é a matriz adjunta (operacional) de $Z(D)$.

Observe que se $V_1, \ldots, V_n$ são soluções de $\det(Z(D))\,V = 0$, em geral $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$ não é solução de $Z(D)u = 0$, mas $u = \tilde{Z}(D)\,V$ é uma solução e todas soluções são desta forma.

Verifique que se $Z(D) = D - A$, então $\det Z(D)$ é um polinômio operacional de grau n (o polinômio característico de A) e, portanto, o conjunto de funções $K = \{V = (V_1, \ldots, V_n)\colon V_k \in \text{núcleo } \det Z(D)\}$ tem dimensão n^2. (Verifique!) Por outro lado, sabemos que $\dim(\text{núcleo } (Z(D))) = n$. Fica claro por este exemplo particular que nem todas $(V_1, \ldots, V_n) = V$ podem ser soluções de $Z(D)u = 0$.

Entretanto, tomemos $u = \tilde{Z}(D)V$ para $V \in K$ e verificamos que

$$Z(D)u = Z(D)\,\tilde{Z}(D)\,V = (Z(D)\,\tilde{Z}(D))\,V = \det Z(D)\,V = \begin{pmatrix} \det Z(D)\,V_1 \\ \vdots \\ \det Z(D)\,V_n \end{pmatrix} = 0$$

Portanto, $\tilde{Z}(D)$ transforma K no conjunto de soluções de $Z(D)u = 0$.

EXEMPLO 1

Analisemos o exemplo da rede de circuitos *RLC* da Figura 4.3.
A adjunta da matriz Z, 2×2, é facilmente obtida

$$\begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} = \tilde{Z}; \qquad \tilde{Z}\,Z = (\det Z)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, portanto, o desacoplamento do sistema é da forma

$$\det Z(D)\,Y = \tilde{Z}(D)\,\frac{dE}{dt}$$

onde

$$\begin{aligned}
\det Z(D) = {} & [(L_1 + L_3)(L_2 + L_3) - L_3^2]\,D^4 + \\
& + [(L_1 + L_3)(R_2 + R_3) + (R_1 + R_3)(L_2 + L_3) - 2L_3R_3]\,D^3 + \\
& + \left[(L_1 + L_3)\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) + (R_1 + R_3)(R_2 + R_3) + (L_2 + L_3)\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right) - \left(2\frac{L_3}{C_3} + R_3^2\right)\right] D^2 + \\
& + \left[(R_1 + R_3)\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)(R_2 + R_3) - 2\frac{R_3}{C_3}\right] D + \\
& + \left[\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) - \frac{1}{C_3}\right]
\end{aligned}$$

Desta maneira, dispomos de um processo sistemático para o desacoplamento de sistemas de equações inteiramente baseado na Álgebra Linear. Tente desacoplar este sistema por tentativas sem a notação operacional!

De acordo com o que desenvolvemos no capítulo anterior, a solução geral de $\det Z(D)u_k = 0$, depende somente do polinômio algébrico $\det Z(\lambda)$. ■

EXEMPLO 2

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} + u_1 + \dfrac{du_2}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2u_1}{dt^2} - u_1 + \dfrac{d^2u_2}{dt^2} + u_2 = 0 \end{cases}$$

que na forma operacional matricial pode ser escrito como

$$\begin{cases} Du_1 + u_1 + Du_2 = 0 \\ D^2u_1 - u_1 + D^2u_2 + u_2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (1+D)u_1 + Du_2 = 0 \\ (D^2-1)u_1 + (D^2+1)u_2 = 0 \end{cases}$$

onde

$$Z(D) = \begin{pmatrix} 1+D & D \\ D^2-1 & D^2+1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{Z}(D) = \begin{pmatrix} D^2+1 & -D \\ 1-D^2 & 1+D \end{pmatrix}$$

$$\det Z(D) = (D^2+1)(D+1) - D(D^2-1) = (D+1)^2$$

$$\det Z(\lambda) = (\lambda+1)^2$$

que tem a raiz dupla $\lambda = -1$.

Portanto, a solução geral de $\det Z(D)x = 0$ é dada por

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t}$$

Entretanto, *não* é qualquer função do tipo

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} + a_2 te^{-t} \\ b_1 e^{-t} + b_2 te^{-t} \end{pmatrix} \text{ que satisfaz } Z(D)\mathbf{u} = 0$$

Para a escolha apropriada das constantes a_1, a_2, b_1, b_2 tomamos então $\tilde{Z}(D)\mathbf{u}$ e verificamos que

$$Z(D)\,(\tilde{Z}(D)\mathbf{u}) = Z(D)\,\tilde{Z}(D)\mathbf{u} = \det Z(D)\mathbf{u} = 0$$

Portanto, $\tilde{Z}(D)\mathbf{u} = \mathbf{u}$ é solução geral de $Z(D)\mathbf{u} = 0$. (Verifique.)

Optaremos por outro método equivalente. Faremos

$Z(D)\mathbf{u} = 0$ e obteremos duas relações entre os coeficientes

$$\begin{cases} b_2 = 0 \\ b_1 = a_2 \end{cases} \quad \text{(Verifique!)}$$

e portanto

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t} \\ a_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$$

■

Resumindo: A solução geral de $Z(D)\mathbf{u} = 0$ é obtida por meio das seguintes etapas:

1. Resolução completa de $\det Z(D)x = 0$, isto é, cálculo de uma base $x_1, \ldots, x_m$ para $N(\det Z(D))$.

2. Cálculo da matriz dos coeficientes C, $n \times m$: tomamos $Z(D)C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$ e obtemos um sistema de equações para os coeficientes C_{kj} (sistema subdeterminado!) que resolvido nos dá a solução geral, $\mathbf{u} = C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ ou então tomamos $\mathbf{u} = \tilde{Z}(D)C\mathbf{x}$.

Este método geral é puramente algébrico e nos fornece algumas informações importantes sem a necessidade da obtenção da solução geral. A mais importante destas se refere à estabilidade do sistema e seu regime permanente de funcionamento.

A própria estrutura das soluções evidenciada pelo método apresentado nos leva à conclusão de que o sistema $Z(D)\mathbf{u}=0$ será assintoticamente estável (onde $Z_{ij}(D)$ são operadores diferenciais polinomiais de coeficientes constantes) se todas as raízes de $\det Z(\lambda)=P(\lambda)$ se localizarem no semi-plano

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$$

A matriz de transferência é obtida para cada freqüência ω_0, resolvendo o seguinte sistema

$$Z(D)\mathbf{v}_0 e^{i\omega_0 t} = \mathbf{a}e^{i\omega_0 t}$$
$$e^{i\omega_0} Z(i\omega_0)\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}e^{i\omega_0 t}$$
$$Z(i\omega_0)\,\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{v}_0 = Z^{-1}(i\omega_0)\,\mathbf{a}$$

de onde temos

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\det Z(i\omega_0)}\,\widetilde{Z}(i\omega_0)\mathbf{a}$$

e

$$H(i\omega_0) = \frac{\widetilde{Z}(i\omega_0)}{\det Z(i\omega_0)}$$

Observe que as componentes de $H(i\omega_0)$ são funções racionais de $i\omega_0$

$$R(i\omega_0) = \frac{P(i\omega_0)}{Q(i\omega_0)},\ \text{e grau}\ Q = \text{grau}\ (P+1)$$

e portanto $R(i\omega_0) \to 0$ quando $(\omega_0) \to \infty$.

Observe também que em um sistema A-estável $i\omega_0$ não é raiz de $\det Z(\lambda)=0$. O regime permanente do sistema para uma entrada do tipo

$$\mathbf{E}_0\, e^{i\omega_0 t},\ \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{01} \\ \vdots \\ E_{0n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ é } \mathbf{u}_\infty(t) = \left(\frac{1}{\det Z(i\omega_0)}\,\widetilde{Z}(i\omega_0)\,\mathbf{E}_0\right) e^{i\omega_0 t}$$

4.7 SISTEMAS CONSERVATIVOS — COORDENADAS NORMAIS

Estudaremos agora um método particular de resolução de sistemas de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes que se aplica a inúmeros problemas de oscilações. Iniciaremos pelos exemplos.

EXEMPLO 1

Tomemos o exemplo simples do sistema mecânico linear da Figura 4.4.

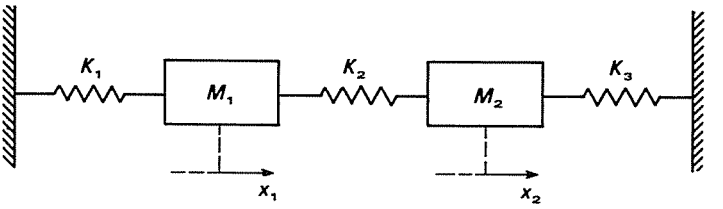


Figura 4.4

onde o repouso do sistema para as massas M_1 e M_2 é tomado como a origem das coordenadas x_1 e x_2. Utilizando a Segunda Lei de Newton, as equações de cada massa serão dadas por

$$\begin{cases} M_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = K(x_2 - x_1) - K_1 x_1 \\ M_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = K(x_1 - x_2) = K_2 x_2 \end{cases}$$

(verifique!) que podem ser escritas na forma

$$(MD^2 + K)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K \\ -K & K_2 + K \end{pmatrix}$$

Observe que M e K são simétricas!

A matriz K é chamada matriz de rigidez e K^{-1} é chamada matriz de flexibilidade.

EXEMPLO 2

Considere agora uma barra elástica tal como na Figura 4.5 e N pontos pré-fixados onde serão aplicadas cargas concentradas e observamos as deflexões.

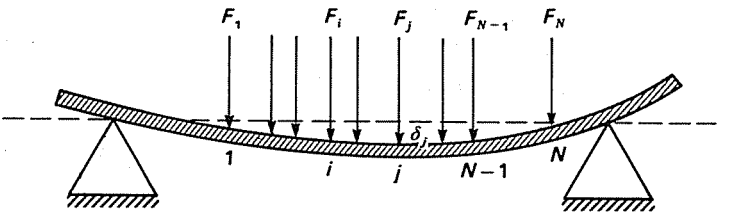


Figura 4.5

Suponha que para uma carga F_j, aplicada na posição j, seja possível observar as deflexões δ_i nas respectivas posições i, e que esta relação seja linear, isto é

$$\delta_i = f_{ij} F_j$$

que pode ser considerado como uma extensão da Lei de Hooke.

Utilizando um princípio de superposição, isto é, se em cada posição j for aplicada uma força F_j, a deflexão total em i será dada por

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{N} f_{ij} F_j$$

A matriz f é chamada *matriz de flexibilidade*, ou *matriz de influências*.

Invertendo f temos $f^{-1} = K$, e

$F = K\tau$; $F_j = \Sigma K_{ji}\tau_i$ onde F_j é a força total aplicada no ponto j (em termos das deflexões), sendo K chamada matriz de rigidez.

Pela Segunda Lei de Newton a vibração do sistema (semidiscretizado) será dada por

$$M_j \frac{d^2\tau_j}{dt^2} = -F_j = -\Sigma K_{ji}\delta_i$$

ou, matricialmente,

$$M\cdot\frac{d^2\tau}{dt^2} = -K\tau \qquad (MD^2 + K)\tau = 0$$

Para estruturas lineares o princípio de reciprocidade de Maxwell garante que a matriz K, e portanto f, é simétrica. (M é diagonal!) Interprete este fato do ponto de vista mecânico.

A matriz M é chamada *matriz inercial*. Este argumento pode ser utilizado para o estudo de estruturas elásticas lineares em geral, incluindo problemas de flexão, tensão e torsão.

Os problemas em que não há dissipação de energia são formulados pela equação matricial

$$(MD^2 + K)\tau = 0$$

onde M e K são simétricas e M é diagonal.

Se houver dissipação por viscosidade, tal como no oscilador harmônico, então o sistema tomará a forma

$$(MD^2 + CD + K)\tau = 0$$

onde C é a matriz de viscosidade, que nem sempre é simétrica.

Esta equação pode ser reduzida, pelo método utilizado em equações de circuitos, a uma equação matricial do tipo $\frac{dU}{dt} = AU$ $(2n \times 2n)$.

Estas equações são de largo uso no estudo de vibrações de estruturas mecânicas e problemas aerodinâmicos. O leitor interessado no assunto poderá consultar outras obras*. ■

Dada a importância dos problemas mecânicos mencionados acima, analisaremos com mais atenção o caso particular das equações do tipo

$$(MD^2 + K)v = 0$$

onde M e K são matrizes $n \times n$ simétricas e positivas definidas.

Lembremos inicialmente da teoria elementar de matrizes que se S for simétrica então todos os seus autovalores são reais e, além disto, é positiva definida se, e somente se, todos os seus autovalores são maiores do que zero.

Se S for simétrica, também sabemos que os seus autovetores relativos a autovalores distintos são ortogonais e geram todo espaço $\mathbb{R}^n$. Isto significa que podemos obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada de autovetores de S. Este fato importantíssimo da

---

* FUNG, Y.C. *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. New York, Wiley, 1955.

PIPES, L. & Hovanessian, S. *Matrix Computer Methods in Engineering*. New York, Wiley, 1969.

VON KARMAN, T. & Biot, M.A. *Métodos Matemáticos para a Engenharia*. Rio de Janeiro, Kosmos, 1948.

Álgebra Linear nenhum estudante de Matemática pode deixar de saber, e qualquer livro razoável sobre o assunto traz estas informações. Portanto, tomando $\beta_1, \ldots, \beta_n$, esta base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ (isto é, $\langle \beta_k, \beta_j \rangle = \delta_{kj}$; $S\beta_k = \lambda_k \beta_k$) e construindo a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

cuja k-ésima coluna é formada pelas coordenadas de β_k, verificamos que

$$SQ = Q\Delta, \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

e $Q^tQ = I$, de onde $Q^tSQ = \Delta$.

Tomemos inicialmente um exemplo em que $M = I$, e seja Q a matriz cujas colunas formam uma base ortonormal de autovetores de K.

Então, a equação

$$D^2\mathbf{v} + K\mathbf{v} = 0$$

pode ser escrita como

$$D^2\, QQ^t\mathbf{v} + KQQ^t\mathbf{v} = 0$$

ou, multiplicando por Q^t à esquerda

$$D^2\,(Q^t\mathbf{v}) + (Q^tKQ)\,(Q^t\mathbf{v}) = 0$$

Tomando $\mathbf{u} = Q^t\mathbf{v}$, este sistema toma a forma desacoplada

$$D^2\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} = 0; \qquad \Delta = Q^tKQ$$

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} = -\lambda_k u_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

que pode ser resolvido separadamente e, supondo $\lambda_k > 0$, a sua solução geral será

$$u_k = a_k \cos \omega_k t + b_k \operatorname{sen} \omega_k t; \qquad \omega_k^2 = \lambda_k$$

ou

$$u_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2} \left\{ \frac{a_k}{(a_k^2 + b_k^2)^{1/2}} \cos \omega_k t + \frac{b_k}{(a_k^2 + b_k^2)^{1/2}} \operatorname{sen} \omega_k t \right\}$$

$$u_k = C_k \operatorname{sen}(\omega_k t + \alpha_k)$$

onde $C_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$, $\operatorname{sen} \alpha_k = \dfrac{a_k}{C_k}$, $\cos \alpha_k = \dfrac{b_k}{C_k}$.

Se algum $\lambda_k = 0$ (então K é apenas semidefinida)

$$u_k = a_k t + b_k$$

e tem um movimento de translação com velocidade constante.

Se algum $\lambda_k < 0$ (então K é indefinida) e

$$u_k = a_k e^{t(-\lambda_k)1/2} + b_k e^{-t(-\lambda_k)1/2}$$

Portanto, em problemas de vibração em que o movimento é oscilatório, é razoável esperar que K seja positiva definida.

As variáveis $\{\mathbf{u}_k\}$ são chamadas *coordenadas normais* e representam o movimento oscilatório na forma mais simples, e ω_k ($\lambda_k > 0$) são chamadas *freqüências naturais* ou freqüências fundamentais de vibração.

A solução nas coordenadas originais pode ser obtida na forma

$$\mathbf{v} = Q\mathbf{u}, \text{ com } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) \\ \vdots \\ C_n \operatorname{sen}(\omega_n t + \alpha_n) \end{pmatrix}$$

ou seja

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} C_k \operatorname{sen}(\omega_k t + \alpha_k)\, \beta_k$$

Podemos interpretar a solução como superposição de oscilações nas freqüências naturais, nas direções dos autovalores β_k, que são chamadas *modos normais de vibração*.

Tomemos um exemplo ilustrativo.

EXEMPLO 3

Suponha um pêndulo triplo acoplado como na Figura 4.6, onde as hastes são de mesmo comprimento ℓ, rígidas, sem massa apreciável comparada com m, e as molas, obedecendo à Lei de Hooke, lineares para pequenas amplitudes de oscilação.

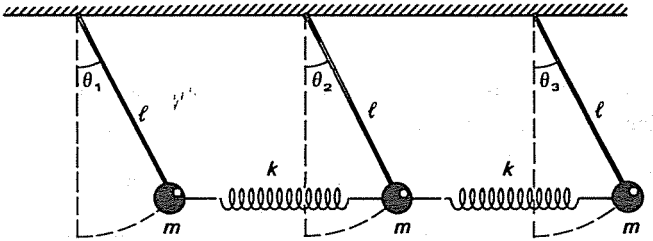


Figura 4.6 Sistema de pêndulo

Utilizando a Segunda Lei de Newton em cada massa e considerando não apenas a força da gravidade, mas a força elástica de interação transmitida pelas molas, temos para o pêndulo linear as equações

$$m\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = mg\theta_1 + k\ell(\theta_1 - \theta_2)$$

$$m\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = mg\theta_2 + k\ell(\theta_2 - \theta_1) + \ell k(\theta_2 - \theta_3)$$

$$m\frac{d^2\theta_3}{dt^2} = mg\theta_3 + k\ell(\theta_3 - \theta_2)$$

que podem ser escritas matricialmente

$$(MD^2 + K)\theta = 0$$

$$M = m\ell \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} mg + k\ell & -k\ell & 0 \\ -k\ell & mg + 2k\ell & -k\ell \\ 0 & -k\ell & mg + k\ell \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

(Observe a simetria de K!) ou

$$(D^2 + M^{-1}K)\,\theta = 0$$

$$M^{-1}K = \begin{pmatrix} g/\ell + k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & g/\ell + 2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & g/\ell + k/m \end{pmatrix}$$

Calculando os autovalores de $M^{-1}K$:

$$\det(M^{-1}K - \lambda) = (g/\ell - \lambda)\,(g/\ell + k/m - \lambda)\,(g/\ell + 3k/m - \lambda) = 0; \text{ logo}$$

$$\lambda_1 = g/\ell; \quad \lambda_2 = g/\ell + k/m \quad \text{e} \quad \lambda_3 = g/\ell + 3k/m.$$

Os autovetores (ortonormais) correspondentes são

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A oscilação do pêndulo se dá, então, na forma

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{g/\ell}\,t + \alpha_1)v_1 + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{g/\ell + k/m}\,t + \alpha_2)v_2 + C_3 \operatorname{sen}[\sqrt{(g/\ell + 3k/m)}\,t + \alpha_3]v_3$$

As constantes C_1, C_2, C_3 são chamadas *amplitudes* da oscilação e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são chamadas *fases*, sendo arbitrárias e dependentes das condições iniciais.

Observe que o modo de vibração $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se processa com os três pêndulos, oscilando como que solidamente conectados e na freqüência natural mais baixa $(g/\ell)^{1/2}$.

O modo de vibração $\mathbf{v}_2$ se processa com o pêndulo do meio fixado e os laterais em oscilações refletidas (através da linha que passa pelo meio) na freqüência natural intermediária $(g/\ell + k/m)^{1/2}$. Analise o terceiro modo de vibração que oscila na freqüência mais alta.

Como especificar as condições iniciais de tal forma que o sistema oscile apenas em um dos três modos de vibração?

Não é difícil construir um pêndulo como este que acabamos de estudar e, certamente, é muito instrutivo observar o resultado concreto da nossa análise matemática.

Lembre-se, contudo, das hipóteses assumidas: sobre a pequena amplitude da vibração comparada ao comprimento ℓ, sobre o comportamento da mola de acordo com a Lei de Hooke linear e sobre a massa negligenciável das hastes comparada a m, assim como sua rigidez. ■

Voltemos agora ao caso geral em que a equação tem a forma $(MD^2 + K)\mathbf{v} = 0$, onde M é simétrica positiva definida e K é simétrica positiva semidefinida.

Seja

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

a matriz cujas colunas são autovetores ortonormais de M, tal que $MP = P\Delta$, $\Delta = \text{diag}\,(m_1, \ldots, m_n)$, onde m_j são autovetores positivos de M.

Em geral $M^{-1}K$ não é simétrica e, portanto, não podemos repetir o argumento anterior por este meio.

Tomemos então $\Delta^{1/2} = \text{diag}\,(m_1^{1/2}, \ldots, m_n^{1/2})$ e como $M = P\Delta P^t$, verificamos que $(P\Delta^{1/2}\,P^t)\;(P\Delta^{1/2}\,P^t) = P\Delta P^t = M$ $(P^tP = PP^t = I)$ e, portanto, escrevemos $M^{1/2} = P\Delta^{1/2}\,P^t$ para a raiz quadrada (simétrica) positiva definida de M. (Verifique!)

Voltando à equação

$$MD^2\mathbf{v} + K\mathbf{v} = 0$$

$$D^2M^{1/2}M^{1/2}\mathbf{v} + KM^{-1/2}M^{1/2}\mathbf{v} = 0$$

multiplicando à esquerda por $M^{-1/2}$ resulta

$$D^2(M^{1/2}\mathbf{v}) + (M^{-1/2}KM^{-1/2})\,(M^{1/2}\mathbf{v}) = 0$$

que pode ser escrita como

$$D^2\mathbf{w} + S\mathbf{w} = 0 \qquad (\mathbf{w} = M^{1/2}\mathbf{v})$$

onde, agora sim, S é simétrica (verifique!) e, portanto, podemos repetir o argumento anterior.

Suponhamos que os autovetores $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ de S constituam uma base ortonormal $(S\boldsymbol{\beta}_k = \lambda_k\boldsymbol{\beta}_k)$ e formemos a matriz Q cujas colunas são exatamente as coordenadas destes autovetores. Neste caso é fácil ver que $SQ = Q\,\text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $Q^tQ = I$ e $Q^tSQ = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

A equação $D^2\mathbf{w} + S\mathbf{w} = 0$, multiplicada à esquerda por Q^t, pode então ser desacoplada através da variável $\mathbf{u} = Q^t\mathbf{w}$:

$$Q^tD^2\mathbf{w} + Q^tS\mathbf{w} = 0 \Rightarrow D^2Q^t\mathbf{w} + Q^tSQQ^t\mathbf{w} = 0$$

ou

$$D^2\mathbf{u} + \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

e portanto temos

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} + \lambda_k u_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Observando que $\mathbf{u} = Q^t\mathbf{w} = Q^tM^{1/2}\mathbf{v}$, a solução da equação original é dada por

$$\mathbf{v} = M^{1/2}Q\mathbf{u}$$

onde

$$u_k = C_k \,\text{sen}\,(\omega_k t + \alpha_k) \;\text{ com }\; \omega_k^2 = \lambda_k.$$

Podemos observar também que os vetores $\boldsymbol{\beta}_k$ satisfazem as equações

$$M^{-1/2}KM^{1/2}\boldsymbol{\beta}_k = \lambda_k\boldsymbol{\beta}_k \qquad \text{ou} \qquad KM^{-1/2}\boldsymbol{\beta}_k = \lambda_k M(M^{-1/2}\boldsymbol{\beta}_k),$$

o que caracteriza λ_k como *autovalores generalizados de K com relação a M* e $\gamma_k = M^{-1/2}\boldsymbol{\beta}_k$ como seus autovetores generalizados.

As funções

$$T(\mathbf{v}(t)) = \frac{1}{2}\langle M\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}\rangle \qquad \text{e} \qquad U(\mathbf{v}(t)) = \frac{1}{2}\langle K\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$$

são denominadas (respectivamente) *energia cinética* e *energia potencial* da solução $\mathbf{v}(t)$.

Observamos que $E(\mathbf{v}(t)) = T(\dot{\mathbf{v}}) + U(\mathbf{v})$ é constante para cada solução pois, utilizando a simétrica de M e K, temos

$$\frac{d}{dt}E(\mathbf{v}(t)) = \left\langle M\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right\rangle + \left\langle K\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right\rangle = 0$$

É possível verificar também que, na variável $\mathbf{u} = Q^t M^{1/2}\mathbf{v}$, as energias cinética e potencial são desacopladas e constantes para cada modo de vibração (verifique!)

A distribuição da energia entre os modos de uma vibração caracteriza o *timbre* da vibração e depende das condições iniciais.

Modelo 1 VIBRAÇÕES MOLECULARES

O estudo das pequenas vibrações estruturais de uma molécula é importante para o conhecimento das propriedades físico-químicas das substâncias, e da sua interação com excitações de diversos tipos. O conhecimento de suas freqüências naturais e modos de vibração é utilizado na espectroscopia molecular.

Consideremos uma molécula N-atômica (na posição de equilíbrio) tal como na Figura 4.7 e iremos supor que as forças de ligação entre os átomos obedecem a uma relação linear (tal como a Lei de Hooke). Para pequenas deformações da sua configuração, esta força tende a reconstituí-la e, com isto, temos um sistema perfeitamente elástico. O movimento geral deste sistema é descrito pelos vetores $\mathbf{R}_k(t) \in \mathbb{R}^3$ que fornecem a posição de cada átomo (com relação a um referencial) e pode ser também descrito através de um vetor $\mathbf{R}(t)$ em R^{3N}, como, por exemplo, se $N = 3$, $\mathbf{R}(t) = (R_{11}(t), R_{12}(t), R_{13}(t), R_{21}(t), R_{22}(t), R_{23}(t), R_{31}(t), R_{32}(t), R_{33}(t))$.

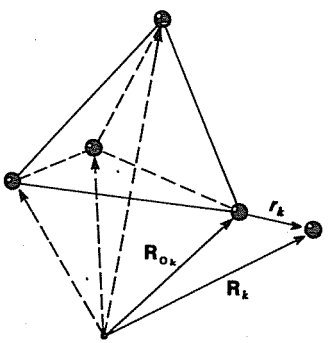


Figura 4.7 Deslocamento do R-ésimo átomo de uma 4-molécula

Entretanto, como estamos interessados apenas nas vibrações estruturais de deformação da molécula, é conveniente eliminar "a priori" das nossas equações a parte do movimento que é realizado como um corpo rígido: translação e rotação.

Desta forma, se $\mathbf{R}_k(t) = \mathbf{R}_{0k} + \mathbf{r}_k(t)$, onde $\mathbf{R}_{0k}$ é a posição de equilíbrio do k-ésimo átomo (veja Figura 4.7), eliminaremos a possibilidade de translação impondo que a quantidade de movimento resultante seja nulo, isto é, que o centro de massa permaneça fixo:

$$\Sigma M_k \mathbf{R}_k = \Sigma M_k \mathbf{R}_{0k},$$

e portanto

$$\sum_{k=1}^{N} M_k \dot{\mathbf{r}}_k = 0 \tag{1}$$

Para eliminarmos a possibilidade de rotação exigimos ainda que o momento angular resultante seja nulo:

$$\Sigma M_k (\mathbf{R}_{0k} + \mathbf{r}_k) \times \dot{\mathbf{r}}_k = 0$$

Supondo $\mathbf{r}_k$ pequeno, podemos substituir esta condição não linear pela aproximação linearizada:

$$\frac{d}{dt} (\Sigma M_k \mathbf{R}_{0k} \times \mathbf{r}_k) = 0.$$

ou seja

$$\Sigma M_k U_{0k} \times \mathbf{r}_k = 0 \tag{2}$$

Com as condições lineares (1) e (2) impostas às incógnitas $\mathbf{r}_k(t)$ nos limitamos a estudar apenas as vibrações da molécula que afetam a sua configuração estrutural. Isto significa que o vetor $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$ só poderá percorrer um subespaço de $\mathbb{R}^{3N}$ caracterizado pelas condições lineares (1) e (2).

Em uma molécula N-atômica temos um vetor $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$ e as condições (1) e (2) nos fornecem 6 condições escalares que, portanto, reduzirão o problema a efetivamente $3N-6$ incógnitas. Diz-se, então, que o sistema tem $3N-6$ graus de liberdade correspondentes à vibração interna da molécula, 3 para translação e 3 para a rotação.

Se uma molécula é linear (ver Figura 4.8), não se considera a rotação em torno da reta que as liga e, portanto, temos $3N-5$ graus de liberdade de vibração interna.

Para uma molécula plana, considerando apenas o seu movimento plano, temos um total de $2N$ graus de liberdade, dois de translação e um apenas de rotação; portanto, $2N-3$ graus de liberdade de vibração interna.

Para uma molécula linear, considerando apenas o movimento linear, temos N graus de liberdade no total e um grau de liberdade de translação (Exercício 3) e, portanto, $N-1$ graus de vibração interna.

Estes argumentos são importantes, pois reduzem a dimensão do problema e, portanto, simplificam a resolução do problema algébrico (cálculo de raízes de polinômios de autovetores etc.).

Para maiores informações sobre este assunto o leitor poderá recorrer aos livros indicados*.

Tomemos como exemplo uma molécula linear (Figura 4.8) e analisemos a sua vibração longitudinal.

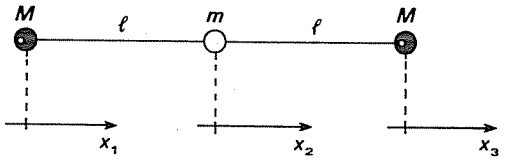


Figura 4.8

O sistema de equações diferenciais é

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \\ M\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2) \end{cases}$$

a equação que elimina o grau de liberdade de translação é

$$M x_1 + m x_2 + M x_3 = 0$$

Tomando $x_2 = -\dfrac{M}{m}x_1 - \dfrac{M}{m}x_3$ e substituindo no sistema, obtemos

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k\left(x_1 + \dfrac{M}{m}x_1 + \dfrac{M}{m}x_3\right) \\ M\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -k\left(x_3 + \dfrac{M}{m}x_1 + \dfrac{M}{m}x_3\right) \end{cases}$$

ou

$$\left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} D^2 + \begin{pmatrix} -k\left(1 + \dfrac{M}{m}\right) & -k\dfrac{M}{m} \\ -k\dfrac{M}{m} & -k\left(\dfrac{M}{m} + 1\right) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

---

* LANDAU, L. & Liffchitz, L. *Mècanique*. Moscou, Mir, 1966.
WOODWARD, L. *Introduction to the Theory of Molecular Vibrations and Vibrational Spectroscopy*. New York, Oxford University Press, 1972.

Logo

$$\left\{ D^2 + \begin{pmatrix} -\frac{k}{m}\left(1+\frac{M}{m}\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m}\left(\frac{M}{m}+1\right) \end{pmatrix} \right\} x = 0$$

Obtenha as freqüências e os modos normais de vibração desta molécula*.

Modelo 2 MOVIMENTO VIBRATÓRIO DE UM CRISTAL

O estudo de sistemas de massas concentradas ligadas entre si por forças elásticas é um modelo matemático utilizado em várias situações para a descrição de processos físicos. Já vimos a utilização deste modelo para o estudo de vibrações de sistemas elásticos contínuos (corda e barra no Capítulo 3), para vibrações de composições ferroviárias, para vibrações moleculares etc. Descreveremos agora o movimento vibratório de um cristal por meio deste modelo, onde as massas são os átomos e as forças de ligação serão supostas elásticas. Este modelo é efetivamente utilizado e fornece informações de grande importância no estudo clássico dos cristais.

Não trataremos do assunto em maiores detalhes pois isto iria além do escopo deste livro. O leitor interessado poderá consultar o texto de L. Brillouin**.

O modelo mais famoso é do cloreto de sódio (NaCl) estudado pela primeira vez por Max Born (um dos fundadores da Física Moderna) em 1912, que consiste em uma cadeia unidirecional (para o estudo de vibrações longitudinais) de átomos de cloro e sódio alternados, conforme mostra a Figura 4.9, onde se supõe interação apenas entre átomos vizinhos.

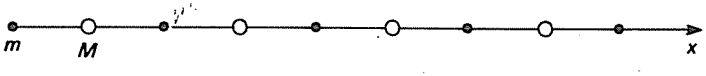


Figura 4.9

Tomando $u_n(t)$ o desvio da posição de equilíbrio do n-ésimo átomo, temos

$$M\frac{d^2u_{2n}}{dt^2} = -k(u_{2n}-u_{2n-1}) - k(u_{2n}-u_{2n+1})$$

$$m\frac{d^2u_{2n+1}}{dt^2} = -k(u_{2n+1}-u_{2n}) - k(u_{2n+1}-u_{2n})$$

---

* Consulte a referência Landau-Lifchitz e analise o movimento plano desta molécula: (*a*) considerando o movimento geral, (*b*) eliminando a priori o movimento rígido.

** BRILLOUIN, L. *Wave Propagation in Periodic Structures*. New York, Dover, 1953.

Consideraremos o caso em que as massas têm o mesmo valor, m. Neste caso, o sistema pode ser escrito como

$$m\frac{d^2u_n(t)}{dt^2} = -k(u_n - u_{n+1}) - k(u_n - u_{n-1})$$

ou

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = k\Delta^2 u_{n-1}$$

(onde Δ é um operador de diferença finita, $\Delta = E - I$; $Eu_n = u_{n+1}$ e $Iu_n = u_n$).

Se a cadeia for finita, o primeiro e o último ponto devem satisfazer uma equação que leve em conta as condições de extremidade livre (ver Figura 4.10a) ou fixa (ver Figura 4.10b). A cadeia também pode ser fechada ou periódica (ver Figura 4.10c), caso em que $u_{n+1} = u_1$.

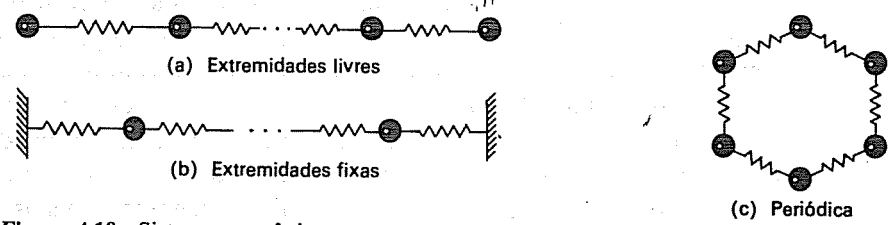


Figura 4.10 Sistemas mecânicos

Observe que o sistema de equações para as incógnitas $u_n(t)$ pode ser pensado como uma equação mista com operadores de diferenciabilidade e de diferenças. Veremos no último capítulo como estas equações estão relacionadas às equações diferenciais parciais.

Mostre que em todos estes casos, tomando

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

podemos escrever o sistema acima como $(MD^2 + K)\mathbf{u} = 0$, onde M e K são simétricas e positivas definidas.

Considere o caso periódico com três massas e estude suas freqüências fundamentais de vibração e seus modos normais. Analise o caso em que uma das massas tem um valor diferente, maior e menor do que as outras. Considere também o caso em que esta massa tem valor muito menor do que as outras, considerando-a nula. (Observe que neste caso limite o sistema $(MD^2 + K)\mathbf{u} = 0$ terá M positiva semidefinida.)

Para a resolução deste sistema de equações podemos então utilizar o método desenvolvido para sistemas conservativos diagonalizando simultaneamente as matrizes M e K. Se $M = mI$ (massas iguais), como K é uma matriz com apenas três diagonais não nulas, o problema algébrico não é difícil (ver Belmann, R. *op. cit.*). Entretanto, utilizaremos um outro ponto de vista (equivalente) mais próximo do adotado em geral pelos físicos.

Sabemos que a solução geral de $(MD^2 + K)\mathbf{u} = 0$ pode ser escrita como $\mathbf{u}(t) = (\Sigma\, e^{(i\omega_k t)}\mathbf{v}_k)$, onde $\{i\omega_k\}$ são autovalores e $\{\mathbf{v}_k\}$ são autovetores generalizados de K com relação a M.

Portanto, procuraremos as soluções na forma $\mathbf{u}_n = C_n e^{i\omega t}$, onde ω é a respectiva seqüência $\{C_n(\omega)\}_{1 \le n \le N}$. Como C_n depende de ω podemos também escrever $C_n(\omega)$.

Assim, devemos ter

$$\frac{d^2}{dt^2}(C_n e^{i\omega t}) = k\Delta^2 (C_{n-1}\, e^{i\omega t})$$

$$e^{i\omega t}(-m\omega^2 C_n) = e^{i\omega t}\, k\Delta^2\, C_{n-1}$$

de onde tiramos a equação de diferenças finitas

$$C_{n+1} + \left(\frac{m\omega^2}{k} - 2\right) C_n + C_{n-1} = 0$$

Mostre que as soluções são superposições de vibrações da forma

$$u_n(t) = \lambda^n(\omega) e^{i\omega t} \qquad u_n(t) = \lambda^n\, e^{i\omega t}$$

onde $\lambda(\omega)$ é um número complexo que depende de ω.

Se $\lambda(\omega) = e^{i\theta}$, isto é, $|\lambda(\omega)| = 1$, então $u_n(t) = e^{i(n\theta + \omega t)}$, onde θ e ω são relacionados pela chamada equação de dispersão do reticulado.

Faça um gráfico de $\lambda(\omega)$ e verifique a região para ω em que $\lambda(\omega)$ é sempre um número do tipo $e^{i\theta}$.

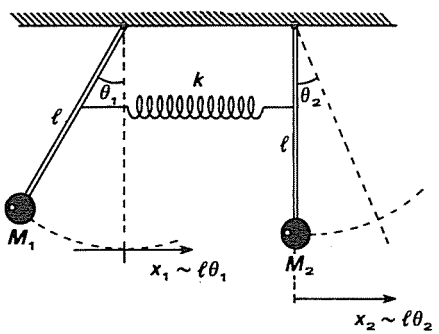
Suponha o reticulado infinito e analise $u_n(t)$ para:

1. t fixado e n variando, e
2. n fixado e t variando.

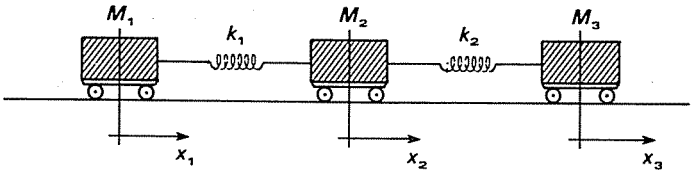
Mostre que para certas freqüências existem alguns pontos que se mantêm estacionados na vibração do reticulado, chamados *nós*.

EXERCÍCIOS

1. Analise a vibração do pêndulo composto, mostrado na figura abaixo, quanto às freqüências fundamentais, modos normais de vibração, e coordenadas normais.



2. Faça o mesmo para a composição de vagões ferroviários abaixo em movimento, sem atrito.



Observe que neste caso, k é positiva semidefinida, o que provoca o aparecimento de um modo normal que não é de vibração, mas de translação.

Se o objetivo é estudar somente a vibração, podemos eliminar este modo normal a priori.

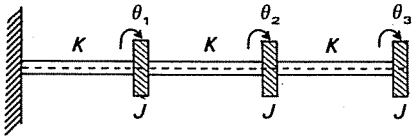
Aplique este método para o problema em questão.

3. O estudo de vibrações conservativas de torção de eixos também utiliza o mesmo procedimento matemático. Por exemplo, considere o eixo da figura abaixo, com três volantes, momento de inércia J e rigidez de torção K entre eles. A sua vibração elástica é descrita pelo sistema

$$MD^2\theta + K\theta = 0$$

onde $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ são os ângulos de deslocamento de cada volante e

$$M = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{pmatrix} 2K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{pmatrix}$$



Obtenha a freqüência fundamental mais baixa e seu modo de vibração pelo seguinte método:

Suponha que A seja matriz simétrica, $\{\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_n\}$ seja uma base de seus autovetores e $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ sejam seus autovalores correspondentes

$$A\,\mathbf{Q}_k = \lambda_k\,\mathbf{Q}_k\,; \qquad \mathbf{Q}^t A Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Tomando $\mathbf{x}_0$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^n$, podemos escrevê-lo como $\mathbf{x}_0 = \Sigma\,\alpha_k \mathbf{Q}_k$ já que $\{\mathbf{Q}_k\}$ forma uma base.

Então

$$A\mathbf{x}_0 = \Sigma\,\alpha_k \lambda_k \mathbf{Q}_k \qquad A^2\mathbf{x}_0 = A \qquad A\mathbf{x}_0 = \Sigma\,\alpha_k\,\lambda_k^2\,\mathbf{Q}_k$$

e

$$A^m\mathbf{x}_0 = \Sigma\,\alpha_k\,\lambda_k^m\,\mathbf{Q}_k = \lambda_n^m\left(\Sigma\,\alpha_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^m \mathbf{Q}_k\right)$$

Supondo $\lambda_n > \lambda_k$, $k < n$, vem que $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^m \to 0$ se $m \to \infty$.

Então, para um certo valor de m

$$A^m\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_m \sim \lambda_n^m \alpha_n \mathbf{Q}_n \quad \text{e} \quad A\mathbf{x}_m = A^{m+1}\mathbf{x}_0 \sim \lambda_n^{m+1}\alpha_n\mathbf{Q}_n = \lambda_n\mathbf{x}_m$$

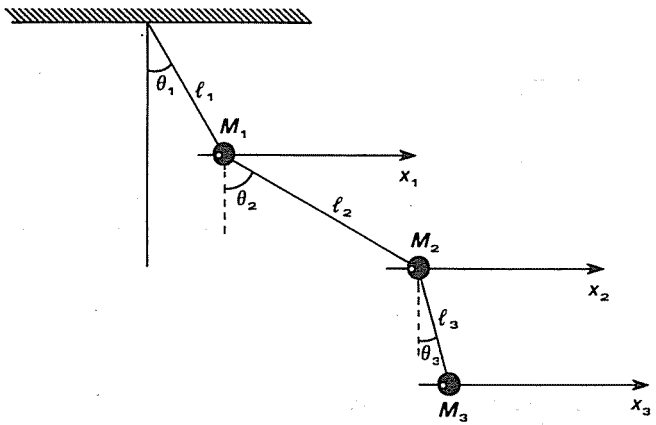
ou seja, iterando a matriz A sobre $\mathbf{x}_0$ observaremos, depois de um certo m, que o efeito de A sobre $\mathbf{x}_m$ será (dentro de uma tolerância pré-fixada) equivalente a multiplicar $\mathbf{x}_m$ por um certo número, que deverá ser então $\sim \lambda_n$ com $\mathbf{x}_m$ próximo a um autovetor $(\alpha_n\mathbf{Q}_n)$ correspondente de A.

Se tomamos $A^{-1} = B$ e realizamos o processo iterativo com B, obteremos o menor autovalor de A. Tome $B = K^{-1}M$ no Exercício 3 e obtenha a menor freqüência fundamental

$$\omega_1 \sim 0{,}446 \left(\frac{K}{J}\right)^{1/2}$$

e seu modo de vibração $\sim \begin{pmatrix} 0{,}445 \\ 0{,}802 \\ 1{,}000 \end{pmatrix}$

4. *a.* Obtenha o sistema de equações $(MD^2 + K) = 0$ para o pêndulo triplo $(x_k \sim \ell_k \theta_k)$ através da matriz de flexibilidade, ou seja



Suponha que o pêndulo esteja deslocado em uma posição de equilíbrio pela ação de uma força horizontal unitária aplicada a m_1.
Como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [f] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtenha as posições de m_1, m_2 e m_3 que darão

$$x_1 = f_{11}, \quad x_2 = f_{21} \quad \text{e} \quad x_3 = f_{31}$$

Repita o processo para m_2 e m_3 e obtenha

$$[f] = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a+b & a+b \\ a & a+b & a+b+c \end{pmatrix}$$

onde

$$a = \frac{\ell_1}{g(m_1+m_2+m_3)}, \quad b = \frac{\ell_2}{g(m_2+m_3)} \quad \text{e} \quad c = \frac{\ell_3}{g_3}$$

b. Suponha $m_1 = m_2 = m_3 = M$ e $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell$ e obtenha pelo método iterativo a freqüência fundamental, isto é, a mais baixa

$$\omega_1 \simeq 0{,}322 \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

5. Em alguns sistemas as equações $(MD^2 + K)\mathbf{u} = 0$ têm M e K simétricas e M é apenas semidefinida, isto é, M pode ter autovalores nulos que podem corresponder a "movimentos rígidos" não eliminados.

Ainda é possível obter uma matriz ortogonal Q cujas colunas são autovetores de M e, portanto,

$$Q^tMQ = \text{diag}\,(m_1, \ldots, m_s, m_{s+1}, \ldots, m_n), \qquad m_k \geqslant 0$$

Podemos calcular $M^{1/2} = Q\,\text{diag}\,(m^{1/2}, \ldots, m_n^{1/2})Q^t$, mas não é possível calcular $M^{-1/2}$ e, portanto, o método utilizado para M positiva definida não se aplica. Suponha, entretanto, que

$$m_1 = \ldots = m_s = 0 \quad \text{e} \quad m_k \neq 0, \qquad s < k \leqslant n$$

Fazendo a mudança de variável $\mathbf{v} = Q^t\mathbf{u}$; $\mathbf{u} = Q\mathbf{v}$, o sistema toma a forma

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \Delta \end{array}\right) D^2\mathbf{v} + Q^tKQ\mathbf{v} = 0$$

Escreva $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ onde $\mathbf{v}_1$ é constituído das s primeiras coordenadas de $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2$ das $n-s$ seguintes, e a matriz

$$Q^tKQ = \tilde{K} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \\ \hline \tilde{K}_3 & \tilde{K}_4 \end{array}\right)$$

em blocos onde $\tilde{K}_1$ é matriz simétrica $s \times s$; $\tilde{K}_4$ é simétrica $n-s \times n-s$; $\tilde{K}_2$ é $s \times n-s$ e $\tilde{K}_3$ é $n-s \times s$. Ainda $\tilde{K}_2^t = \tilde{K}_3$.

Escrevemos então o sistema como

$$\begin{cases} \tilde{K}_1\mathbf{v}_1 + \tilde{K}_2\mathbf{v}_2 = 0 & s\text{-equações} \\ \Delta D^2\mathbf{v}_2 + \tilde{K}_3\mathbf{v}_1 + \tilde{K}_4\mathbf{v}_2 = 0 & (n-s)\text{-equações} \end{cases}$$

Observe que as primeiras s equações são puramente algébricas. Se $\tilde{K}_1$ for inversível (se não o for podemos transformar o sistema para que o seja!) então

$$\mathbf{v}_1 = \tilde{K}_1^{-1}\,\tilde{K}_2\mathbf{v}_2$$

e substituindo no sistema, vem

$$[\Delta D^2\mathbf{v} + (-\tilde{K}_3\tilde{K}_1\tilde{K}_2 + \tilde{K}_4)]\mathbf{v}_2 = 0 \qquad (n-\text{s})\text{-equações diferenciais}$$

Observe que $\tilde{K}_1$ e $\tilde{K}_4$ são simétricas

$$(-\tilde{K}_3\,\tilde{K}_1^{-1}\,\tilde{K}_2)^t = -\tilde{K}_2^t(\tilde{K}_1^{-1})^t\,\tilde{K}_3^t$$

e como

$$\tilde{K}_2^t = \tilde{K}_3 \quad \text{e} \quad \tilde{K}_3^t = \tilde{K}_2$$

podemos escrever o sistema na forma

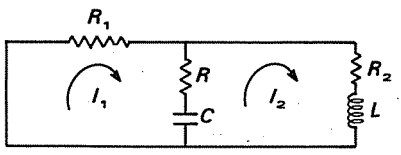
$$\Delta D^2\mathbf{v}_2 + S\mathbf{v}_2 = 0$$

onde

$$\Delta = \text{diag}\,(m_{s+1}, \ldots, m_n) \qquad m_K > 0 \qquad \text{e} \qquad k > s$$

e S é simétrica. Portanto, caímos no caso anterior.

Resolvendo para $\mathbf{v}_2$ obteremos $\mathbf{v}_1 = -\tilde{K}_1^{-1}\,\tilde{K}_2\mathbf{v}_2$ algebricamente. O mesmo método pode ser utilizado para sistemas de primeira ordem: $(MD + K)\mathbf{w} = 0$. Utilize este método para obter as freqüências naturais e os modos normais de vibração do circuito abaixo



Analise também o Modelo 1 e o Exercício 2 por este método.

6. Suponha agora que uma rede de circuitos nos dê um sistema do tipo

$$(LD^2 + RD + S)\mathbf{u} = 0$$

onde L, R, S são matrizes simétricas. Mostre que, neste caso, multiplicando escalarmente a equação por $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left\langle L\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right\rangle + \langle S\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\right\} = -\left\langle R\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right\rangle$$

e se R for positiva semidefinida, temos:

$$\frac{d}{dt}\left\{\left\langle L\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right\rangle + \langle S\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\right\} \leqslant 0$$

Se L for positiva definida e S semidefinida, então

$$\left\langle L\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right\rangle + \langle S\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$$

é não crescente e como

$$\left\langle L\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right\rangle \geqslant \lambda_1 \left\|\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right\|^2$$

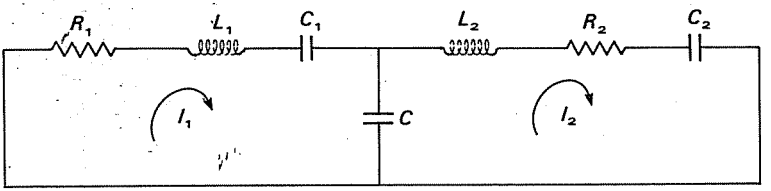
conclua que $\left\|\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right\|$ não pode crescer indefinidamente para $t \to \infty$.

Isto implica que

$$\det(L\lambda^2 + R\lambda + S) = 0$$

não tem raízes com parte real positiva e, portanto, o sistema é estável. Se R for positiva definida, o sistema é assintoticamente estável e as raízes têm parte real negativa.

7. Obtenha L, R, S para o circuito abaixo



Mostre que as matrizes, L, R, S são simétricas.

Você poderia "provar" que para toda rede de circuitos RLC o sistema de equações produz matrizes L, R, S simétricas?

8. Considere $(LD^2 + RD + S)\mathbf{u} = 0$ e a seguinte redução a um sistema de primeira ordem

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

e tome

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline L & R \end{array}\right) D\begin{pmatrix} D\mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} -L & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right)\begin{pmatrix} D\mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0$$

Mostre que o sistema acima $(AD + B)\mathbf{w} = 0$ é equivalente a

$$(LD^2 + RD + S)\mathbf{u} = 0$$

Se L for inversível, mostre que

$$\left(\begin{array}{c|c} -L^{-1}RL^{-1} & L^{-1} \\ \hline L^{-1} & 0 \end{array}\right) = A^{-1}$$

e se L, R, S forem simétricas, então A e B são simétricas. Reduza o sistema (se L for inversível) à forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = M\mathbf{u} \qquad \text{com} \qquad M = -A^{-1}B = \begin{pmatrix} -L^{-1}R & L^{-1}S \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

9. Dado um sistema de segunda ordem com influência externa

$$(MD^2 + k)\mathbf{u} = \mathbf{f}(t)$$

onde M e K são simétricas e M é positiva definida, obtenha uma expressão analítica para a sua solução geral e a solução particular com as condições iniciais $\mathbf{u}(0) = \alpha$, $\mathbf{u}(0) = \beta$.

Analise a questão de ressonância.

PROJETO 3

Considere agora uma seqüência de circuitos (ver Figura 4.11)

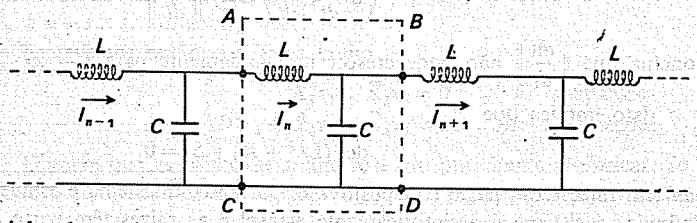


Figura 4.11 Linha de transmissão

que pode ser considerada como uma linha de transmissão. Tomando a parte do circuito delimitada por A, B, C, D mostre pelas Leis de Kirchhoff que as correntes I_n satisfazem o sistema

$$\frac{d^2}{dt^2} I_n = \frac{1}{LC}(I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}) = \frac{1}{LC}\Delta^2 I_{n-1}$$

que é formalmente idêntico ao que acabamos de estudar para vibrações de reticulados:

Esta linha é chamada de filtro de baixa freqüência. Explique!

PROJETO 4

Considere a linha de circuitos dada na Figura 4.12

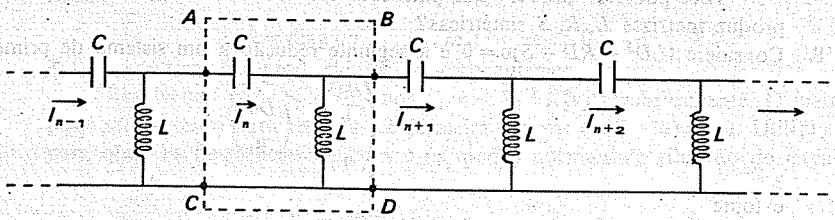


Figura 4.12 Filtro de alta freqüência

e obtenha o sistema de equações para I_n. Explique por que esta linha é chamada filtro de alta freqüência.

Considere esta linha de circuitos com resistência e analise as suas soluções.

4.8 MODELOS DE COMPARTIMENTOS

Um sistema de compartimentos consiste essencialmente de um número finito de subsistemas homogêneos interligados, chamados compartimentos, que trocam entre si e com o meio ambiente quantidades ou concentrações de materiais. A troca efetuada em cada compartimento é descrita por uma equação diferencial de primeira ordem.

A forma geral de um sistema compartimental com p compartimentos é

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} k_{ji}\, x_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} k_{ij}\, x_i - k_{i0}\, x_i + b_i u_i(t) \tag{1}$$

com $x_i(0) = \alpha_i$ conhecido. Por simplicidade. e por ser mais usado em aplicações. consideraremos tal sistema linear.

$$x_i = x_i(t)$$

é a quantidade de material (ou concentração) existente no compartimento i, no instante t.

$$k_{ji}\, x_j$$

é o fluxo do compartimento j para o compartimento i, isto é, diretamente proporcional à quantidade x_j, mas independente da quantidade x_i do compartimento receptor.

O índice 0 denota o meio ambiente e as constantes k_{ij} são consideradas todas não negativas.

$$b_i u_i(t)$$

é o fluxo do meio ambiente (*input*) para o compartimento receptor i.

Uma ilustração da Equação geral (1) para dois dos p compartimentos é dada pela Figura 4.13.

Se $k_{i0} = 0$; $i = 1, 2, \ldots, p$, diz-se que o sistema é *fechado*; caso contrário será *aberto*.

Vejamos alguns exemplos.

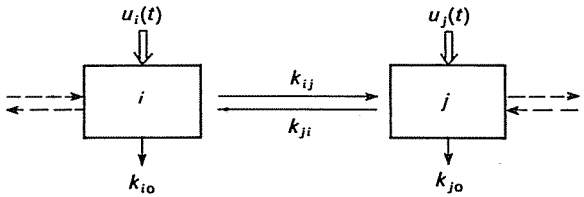
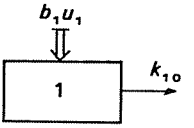


Figura 4.13

EXEMPLO 1

Se o sistema tiver apenas um compartimento, o sistema de equações (1) toma a forma de uma equação de primeira ordem linear

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_{10}\, x_1 + b_1 u_1(t) \tag{2}$$



Um exemplo de tal modelo é dado pelo decaimento radioativo de uma substância

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \text{(neste caso } b_1 = 0 \text{ na Equação (2))}$$

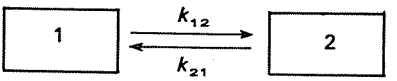
EXEMPLO 2 Difusão de material através de uma membrana (Lei de Fick)

Uma célula, considerada de volume constante, é suspensa em um meio líquido homogêneo que contém uma solução de concentração $C_1(t)$. $C_2(t)$ é a concentração da solução no interior da célula no instante t (supomos que a distribuição da solução através da célula dependa somente do tempo). Por difusão, moléculas da solução entrarão na célula, assim como outras deverão sair. Dessa forma, existirá um fluxo de moléculas através da membrana celular em ambas as direções. Se $C_1 > C_2$, o fluxo de solução do líquido para a célula será maior que o que sai e vice-versa, se $C_1 < C_2$. A concentração final tende a se equilibrar, isto é, a concentração interior tende a ser a mesma que a do líquido ($C_1 = C_2$). A Lei de Fick estabelece que: "O fluxo de substância por unidade de área é proporcional à diferença de concentração de ambos os lados da membrana".

Sejam V_1 o volume da célula (constante) e V_2 o volume do líquido que a envolve (também constante). Assim, a Lei de Fick permite escrever as equações

$$\begin{cases} V_1 \dfrac{dC_1}{dt} = kA\,(C_2 - C_1) \\ V_2 \dfrac{dC_2}{dt} = kA\,(C_1 - C_2) \end{cases} \tag{3}$$

onde k é o coeficiente de difusão ou permeabilidade da membrana. Isto é um exemplo de um sistema bicompartimental fechado



Aqui, $k_{12} = k_{21} = \dfrac{kA}{V}$

O Sistema (3) pode ser reescrito de modo mais simples

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = -aC_1 + aC_2 \\ \dfrac{dC_2}{dt} = aC_1 - aC_2 \end{cases} \qquad \text{onde } a = \frac{kA}{V} \text{ (constante)} \tag{3'}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dC_1}{dt} \\ \dfrac{dC_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico associado à matriz dos coeficientes será

$$P(\lambda) = (-a-\lambda)^2 - a^2 = \lambda(2a+\lambda) = 0$$

Assim, os autovalores $\lambda = 0$ e $\lambda = -2a$ nos fornecem os autovetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A solução de (3') será, pois

$$C_1(t) = A_1 + A_2\, e^{-2at}$$
$$C_2(t) = A_1 - A_2\, e^{-2at}$$

Se considerarmos condições iniciais do problema, por exemplo

$$C_1(0) = C_1^0 \quad \text{e} \quad C_2(0) = C_2^0$$

teremos

$$C_1^0 = A_1 + A_2 \quad \text{e} \quad C_2^0 = A_1 - A_2$$

Donde

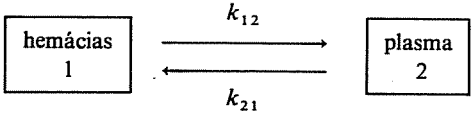
$$A_1 = \frac{(C_1^0 + C_2^0)}{2} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{(C_1^0 - C_2^0)}{2}$$

Assim, quando $t \to +\infty$, $C_1(t)$ e $C_2(t)$ tendem à mesma concentração $\dfrac{C_1^0 + C_2^0}{2}$, média das concentrações iniciais. ■

Um sistema bicompartimental fechado como este que acabamos de ver pode ser descrito por apenas uma equação diferencial, uma vez que $C_1(t) + C_2(t) = C$ (constante). Veremos como este fato pode simplificar a solução do problema no exemplo seguinte.

EXEMPLO 3 Tração radioativa em glóbulos vermelhos

Na corrente sangüínea humana íons de potássio estão constantemente se movendo para dentro e para fora dos glóbulos vermelhos (hemácias). As superfícies das hemácias são permeáveis aos íons K^+. As razões com que estes íons entram ou saem das hemácias para o plasma são geralmente distintas. Se considerarmos todos os glóbulos vermelhos indistintamente, podemos supor que a corrente sangüínea seja esquematizada por duas caixas (ou compartimentos) – uma para os glóbulos e a outra para o plasma.



Seja t o tempo decorrido desde que seja introduzida uma quantidade A de íons K^{42+} no sangue. Denotamos por $h(t)$ e $p(t)$ as quantidades de íons K^{42+}, respectivamente, nas hemácias e no plasma.

Consideremos as condições iniciais $h(0) = 0$ e $p(0) = A$ (constante). Como este sistema compartimental é fechado, podemos considerar que

$$h(t) + p(t) = A, \quad \text{para todo} \quad t \geqslant 0 \tag{4}$$

Como o fluxo de íons que saem da "caixa" 1 (hemácias) é proporcional a $h(t)$ e dos que entram é proporcional a $p(t)$, podemos escrever

$$\frac{dh(t)}{dt} = k_{21}\, p(t) - k_{12}\, h(t) \tag{5}$$

Usando a Equação (4) podemos escrever (5) como

$$\frac{dh}{dt} = k_{21}(A-h) - k_{12}h = k_{21}A - (k_{21}+k_{12})h$$

"separando as variáveis" e integrando, obtemos

$$-\frac{1}{k_{21}+k_{12}} \ln [k_{21}A - (k_{21}+k_{12})h(t)] \Big|_0^t = t$$

Desde que $h(0)=0$, temos

$$-\frac{1}{k_{21}+k_{12}} \ln \left(\frac{k_{21}A - (k_{21}+k_{12})h(t)}{k_{21}A} \right) = t$$

Explicitando $h(t)$, temos

$$h(t) = \frac{k_{21}A}{k_{21}+k_{12}} (1 - e^{-(k_{21}+k_{12})t}) \tag{6}$$

As taxas k_{21} e k_{12} podem ser determinadas uma vez que

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{k_{21}A}{k_{21}+k_{12}} = B$$

onde B pode ser determinado experimentalmente num tempo relativamente curto!

Dividindo a Equação (6) por B, temos

$$\frac{h(t)}{B} = 1 - e^{-(k_{21}+k_{12})t}$$

isto é

$$\ln \left(1 - \frac{h(t)}{B} \right) = -(k_{21}+k_{12})t$$

Desta forma, se tomarmos o gráfico de $\ln \left(1 - \frac{h(t)}{B} \right)$ devemos ter uma reta cujo coeficiente angular é $m = -(k_{21}+k_{12})$ e que passa pela origem. Assim sendo podemos, experimentalmente, obter k_{21} e k_{12}, considerando o sistema

$$\begin{cases} m = -(k_{21}+k_{12}) \\ B = \dfrac{k_{21}A}{k_{21}+k_{12}} \end{cases}$$

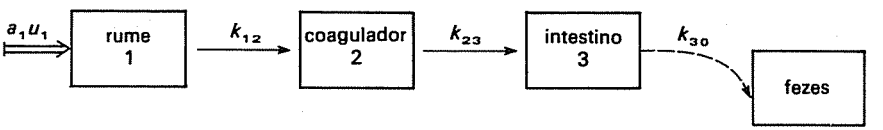
ou seja

$$k_{21} = -\frac{mB}{A} \quad \text{e} \quad k_{12} = \frac{(B-A)m}{A}$$

Observamos que $k_{21} > 0$ e $k_{12} > 0$, pois $m < 0$ e $B - A < 0$. ■

EXERCÍCIOS

1. Interprete o esquema compartimental para o processo de digestão de ruminantes, dado por

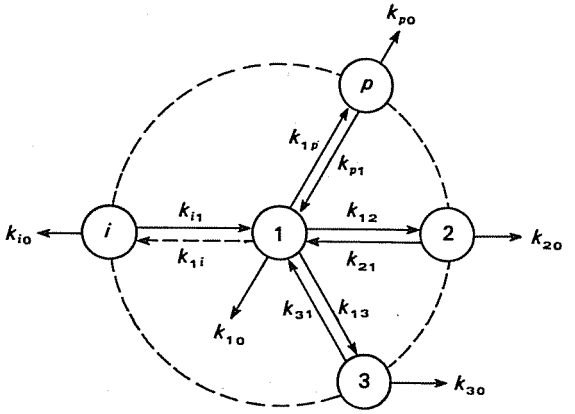


onde

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t < t_0 \\ 1 \text{ se } t \geqslant t_0 \end{cases}$$

Monte o sistema de equações diferenciais correspondente.
(Ver modelo 10 – Secção 2.6. Compare os métodos de resolução!)

2. Mostre que em todo sistema fechado bicompartimental os autovalores são reais.
3. O sistema mamilar (Sheppard e Householder, 1951) consiste em um compartimento central cercado por $(p-1)$ compartimentos periféricos que trocam material somente com o compartimento central.



Escreva o sistema de equações para tal modelo.

4.9 SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO: MÉTODO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Discutiremos rapidamente, nesta secção, um método para resolver sistemas lineares não homogêneos — o método das transformadas de Laplace introduzido no capítulo anterior.

Seja

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} + \mathbf{g}(t)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

e satisfazendo

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$$

Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros de (1) obtemos

$$\mathscr{L}(\mathbf{X}(t)) = \mathscr{L}(A\mathbf{X} + \mathbf{G}(t)) = A\mathscr{L}(\mathbf{X}) + \mathscr{L}(\mathbf{G}(t))$$

Agora

$$\mathscr{L}(X) = \begin{pmatrix} \mathscr{L}(\dot{x}_1(t)) \\ \mathscr{L}(\dot{x}_2(t)) \\ \vdots \\ \mathscr{L}(\dot{x}_n(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,F_1(s) - x_1(0) \\ s\,F_2(s) - x_2(0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s\,F_n(s) - x_n(0) \end{pmatrix} = s\,F(s) - \mathbf{X}(0)$$

$$\mathscr{L}(\mathbf{G}(t)) = \begin{pmatrix} \int_0^{+\infty} e^{-st} g_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_0^{+\infty} e^{-st} g_n(t)\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(s) \\ \vdots \\ G_n(s) \end{pmatrix} = \mathbf{G}(s)$$

Portanto

$$s\,\mathbf{F}(s) - \mathbf{X}(0) = A\mathbf{F}(s) + \mathbf{G}(s)$$

ou

$$(s\,I - A)\,\mathbf{F}(s) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{G}(s) \tag{2}$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Esta equação é, na verdade, um sistema de n equações simultâneas em $F_1(s)$, $F_2(s)$, ..., $F_n(s)$ e pode ser resolvido de vários modos. Assim, resolvendo para cada $F_i(s)$, podemos encontrar $x_i(t)$ tomando a inversa da transformada de Laplace para cada i.

EXEMPLO 1

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 2e^t \end{cases}$$

com $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros de (1) e usando as condições iniciais, obtemos

$$\begin{cases} s\,X(s) = 2X(s) + Y(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ s\,Y(s) = X(s) + Y(s) + \dfrac{2}{s-1} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (s-2)\,X(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} \\ -X(s) + (s-1)\,Y(s) = \dfrac{2}{s-1} \end{cases}$$

Donde

$$Y(s)=\frac{2s-3}{(s-1)\left(s-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(s-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} \quad \text{e} \quad X(s)=\frac{s+1}{(s-1)\left(s-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(s-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Para inverter $Y(s)$ e $X(s)$ usamos frações parciais

$$\frac{2(s-2)}{(s-1)\left(s-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(s-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{C}{s-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Logo

$$A(s^2-3s+1)+B(s-1)\left(s-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)+C(s-1)\left(s-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=2s-3$$

tomando $s=1$, obtemos $A=1$; para $s=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ obtemos $B=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e para $s=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ obtemos $C=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Portanto

$$Y(t)=e^t+\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}$$

Analogamente

$$\frac{s+1}{(s-1)\left(s-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(s-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{C}{s-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

ou

$$A(s^2-3s+1)+B(s-1)\left(s-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)+C(s-1)\left(s-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=s+1$$

Tomando

$$s=1, \quad s=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad s=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

obtemos, respectivamente

$$A=-2, \quad B=1 \quad \text{e} \quad C=1$$

Portanto

$$X(t)=-2e^t+e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}+e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}$$

■

EXEMPLO 2

Dado o sistema de três compartimentos esquematizado na Figura 4.14, determine $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$, sabendo que $k_{ij}=1$, $u_1(t)=\delta(t)$ (função impulso unitário na origem) e $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0$.

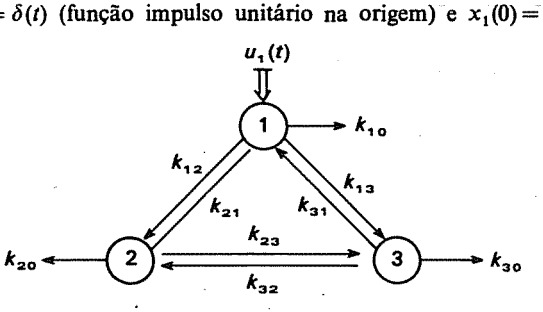


Figura 4.14

Solução: O sistema de equações do problema compartimental é

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 + x_3 + \delta(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace na forma matricial, temos

$$(sI - A)\, X(s) = G(s) + x(0)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s+3 & -1 & -1 \\ -1 & s+3 & -1 \\ -1 & -1 & s+3 \end{pmatrix}; \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pois $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$.

Assim

$$\begin{cases} (s+3)X_1(s) - X_2(s) - X_3(s) = 1 \\ -X_1(s) + (s+3)X_2(s) - X_3(s) = 0 \\ -X_1(s) - X_2(s) + (s+3)X_3(s) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema para $X_1(s)$, $X_2(s)$ e $X_3(s)$, obtemos

$$X_1(s) = \frac{(s+3)^2 - 1}{(s+4)^2\,(s+1)}$$

$$X_2(s) = \frac{(s+3)+1}{(s+4)^2\,(s+1)} = X_3(s)$$

Resta calcular as transformadas inversas de Laplace

$$\frac{(s+3)^2+1}{(s+4)^2\,(s+1)} = \frac{s^2+6s+8}{(s+4)^2\,(s+1)} = \frac{s+2}{(s+4)\,(s+1)} = \frac{2/3}{s+4} + \frac{1/3}{s+1}$$

portanto

$$x_1(t) = \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}$$

$$\frac{(s+3)+1}{(s+4)^2\,(s+1)} = \frac{1}{(s+4)\,(s+1)} = \frac{-1/3}{s+4} + \frac{1/3}{s+1}$$

então

$$x_2(t) = x_3(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}$$

(ver Figura 4.15).

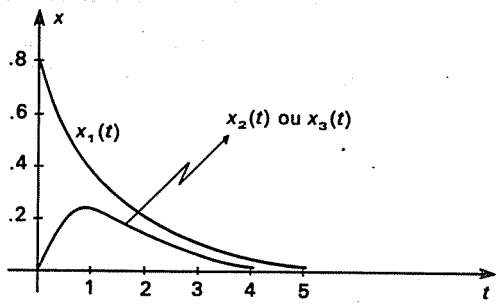


Figura 4.15

EXEMPLO 3

Um sistema mamilar de três compartimentos é dado pelo esquema da Figura 4.16:

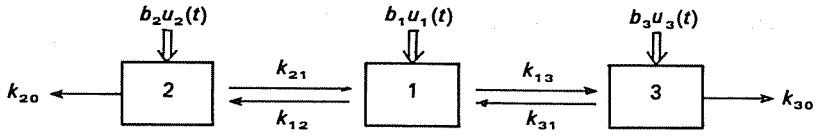


Figura 4.16

Supondo que somente o compartimento central tenha excreção $k_{10} = 0{,}746$; $k_{12} = 1{,}709$; $k_{21} = 2{,}065$; $k_{13} = 1{,}255$; $k_{31} = 0{,}325$, determine $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ para $t \geqslant 0$ se $u_1(t) = \delta(t)$, $u_2(t) = u_3(t) = 0$ e $b_1 = 1$, com $x_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Solução: O sistema geral é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_2} = -(k_{10} + k_{12} + k_{13}) + k_{21}x_2 + k_{31}x_3 + b_1u_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = k_{12}x_1 - (k_{20} + k_{21})x_2 + b_2u_2(t) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = k_{13}x_1 - (k_{30} + k_{31})x_3 + b_3u_3(t) \end{cases}$$

Em nosso caso particular, temos

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3{,}710\,x_1 + 2{,}065\,x_2 + 0{,}325\,x_3 + \delta(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 1{,}709\,x_1 - 2{,}065\,x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 1{,}255\,x_1 - 0{,}325\,x_3 \end{cases}$$

Usando a transformada de Laplace, obtemos o sistema algébrico

$$\begin{aligned} (s + 3{,}710)\,X_1(s) - 2{,}065\,X_2(s) - 0{,}325\,X_3(s) &= 1 \\ -1{,}709\,X_1(s) + (s + 2{,}065)X_2(s) &= 0 \\ -1{,}255\,X_1(s) + (s + 0{,}325)X_3(s) &= 0 \end{aligned}$$

De onde tiramos

$$X_1(s) = \frac{(s + 2{,}065)\,(s + 0{,}325)}{s^3 + 6{,}1s^2 + 5{,}6s + 0{,}5} = \frac{(s + 2{,}065)\,(s + 0{,}325)}{(s + 5)\,(s + 1)\,(s + 0{,}1)}$$

$$X_2(s) = \frac{1{,}709\,(s + 0{,}325)}{(s + 5)\,(s + 1)\,(s + 0{,}1)}$$

$$X_3(s) = \frac{1{,}255\,(s + 2{,}065)}{(s + 5)\,(s + 1)\,(s + 0{,}1)}$$

Tomando as frações parciais de cada expressão acima, obtemos

$$X_1(s) = \frac{0{,}7}{s + 5} + \frac{0{,}2}{s + 1} + \frac{0{,}1}{s + 0{,}1} \quad \text{e portanto}$$

$x_1(t) = 0{,}7\,e^{-5t} + 0{,}2\,e^{-t} + 0{,}1\,e^{-0{,}1t}$. Analogamente obtemos

$$x_2(t) = -0{,}408\,e^{-5t} + 0{,}320\,e^{-t} + 0{,}088\,e^{-0{,}1t}$$

$$x_3(t) = -0{,}188\,e^{-5t} - 0{,}371\,e^{-t} + 0{,}559\,e^{-0{,}1t}$$

■

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 3 resolva os sistemas lineares, aplicando a transformada de Laplace. Compare com o método do Capítulo 4, Secção 4.5.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + \delta(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = bx - ay \end{cases}$ onde $\delta(t)$ é a função de Dirac

4. Resolva o sistema mamilar de 3 compartimentos (conforme o Exemplo 3) considerando $u_1(t) = \delta(t)$, $u_2(t) = 2\delta(t)$ e $u_3(t) = 3\delta(t)$:

$k_{10} = k_{20} = k_{30} = 0$
$k_{12} = 2,\ k_{21} = 4,\ k_{13} = 3,\ k_{31} = 1$
$b_1 = b_2 = b_3 = 1$

Capítulo 5

EQUAÇÕES NÃO LINEARES — ESTUDO QUALITATIVO

Vossas Eminências se expressam em termos de círculos, elipses e velocidades regulares — movimentos simples que a mente pode imaginar, muito conveniente de fato. Mas suponha agora que o Criador decidisse fazer com que as estrelas se movimentassem como isto... (Ele descreve então com seu indicador um movimento irregular no ar)... E então, como ficaríamos?

B. Brecht
Galileu Galilei

5.1 INTRODUÇÃO

Não existem métodos sistemáticos que possam resolver o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

quando as funções f_i não forem lineares em $x_1, \ldots, x_n$. Entretanto, em boa parte das aplicações reais, não é necessário conhecer expressões analíticas para as soluções $x(t)$ do Sistema (1), e sim algumas de suas propriedades. Vejamos um exemplo.

Competição entre duas espécies de populações (modelo particular de Lotka-Volterra)

Consideremos duas espécies vivendo num mesmo *habitat*, competindo pelos mesmos meios (alimento limitado e espaço) para sua sobrevivência.

Se não houvesse restrição de recursos, as populações $x_1(t)$ e $x_2(t)$ cresceriam de acordo com a Lei de Malthus, isto é

$$x_1(t) = x_1^0 e^{k_1 t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = x_2^0 e^{k_2 t}$$

onde k_1 e k_2 são as taxas de crescimento das espécies $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente. Agora, vamos supor que quando as populações aumentam, a quantidade de recursos diminui proporcionalmente a esse aumento, afetan-

do diferentemente cada espécie. Assim, se os recursos diminuem na proporção a_1x_1 para a primeira espécie e a_2x_2 para a segunda espécie, temos que a diminuição total será de $a_1x_1 + a_2x_2$. Um modelo proposto pelo matemático italiano V. Volterra (1860-1940) e por A.J. Lotka† é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = k_1x_1 - b_1(a_1x_1 + a_2x_2)x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = k_2x_2 - b_2(a_1x_1 + a_2x_2)x_2 \end{cases} \tag{2}$$

com $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ e a_1, a_2, b_1 e b_2 reais positivos.

Vemos que o Sistema (2) é não linear, o que torna os métodos de resolução vistos no Capítulo 4 inadequados. Mas, neste caso, estamos mais interessados em conhecer o "comportamento" das populações, e não seus valores em cada instante t. Assim, levantamos algumas questões para determinar se uma das espécies sobrepujará a outra levando-a à extinção, ou se ambas viverão no mesmo *habitat* para sempre (*comportamento assintótico*). Desejamos saber ainda se existem valores $x_1(t) = x_1^*$ e $x_2(t) = x_2^*$, satisfazendo o Sistema 2, que se mantêm inalterados com o tempo (*pontos de equilíbrio de* (2)).

Outra questão que surge, quando as duas espécies estão coexistindo em equilíbrio, é o que acontecerá com as populações futuras se acrescentarmos (ou retirarmos) alguns elementos de uma mesma espécie (*estabilidade*).

Estas questões podem ser esclarecidas sem resolvermos o Sistema (2).

Observemos que toda solução $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ de (2) define uma curva no espaço tridimensional-tx_1x_2, dada pelos pontos $(t, x_1(t), x_2(t))$. Por outro lado, o conjunto dos pontos $(x_1(t), x_2(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, também define uma curva no plano-x_1x_2, denominada a *trajetória ou órbita* da solução $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, e o plano-x_1x_2 é chamado *plano de fase das soluções* do Sistema (2). Assim, podemos pensar na trajetória $(x_1(t), x_2(t))$ como o percurso da solução no plano-x_1x_2.

Para determinar as soluções constantes de (2) devemos considerar

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx_2}{dt} = 0$$

ou seja

$$\begin{cases} (k_1 - b_1a_1x_1 - b_1a_2x_2)x_1 = 0 \\ (k_2 - b_2a_1x_1 - b_2a_2x_2)x_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

de onde obtemos os pontos, soluções de (3)

$$(0, 0), \left(\frac{k_1}{b_1a_1}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(0, \frac{k_2}{b_2a_2}\right)$$

† VOLTERRA, V. *Leçons sur la Théorie Mathematique de la Lute pour la Vie*. Paris, Gauthier-Villars, 1931.

LOTKA, A.J. *Elements of Physical Biology*. Baltimore, Williams & Wilkins, 1925.

Além destas soluções, haveria uma outra solução constante se as retas

$$x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{k_1}{a_2 b_1} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{k_2}{a_2 b_2}$$

não fossem paralelas (intersecção das retas!).

Geometricamente, estas soluções constantes podem ser representadas como pontos no plano-x_1x_2; elas são denominadas *pontos críticos ou de equilíbrio*. No mesmo plano podemos visualizar uma solução do Sistema (2) como um ponto (x_1, x_2) deslocando-se em função do tempo t tomado como parâmetro. No tempo $t = 0$, as populações iniciais das duas espécies fornecem o ponto inicial (x_1^0, x_2^0).

Vamos supor que $\frac{k_2}{b_2} > \frac{k_1}{b_1}$ (ver Figura 5.1).

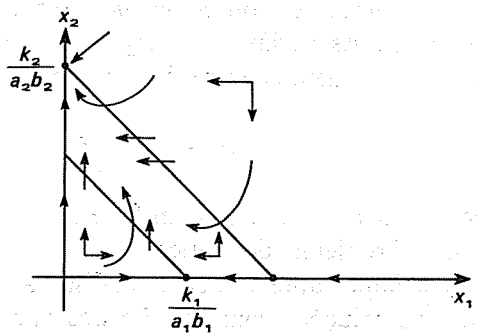


Figura 5.1

A análise do crescimento da curva no plano de fase depende essencialmente dos sinais das derivadas dadas pelo Sistema (2):

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad \text{se} \quad \dot{x}_1 > 0 \\ &\leftarrow \quad \text{se} \quad \dot{x}_1 < 0 \\ &\uparrow \quad \text{se} \quad \dot{x}_2 > 0 \\ &\downarrow \quad \text{se} \quad \dot{x}_2 < 0 \end{aligned}$$

Se o ponto inicial for $(0, 0)$ então, do Sistema (2)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$$

Logo

$$x_1(t) = x_2(t) = k = 0$$

e, portanto, não existe nenhuma população em qualquer instante.

Se $x_1^0 \neq 0$ e $x_2^0 = 0$ então, na verdade, não existe competição entre as duas espécies e a espécie (1) tende a uma população limite igual a $x_1^\infty = \frac{k_1}{a_1 b_1}$.

Se $x_2^0 \neq 0$, a espécie (1) tende à extinção, enquanto que a espécie (2) tende a uma população limite $x_2^\infty = \frac{k_2}{a_2 b_2}$.

Quando $\frac{k_2}{b_2} < \frac{k_1}{b_1}$, um raciocínio análogo mostra que a espécie (2) é que tende à extinção, enquanto que a espécie (1) tende a $x_1^{\infty} = \frac{k_1}{a_1 b_1}$. Outras situações menos particulares do modelo de competição entre espécies serão desenvolvidas na Secção 5.6.

5.2 SISTEMAS AUTÔNOMOS

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

é denominado *sistema dinâmico* (ou *autônomo*, pois as funções f_i não dependem explicitamente do tempo t). As variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as *variáveis de estado* do sistema. Resumidamente podemos escrevê-lo na forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \; x \in \mathbb{R}^n$$

O estudo destas equações é feito com base no Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para o Problema de Cauchy.

Neste estudo é importante também analisar a dependência analítica e qualitativa (geométrica) das soluções com relação aos parâmetros que fazem parte na definição do campo e das condições iniciais. Do ponto de vista prático, este aspecto tem a sua razão, pelo fato de que estes parâmetros representam sempre valores que são medidas aproximadas e a influência de erros nos valores utilizados deve ser prevista.

Em outras situações consideramos a *variação dos parâmetros* deliberadamente para mudar o comportamento do sistema dinâmico; um exemplo típico é a sintonização do oscilador *RLC* pela variação da capacitância.

Para analisar o problema da variação dos parâmetros dispomos do seguinte teorema, que é fundamental na teoria das equações diferenciais ordinárias.

Teorema de Existência, Unicidade e Dependência de Parâmetros para Soluções do Problema de Cauchy "Seja $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ definido e continuamente diferenciável com relação a $(\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ em uma vizinhança de $(0, 0)$.

Então, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tal que para todo $\| \lambda \| < \delta_2$ existe uma única solução de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

definida em um intervalo $t \in (-\delta_1, \delta_1)$ e $\mathbf{x}(t, \lambda)$ é uma função continuamente diferenciável com relação a t e λ."

A demonstração deste teorema será feita no Capítulo 6 (Secção 6.3.4).

Apresentaremos a seguir algumas observações que fornecerão ao leitor uma perspectiva do alcance e da limitação deste teorema.

a. A existência da solução é local, isto é, o teorema garante a existência de solução apenas em um "pequeno" intervalo em torno de $t=0$. A extensão deste intervalo depende de estimativas com relação ao campo f. O que geralmente impede a existência da solução para todo $t>0$ é o fato de que a trajetória pode, em tempo finito, atingir a fronteira (finita ou infinita) da região onde f está definida.

Por exemplo, o sistema dinâmico que descreve o movimento de corpos celestes sob ação da gravitação mútua pode ter uma solução que leva à colisão destes corpos. É de se esperar que não seja possível estender esta trajetória além do instante de colisão!

Um exemplo analítico bem mais simples é $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{x}$, onde o campo é definido na região $x>0$ e cuja solução é facilmente obtida: $x(t)=\sqrt{x_0^2+t_0-t}$ e só existe para $t<x_0^2+t_0$. Analise esta questão para a equação de Riccati $\dot{x}=1+x^2$ tratada no Capítulo 2.

b. O teorema acima abrange vários casos que não são evidentes à primeira vista, como por exemplo a dependência da solução com relação às condições iniciais:

Considere o seguinte problema geral

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}=F(\mathbf{x},t,\gamma)\\ \mathbf{z}(t_0)=\mathbf{z}_0\end{cases} \tag{2}$$

Então a função com valores em $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathbf{x}(t)=(\bar{\mathbf{x}}(t),\ x_{n+1}(t))$$

onde

$$\begin{cases}\bar{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{z}(t+t_0)-\mathbf{z}_0\\ \mathbf{x}_{n+1}(t)=t\end{cases}$$

é uma solução de um problema de Cauchy do tipo

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x},\lambda)\\ \mathbf{x}(0)=0\end{cases}$$

pois

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=(\dot{\mathbf{z}}(t+t_0),1)=(F(\mathbf{z}(t+t_0),t+t_0,\gamma),1)$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}}=(F(\bar{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{z}_0,\ x_{n+1}+t_0,\gamma),\ 1)$$

e portanto

$$\mathbf{x}=(\bar{\mathbf{x}},x_{n+1})$$
$$\lambda=(\gamma,\mathbf{z}_0,t_0)$$
$$f(\mathbf{x},\lambda)=(F(\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{z}_0,x_{n+1}+t_0,\gamma),1)$$

$\left(\text{Observe que } \frac{dx_{n+1}}{dt}=1 \text{ e, portanto, } x_{n+1}=t+c, \text{ mas como } x_{n+1}(0)=0 \text{ vem que } x_{n+1}=t.\right)$

Portanto, mesmo para casos bem gerais, é suficiente tratarmos do Sistema simplificado (1).

c. Se f tem derivadas contínuas de ordem superior com relação a λ, é fácil ver que o mesmo acontecerá com $\mathbf{x}(t,\lambda)$, solução de (1). Para isto usamos o Teorema de Existência e derivamos a equação diferencial com relação a λ, invertendo a ordem de derivação, de onde tiramos (suponha $\lambda\in\mathbb{R}$ para simplificar a notação)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\dot{\mathbf{x}}(t,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x(t,\lambda),\lambda)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\lambda}\right)=\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t,\lambda),\lambda)\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial f}{\partial\lambda}$$

Mas então $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\lambda}$ satisfaz uma equação diferencial linear com condições iniciais $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\lambda}(0,\lambda)=0$ e,

portanto, o mesmo teorema pode ser aplicado a $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ para garantir a sua diferenciabilidade com relação a λ; daí a dupla diferenciabilidade de $\mathbf{x}(t, \lambda)$.

Se f tem várias derivadas com relação a λ, podemos aproximar $\mathbf{x}(t, \lambda)$ pela expansão de Taylor com relação a λ:

$$\mathbf{x}(t, \lambda) \cong \mathbf{x}(t, 0) + \lambda \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(t, 0) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \lambda^2}(t, 0) + \ldots$$

o que é de grande importância em vários casos onde temos soluções explícitas apenas para $\lambda = 0$, isto é, $\mathbf{x}(t, 0)$. Observe que $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}$ e $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \lambda^2}$ satisfazem equações lineares que são muito mais simples, em geral, do que a equação não linear para $\mathbf{x}(t, \lambda)$.

Este método de aproximação é chamado *método de perturbação regular*. O exemplo seguinte pode esclarecer melhor o que queremos dizer.

EXEMPLO 1

Considere o problema de Cauchy para $\lambda \cong 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \lambda f(t) x \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

que *não* tem solução explícita em geral.

Sabemos, todavia, que sendo o campo infinitamente diferenciável com relação a λ então $x(t, \lambda)$ também será. Portanto, podemos considerar aproximações de $x(t, \lambda)$ até ordem m por meio de polinômios de Taylor na forma

$$x(t, \lambda) \cong \sum_{k=0}^{m} x_k(t) \lambda^k$$

onde

$$x_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k x}{\partial \lambda^k}(t, 0)$$

$$x_0(t) = x(t, 0) \text{ é solução de } \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

e pode ser facilmente calculada: $x_0(t) = t + 1$.

Derivando a equação com relação a λ e fazendo $\lambda = 0$ obtemos

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = f(t) x_0(t) = (t + 1) f(t) \\ x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases}$$

que é facilmente resolvida por integração.

Observe que as condições iniciais para x_k devem ser nulas. ■

Como exercício, obtenha uma relação recursiva para o cálculo de $x_{k+1}(t)$ em termos de $x_k(t)$. Calcule a aproximação até terceira ordem, no caso em que $f(t) = e^{-t}$. Observe que para o cálculo de $\frac{\partial^k x}{\partial \lambda^k}(t, 0)$ devemos resolver uma equação *linear* que envolve as funções $\frac{\partial^j x}{\partial \lambda^j}(t, 0)$, $(j < k)$, o que indica o caráter recursivo e linear do método.

d. Em muitos casos o parâmetro de interesse é a própria condição inicial do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{3}$$

cuja solução é denotada por $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.

Derivando ambas as equações para $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ com relação a x_{0j}, com base no teorema, temos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_{0j}}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t, x_0))\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_{0j}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_{0j}}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{e}_j \end{cases}$$

e, portanto, a matriz $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}(t, \mathbf{x}_0)$ é solução do problema fundamental de Cauchy para a equação matricial linear (que é chamado problema variacional para $f(\mathbf{x})$)

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = A(t, \mathbf{x}_0)U \\ U(0) = I \end{cases}$$

onde $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$; $A_{ij}(t, \mathbf{x}_0) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$.

e. Dentre as várias maneiras existentes para a demonstração do Teorema de Existência podemos escolher a que utiliza essencialmente os argumentos do método de Newton para o cálculo de raízes de funções reais. A diferença é que neste caso a incógnita é uma função e não um número, conforme apresentaremos no Capítulo 6.

A semelhança formal entre estes problemas fica clara quando verificamos a equivalência do problema de Cauchy (1) com a equação

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t f(\mathbf{x}(\gamma), \lambda)d\tau$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) - \int_0^t f(\mathbf{x}(\tau), \lambda)d\tau = 0$$

ou

$$N(\mathbf{x}, \lambda) = 0$$

O objetivo é, então, obter a "raiz" $\mathbf{x}$ da equação funcional em termos do parâmetro λ, sem esquecer que $\mathbf{x}$ representa uma função de t.

Este ponto de vista é uma extensão não linear do método operacional de Heaviside estudado nos Capítulos 3 e 4.

f. Se $f(\mathbf{x}, \lambda)$ é continuamente diferenciável em $\mathbf{x}$ e apenas contínua com relação a λ, o teorema ainda é válido, se substituirmos *diferenciabilidade* de $\mathbf{x}(t, \lambda)$ com relação a λ por *continuidade*.

g. A dependência uniforme de $\mathbf{x}(t, \lambda)$ em $[a, b] \times [0, \delta]$ significa que as órbitas definidas por $\mathbf{x}(t, \lambda)$, $t \in [a, b]$, se mantêm próximas no espaço de fase com pequenas variações de λ formando o que se denomina de "tubo de *fluxo*".

Esta uniformidade de aproximação pode não ocorrer se tomarmos trajetórias definidas em um intervalo infinito. Um exemplo simples é dado pela equação

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

cujas soluções $x(t, x_0) = x_0 e^t$ dependem de x_0 uniformemente (em t) apenas em intervalos finitos prefixados.

Para que $|x(t, x_0) - x(t, 0)| < \varepsilon$, para todo $|t| < T$, é necessário apenas que $|x_0| < \varepsilon e^{-T}$. Esta estimativa, entretanto, tende para zero com T crescente (ver Figura 5.2b).

Esta não uniformidade a "longo prazo" é responsável pelas mudanças qualitativas observadas no plano de fase global de alguns sistemas dinâmicos, quando determinados parâmetros são variados. Isto será exemplificado no estudo da equação Van der Pol, que será introduzida mais adiante.

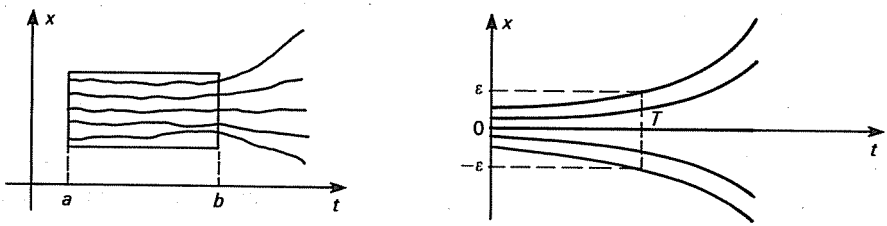


Figura 5.2 (a) (b) Soluções de $\dot{x} = x$, $t \geq 0$ e $x(0) = x_0$

h. O problema de Cauchy para equações de ordem superior não autônomas do tipo

$$\begin{cases} z^{(n)} = F(z, z^{(1)}, \ldots, z^{(n-1)}, t, \lambda) \\ z(t_0) = \alpha_0 \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

podem ser automàticamente tratados pelo Teorema de Existência se considerarmos, tal como no Capítulo 4, o problema de Cauchy para o sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t, \lambda) \\ \mathbf{x}(t_0) = \alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \end{cases}$$

onde, $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = z'(t) \ldots x_n(t) = z^{(n-1)}(t)$

$$f_1(\mathbf{x}, t, \lambda) = x_2 \quad f_2(\mathbf{x}, t, \lambda) = x_3 \quad \ldots \quad f_n(\mathbf{x}, t, \lambda) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \lambda)$$

i. Se, na equação $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda_0)$, $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ é um zero de f para um determinado $\lambda^0 \in \mathbb{R}^n$ então a *única solução que passa* pelo ponto $\mathbf{x}^0$ é $\mathbf{x}(t) = x^0$ (constante) pois ela é a (única) solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda_0) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \qquad \text{para qualquer } t_0!$$

O ponto $\mathbf{x}^0$ é chamado *ponto de equilíbrio* ou *ponto crítico* do campo vetorial $f(\mathbf{x}, \lambda_0)$.

EXERCÍCIOS

1. A equação do movimento de uma massa com relação a um sistema de referência fixo à Terra (não inercial, portanto) deve levar em conta as forças fictícias assim introduzidas. Considerando apenas a força de Coriolis, a equação do movimento será

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g} + 2\,\dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega}$$

onde ω é o vetor velocidade angular da Terra; $\| \omega \| = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ rad/s, e $\mathbf{g}$ a aceleração da gravidade (que representa em alguns casos um efeito muito pequeno).

Então a solução de um problema de valor inicial para esta equação pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x}(t, \omega) = \mathbf{x}(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathbf{x}(t, 0) + \Sigma \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \omega_j}(t, 0)\omega_j + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) =$$

$$= \mathbf{x}_0(t) + x_1(t)\omega_1 + x_2(t)\omega_2 + x_3(t)\omega_3 + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$$

onde $\mathbf{x}_0(t)$ representa a queda livre e x_1, x_2, x_3 os efeitos de primeira ordem da força Coriolis. Analise este efeito. (Compare este resultado com o mesmo problema analisado no Capítulo 4.)

2. Considere agora o problema do pêndulo não linear

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\operatorname{sen} x \\ x(0) = \varepsilon \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

cuja solução $x(t, \varepsilon)$ depende de ε diferenciavelmente em qualquer ordem e, portanto, podemos escrever

$$x(t, \varepsilon) = x(t, 0) + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, 0)\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2}(t, 0)\varepsilon^2 + \ldots$$

Pelo Teorema de Existência

$$x(t, 0) + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, 0)\varepsilon + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2}(t, 0)\varepsilon^2 + \ldots = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t)$$

aproxima a solução uniformemente em qualquer intervalo finito para t. Obtenha x_0, x_1, x_2, x_3.

Mas como a solução procurada é periódica, interessa-nos que a aproximação seja uniforme para $t > 0$. Entretanto, verificamos que a existência de termos do tipo $t \cos t$ ou $t \operatorname{sen} t$ (chamados seculares) impede esta uniformidade "a longo prazo".

O que devemos observar é que nesta expansão os termos $x_k(t)$ serão soluções do oscilador harmônico com termos forçantes de mesmo período e, portanto, teremos expressões do tipo quase polinômios de freqüência 1. Entretanto, *não* é razoável esperar que a solução periódica do pêndulo *não* linear tenha o mesmo período das soluções do pêndulo linear; pelo contrário, devemos esperar que o período seja uma função de ε.

Com base nestas observações Poincaré obteve aproximações uniformes para $t > 0$ da solução periódica do pêndulo não linear, dando origem a uma técnica denominada de *perturbação regularizada*, que é amplamente utilizada em Matemática Aplicada. O leitor interessado poderá consultar as referências†.

Consideremos agora o sistema de segunda ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \tag{4}$$

onde F e G são funções contínuas de x e y, com derivadas parciais contínuas; $(F(x, y), G(x, y))$ é um campo vetorial no plano-xy, as órbitas são as curvas integrais desse campo e, portanto, em cada ponto, são curvas tangentes ao campo (ver Figura 5.3).

É freqüentemente possível obter a órbita de uma solução sem conhecermos a própria solução. Seja $x = x(t)$, $y = y(t)$ uma solução do Sistema (4). Se $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ em $t = t_*$, então podemos tirar o valor de $t = t(x)$ numa vizinhança do ponto $x_* = x(t_*)$ e, desta forma, para t próximo de t_*, a órbita da solução $x = x(t)$, $y = y(t)$ é a curva $y = y(t(x))$.

---

† BELLMAN, R. *Perturbation Techniques in Mathematics Engineering and Physics*. New York, Dover, 1972.

LIN, C.C. & Segel, L.A. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in Natural Sciences*. New York, Macmillan, 1974.

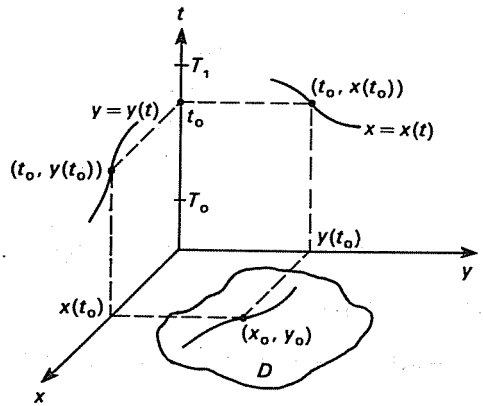


Figura 5.3 Órbita de uma solução no espaço de fase $(x, y) \in m^2$ e no espaço de fase estendido (x, y, t)

Como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{G(x, y)}{F(x, y)}$, as *órbitas* das soluções de (1) são as curvas-soluções da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \tag{5}$$

EXEMPLO 2

As órbitas do sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -w^2 x \end{cases}$$

são as curvas-soluções da equação

$$\frac{dy}{dx} = -w^2 \frac{x}{y}$$

que é uma equação separável, e toda solução é da forma

$$x^2 + \left(\frac{y}{w}\right)^2 = c^2$$

onde c é constante arbitrária (são elipses no plano-xy). Verifique!

Observação:

Uma curva-solução de (5) é uma órbita de (4) somente se as derivadas $\dfrac{dx}{dt}$ e $\dfrac{dy}{dt}$ não se anulam simultaneamente sobre a solução. Se um ponto de equilíbrio de (4) pertence a uma curva-solução de (5), este ponto divide a curva-solução em órbitas distintas e cada ponto de equilíbrio é uma órbita. Neste exemplo, as órbitas são todas as elipses

$$x^2 + \left(\frac{y}{w}\right)^2 = c^2 \text{ com } c \neq 0, \text{ e o ponto } (0, 0)$$

■

EXEMPLO 3

Dado o sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$$

verificamos facilmente que $x = x_0 e^{-t}$ e $y = y_0 e^{2t}$ é uma solução do sistema, satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.

A equação diferencial do plano de fase

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{y}{x}$$

é separável e pode ser resolvida diretamente

$$\ln|y| = -2\ln|x| + c, \text{ ou seja } y = \frac{k}{x^2}$$

Assim, as órbitas são as hipérboles $y = \dfrac{k}{x^2}$ $(k \neq 0)$, as semi-retas $y = 0$ e $x > 0$, $y = 0$ e $x < 0$, $x = 0$ e $y > 0$, $x = 0$ e $y < 0$ e o ponto de equilíbrio $(0, 0)$, conforme mostra a Figura 5.4.

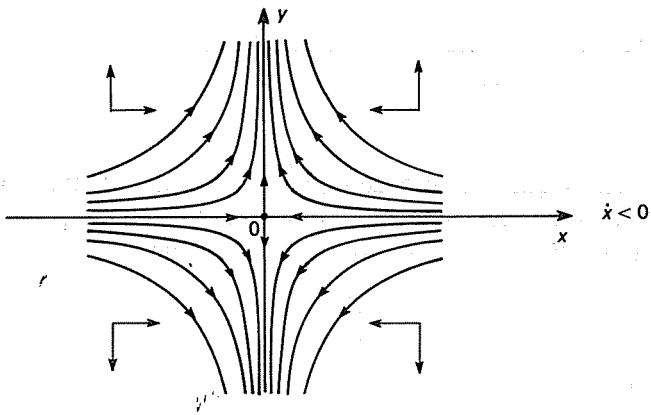


Figura 5.4

Neste caso, observamos que: se $y_0 > 0$ e $x_0 \neq 0$, então

$$x_\infty = \lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \quad \text{e} \quad y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t) = \infty$$

se $y_0 < 0$ e $x_0 \neq 0$ então $x_\infty = 0$ e $y_\infty = -\infty$;
se $y_0 = 0$ e $x_0 \neq 0$ então $x_\infty = 0$ e $y(t) \equiv 0$;
se $y_0 \neq 0$ e $x_0 = 0$ então $x(t) \equiv 0$ e $y_\infty = \infty$ (se $y_0 > 0$) e $y_\infty = -\infty$ (se $y_0 < 0$);
se $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ então $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. ■

Como vimos, para determinarmos as órbitas do Sistema autônomo (4) podemos em geral recorrer às equações diferenciais

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

Entretanto, em um ponto (x^*, y^*) em que $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$, as expressões acima perdem o significado. Denominamos estes pontos de *críticos*, os quais devem ter um tratamento especial.

Se (x^*, y^*) for um ponto crítico de (4) então $x(t) = x^*$ e $y(t) = y^*$ é uma solução do sistema e tal solução constante é a única que passa pelo ponto (x^*, y^*) (ver observação (*i*)).

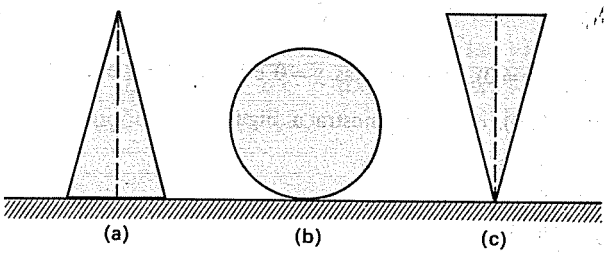
A órbita desta solução constante é o próprio ponto crítico e nesta posição dizemos que a partícula que descreve a trajetória está em equilíbrio ou em repouso.

É interessante, do ponto de vista qualitativo, saber se esta posição de equilíbrio é estável, isto é, se uma pequena perturbação na posição de equilíbrio da partícula resultará em um retorno ou em um afastamento desta posição (ver Figura 5.4).

Significados mais precisos para estes conceitos serão dados a seguir pelas definições de estabilidade, no sentido de Lyapunov para sistemas autônomos gerais.

Considere então um sistema autônomo $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nas vizinhanças do ponto crítico $\mathbf{x}_0$, satisfazendo as condições do Teorema de Existência.

Então, $f(\mathbf{x}_0) = 0$ e $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ é a solução de equilíbrio.



(a) Equilíbrio assintoticamente estável
(b) Equilíbrio estável
(c) Equilíbrio instável

Figura 5.5

Definição 1 Dizemos que o ponto de equilíbrio x_0 do sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ é *estável* se, dado $\varepsilon > 0$, é possível determinar um $\delta > 0$ dependente apenas de ε tal que se $\| \zeta - \mathbf{x}_0 \| < \delta$, a solução $\mathbf{x}(t, \zeta)$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \zeta \end{cases}$$

existe para $t > 0$ e

$$\| \mathbf{x}(t, \zeta) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \| = \| \mathbf{x}(t, \zeta) - \mathbf{x}_0 \| < \varepsilon$$

para todo $t > 0$.

Em outras palavras, todas as soluções que partem suficientemente próximas de $\mathbf{x}_0$ são definidas para todo $t > 0$ e se mantêm perto deste ponto.

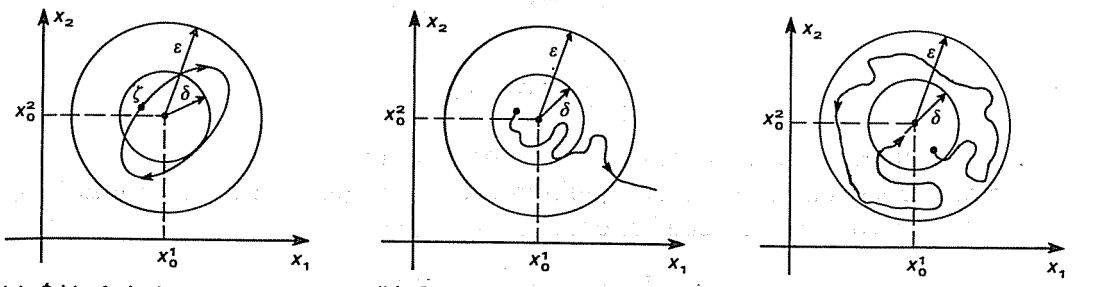
Observe que a solução de equilíbrio existe para todo $t > 0$, e a estabilidade desta solução pode ser interpretada como uma continuidade uniforme (para $t > 0$) das soluções com respeito às condições iniciais, isto é, para condições iniciais suficientemente próximas de $\mathbf{x}_0$ a solução do problema de Cauchy existe para todo $t > 0$ e se mantém uniformemente próxima da solução de equilíbrio (ver Figuras 5.6a e 5.7).

Definição 2 Dizemos que o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0$ de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ é *assintoticamente estável* se for estável tal como na Definição 1 e, além disto,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t, \zeta) = \mathbf{x}_0$$

Compare esta definição com aquela correspondente à estabilidade assintótica dos Capítulos 3 e 4 (ver Figura 5.6c).

Um ponto crítico é *instável* se não satisfizer as conclusões da Definição 1, ou seja, existe um $\varepsilon > 0$ e pelo menos uma solução do sistema que não permanece *indefinidamente* na bola $\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < \varepsilon$ (ver Figura 5.6b).



(a) Órbita fechada em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2)$

(b) O ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2)$ é instável

(c) Órbitas que nascem suficientemente próximas de $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2)$ se aproximam deste ponto quando $t \to \infty$

Figura 5.6

A análise qualitativa de sistemas autônomos não lineares exige um conhecimento preliminar e detalhado do comportamento das soluções de sistemas lineares que é, então, um primeiro passo necessário, não só do ponto de vista pedagógico, como também do ponto de vista técnico.

No Capítulo 4 desenvolvemos métodos essencialmente analíticos e algébricos que produziam a solução completa dos sistemas lineares. Entretanto, na Secção 5.3, a nossa preocupação estará voltada principalmente para o aspecto geométrico e qualitativo destas soluções, que será apresentado com ênfase nos sistemas em $\mathbb{R}^2$, por razões de comodidade gráfica e pela maior quantidade de resultados específicos que se obtêm neste caso.

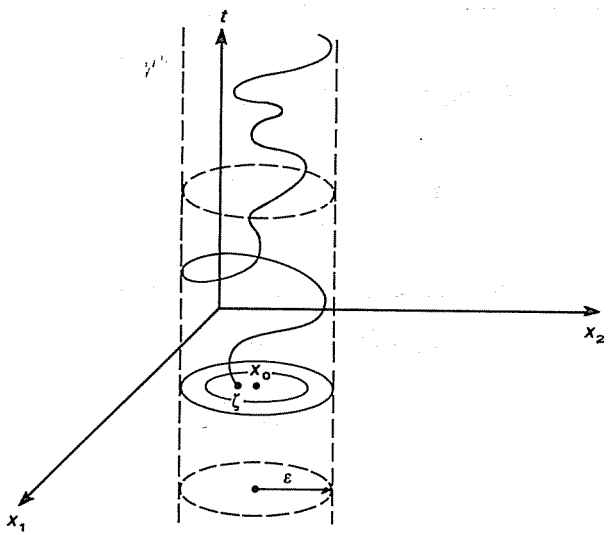


Figura 5.7 Estabilidade no espaço $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

5.3 SISTEMAS AUTÔNOMOS LINEARES — ESTUDO QUALITATIVO NO PLANO

Um sistema autônomo linear de segunda ordem é da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \tag{1}$$

onde os coeficientes a, b, c, d são considerados constantes.

Para este sistema, o ponto de equilíbrio é a origem $(0, 0)$. Este ponto é *isolado*, isto é, é o único ponto de equilíbrio de (1) no disco

$$B_\varepsilon(0, 0) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < \varepsilon\}$$

se $ad - bc \neq 0$. De fato, o sistema $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$

tem solução $\{x = 0, y = 0\}$ única se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Vamos resolver o Sistema (1) usando o método de eliminação.

Podemos reduzir o Sistema (1) numa equação diferencial de segunda ordem. Supondo que $b \neq 0$, tiramos o valor de y na primeira equação do Sistema (1)

$$y = \frac{1}{b}\frac{dx}{dt} - \frac{a}{b}x$$

Agora, derivando ambos os membros desta equação e substituindo o valor de $\dfrac{dy}{dt}$ dado na primeira equação do Sistema (1), obtemos

$$cx + d\left(\frac{1}{b}\frac{dx}{dt} - \frac{a}{b}x\right) = \frac{1}{b}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a}{b}\frac{dx}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a + d)\frac{dx}{dt} + (ad - bc)x = 0$$

O polinômio característico associado a esta equação é dado por

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = \frac{(a + d) + \sqrt{(a + d)^2 - 4\,(ad - bc)}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{(a + d) - \sqrt{(a + d)^2 - 4\,(ad + bc)}}{2}$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução geral de (1) é dada por

$$x(t) = A\, e^{\lambda_1 t} + B\, e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = A\, \frac{\lambda_1 - a}{b}\, e^{\lambda_1 t} + B\, \frac{\lambda_2 - a}{b}\, e^{\lambda_2 t}$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2$, a solução geral de (1) é dada por

$$x = (A_1 + A_2 t)\, e^{\lambda t}$$

e

$$y = (B_1 + B_2 t)\, e^{\lambda t}$$

onde $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, e apenas duas das constantes A_1, B_1, A_2 e B_2 são independentes.

Observação:

O fato de supormos $ad - bc \neq 0$ nos dá $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

Se $b = 0$, resolvemos diretamente a primeira equação e encontramos $x(t) = Ae^{at}$. Substituindo este valor na segunda equação encontramos

$$y(t) = Be^{dt} + \frac{cA}{a - d}\, e^{at} \qquad \text{se} \qquad d \neq a$$

ou

$$y(t) = Be^{dt} + cA\, e^{dt} \qquad \text{se} \qquad d = a$$

De uma maneira geral a solução do Sistema (1) é dada por

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},\ y(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \tag{2}$$

onde entre cada duas constantes, A_1, B_1 e A_2, B_2, apenas uma é independente.

Desta forma, o estudo da natureza do ponto crítico $(0, 0)$ fica restrito ao comportamento dos valores de λ_1 e λ_2, pois será:

1. estável, se x e y permanecerem limitados, quando $t \to +\infty$;
2. assintoticamente estável se $x \to 0$ e $y \to 0$, quando $t \to +\infty$;
3. instável se $x \to \infty$ ou $y \to \infty$, quando $t \to +\infty$.

Podemos simplificar as várias alternativas em relação ao comportamento das raízes λ_1 e λ_2, colocando

$$\Delta = (a + d)^2 - 4\,(ad - bc)$$

$$p = (a + d) \qquad \text{e} \qquad q = (ad - bc) \neq 0$$

Uma variação dos sinais de Δ, p e q nos leva a tipos de estabilidades diferentes. Senão vejamos:

1. Raízes λ_1 e λ_2 reais e distintas $(\Delta > 0)$.

a. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal $(q > 0)$:

(*i*) $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ $(p > 0) \Rightarrow$ ponto instável
(*ii*) $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ $(p < 0) \Rightarrow$ ponto assintoticamente estável

O ponto de equilíbrio, neste caso, é denominado *nó* ou *nódulo*.

EXEMPLO 1

O sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

tem como solução geral $x = Ae^{2t}$, $y = Be^{t}$ $(\lambda_1 = 2\ \lambda_2 = 1)$.

As órbitas do sistema dado são as curvas $y = k\,x^{1/2}$ $(k \neq 0)$, os semi-eixos cartesianos e o ponto (0, 0) (ver Figura 5.8).

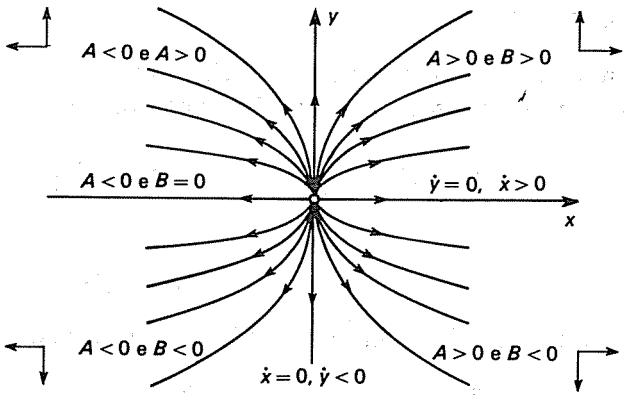


Figura 5.8 Nó instável

O ponto de equilíbrio (0, 0) é instável (*nó instável* ou *fonte*). ■

EXEMPLO 2

O sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \\ \dfrac{dy}{dt} = by \end{cases}$$

tem como solução geral

$x = Ae^{at}$ e $y = Be^{bt}$ $(\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = b)$; se $a < 0$ e $b < 0$,

temos que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

e o ponto (0, 0) será assintoticamente estável (*nó estável* ou *atrator*). ■

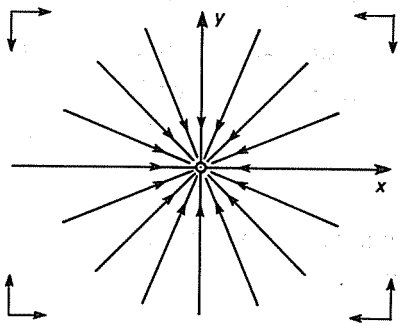


Figura 5.9 Órbitas do sistema (4) com $a = b < 0$

b. λ_1 e λ_2 têm sinais opostos ($q<0$):

$$\lambda_1>0 \text{ e } \lambda_2<0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda_1<0 \text{ e } \lambda_2>0$$

Tomando a Expressão geral (2) da solução do Sistema (1), observamos que para alguns valores das constantes A_1, B_1 e A_2, B_2 é possível que $x(t)\to 0$ e $y(t)\to 0$ quando $t\to\infty$, enquanto que com outros valores destas constantes $x(t)$ ou $y(t)$ se tornam ilimitados. Neste caso, o ponto de equilíbrio é denominado *ponto de sela* (equilíbrio instável).

EXEMPLO 3

O sistema autônomo

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-y\end{cases}$$

tem como solução geral $\{x(t)=A\,e^{t}+B\,e^{-t},\ y(t)=B\,e^{-t}\}$, onde A e B são constantes arbitrárias. Temos que quando $t\to+\infty$, $y(t)\to 0$ e $x(t)\to 0$ se $A=0$ ou é ilimitado se $A\neq 0$.

As órbitas do sistema dado são as curvas-soluções de

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y-x}$$

que também podem ser tiradas da solução geral do sistema

$$x(t)=A\,e^{t}+B\,e^{-t}$$
$$y(t)=B\,e^{-t}$$

dividindo membro a membro estas equações

$$\frac{x}{y}=\frac{A}{B\,e^{-2t}}+1=\frac{AB}{y^2}+1$$

ou seja

$$xy-y^2=AB$$

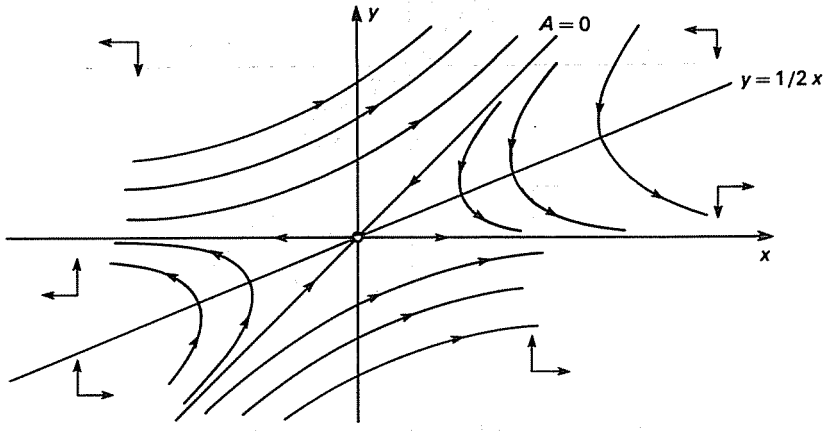


Figura 5.10 A origem é um ponto de sela

Somente as trajetórias na reta $y = x$ ($A = 0$) se aproximam do ponto crítico $(0, 0)$; todas as outras são ilimitadas por causa do termo $A\,e^t$ ($A \neq 0$) (ver Figura 5.10). ■

2. Raízes λ_1 e λ_2 reais e iguais ($\Delta = 0$).

A solução geral de (1) é dada por

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)\,e^{\lambda t},\quad y(t) = (B_1 + B_2 t)\,e^{\lambda t}$$

Se $p > 0$, $\lambda = (a + d)/2 > 0$ e, portanto, a direção do movimento em todas as órbitas se afastará do ponto crítico $(0, 0)$, que será instável.

Se $p < 0$, $\lambda = (a + d)/2 < 0$. Neste caso, independentemente dos valores das constantes A_1, A_2, B_1 e B_2, a direção do movimento se aproximará do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ que será, pois, assintoticamente estável.

EXEMPLO 4

O sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

tem como solução geral: $x(t) = A\,e^t + B\,te^t$, $y(t) = B\,e^t$, pois $p = (a + d)/2 = 1 = \lambda > 0$ e $\Delta = 0$.

É claro que quando $t \to \infty$, $x(t)$ e $y(t)$ são ilimitadas e as órbitas do sistema dado são as curvas

$$x = \frac{A}{B}\,y + y \ln\left(\frac{y}{B}\right)$$

quando $B \neq 0$. (Verifique!) Se $B = 0$, temos os dois semi-eixos dos x como órbitas.

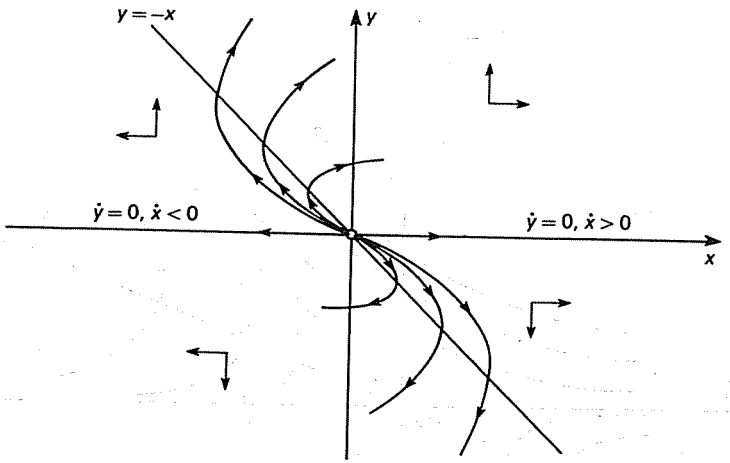


Figura 5.11 Nódulo instável

Observação:

As retas isóclinas $y = 0$ e $y = -x$ dividem o plano de fase em quatro regiões, onde o comportamento das direções orbitais são semelhantes (ver Figura 5.11). ■

EXEMPLO 5

O sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

tem por soluções gerais $x(t) = A\,e^{-t} + 2\,B\,te^{-t}$, $y(t) = B\,e^{-t}$

que neste caso possui $\Delta = 0$ e $p = -1 < 0$. É claro que quando $t \to \infty$ $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ e, portanto, o ponto crítico $(0, 0)$ é de equilíbrio assintoticamente estável.

As órbitas do sistema (ver Figura 5.12) são as curvas $\dfrac{x}{y} = \dfrac{A}{B} - 2 \ln \dfrac{y}{B}$ $(B \neq 0)$ do plano de fase, ou seja

$$x = \frac{A}{B}\,y - 2y \ln\left(\frac{y}{B}\right)$$

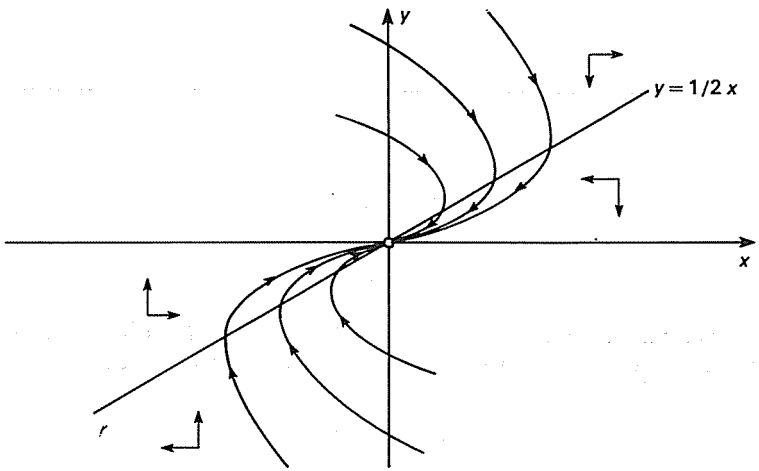


Figura 5.12 A origem é um atrator

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} > 0 \Leftrightarrow -x + 2y > 0 \Leftrightarrow y > \frac{x}{2}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} > 0 \Leftrightarrow -y > 0 \Leftrightarrow y < 0$$

■

Resumindo, quando as raízes λ_1 e λ_2 do polinômio característico associado ao Sistema (1) forem reais e de mesmo sinal, o ponto crítico $(0, 0)$ será um *nódulo*; se o sinal for negativo ele será *atrator* e será denominado *fonte* se o sinal for positivo. Se forem de sinais distintos, será um ponto de sela.

3. Raízes λ_1 e λ_2 complexas conjugadas $(\Delta < 0)$.

As raízes do polinômio característico $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ são

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$$

e a solução geral de (1) toma a forma

$$x(t) = e^{\alpha t}\,(A_1 \cos \beta t + A_2 \operatorname{sen} \beta t), \quad y(t) = e^{\alpha t}\,(B_1 \cos \beta t + B_2 \operatorname{sen} \beta t).$$

onde somente duas das constantes A_1, A_2, B_1 e B_2 são independentes. Como as partes trigonométricas de $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas, a natureza do ponto crítico $(0, 0)$ é determinada pelo sinal da parte real das raízes

$$\alpha = \frac{(a+d)}{2} = \frac{p}{2}$$

Se $\alpha < 0$, o movimento de todas as trajetórias é em direção ao ponto crítico (estabilidade assintótica) e, se $\alpha > 0$, acontece o contrário (instabilidade).

Se $\alpha = 0$, $\lambda_1 = \beta i$ e $\lambda_2 = -\beta i$, o movimento é periódico no tempo e as órbitas do sistema são curvas fechadas contendo em seu interior o ponto crítico estável $(0, 0)$ que, neste caso, é denominado *centro*.

Um exemplo simples de sistema linear autônomo cujas raízes são complexas é dado pelo exemplo a seguir.

EXEMPLO 6

Considere o sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx + ay \end{cases}$$

As raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$. As trajetórias no plano de fase podem ser obtidas ao resolvermos a equação diferencial homogênea associada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx + ay}{ax + by}$$

Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro desta equação por x, vem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b + a(y/x)}{a + b(y/x)}$$

e tomando a mudança de variáveis $\dfrac{y}{x} = v$ ou $y = vx$, podemos escrever a equação associada na forma

$$x\frac{dv}{dx} = -v + \frac{-b + av}{a + bv}$$

que é separável

$$\frac{dx}{x} = \frac{(a + bv)dv}{-b(1 + v^2)}$$

integrando, obtemos

$$-\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg} v - \frac{1}{2}\ln(1 + v^2) = \ln|x| + k$$

onde k é a constante de integração. Voltando às variáveis x e y $\left(v = \dfrac{y}{x}\right)$, obtemos a equação da curva

$$-\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{(x^2 + y^2)} + k$$

Em coordenadas polares

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

escrevemos a equação da curva na forma

$$\ln r = -\frac{a}{b}\,\theta + c$$

ou

$$r = r_0\, e^{-a/b\,\theta}$$

onde $r_0 = e^c$

Quando $a \neq 0$, cada curva dada pela equação acima é denominada *espiral exponencial*. Se $a > 0$ (a é parte real da raiz), o ponto crítico é instável e, portanto, a direção do movimento sobre a espiral é afastando-se da origem. O contrário acontece se $a < 0$. Se $\frac{a}{b} < 0$, então r cresce quando θ cresce e se $\frac{a}{b} > 0$, r decresce quando θ cresce (ver Figura 5.13).

Quando $a = 0$, as curvas se reduzem a círculos concêntricos na origem. Neste caso, o ponto crítico é estável.

As isóclinas $y = -\frac{a}{b}x$ e $y = \frac{b}{a}x$ interceptam as espirais ortogonalmente, facilitando o seu traçado. ■

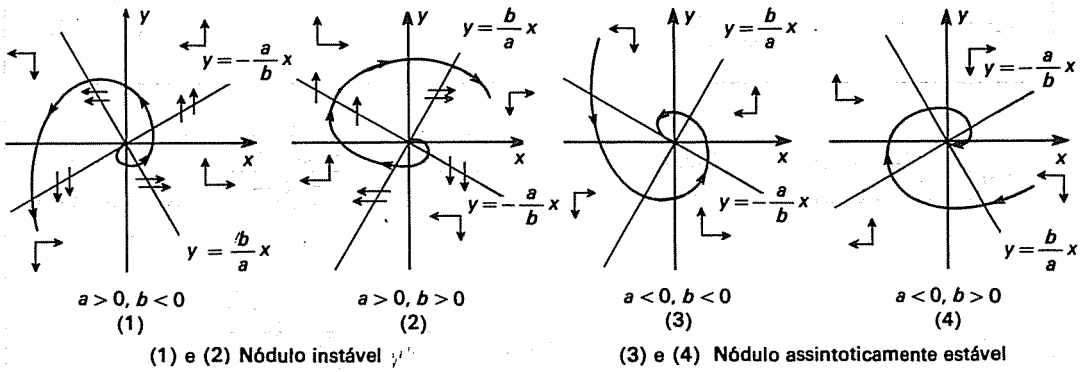


Figura 5.13 Espirais exponenciais

Um resumo dos resultados obtidos intuitivamente até aqui é dado no teorema que se segue.

Teorema O sistema autônomo linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

tem a origem $(0, 0)$ como ponto de equilíbrio isolado quando $(ad - bc) \neq 0$. Este ponto crítico será

a. assintoticamente estável, se as raízes λ_1 e λ_2 do polinômio característico

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

forem reais e negativas ou, ainda, se forem complexas e tiverem parte real negativa;

b. estável, se $\lambda_1 = \beta i$ e $\lambda_2 = -\beta i$ (imaginários puros);

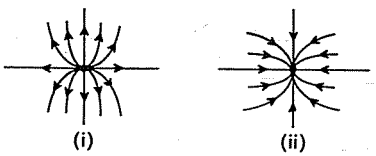
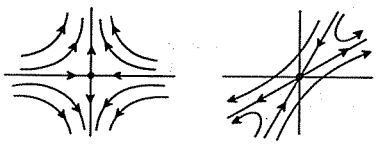
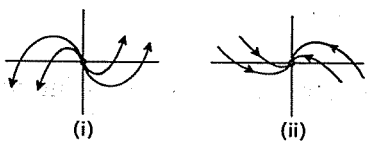
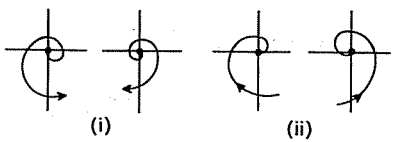
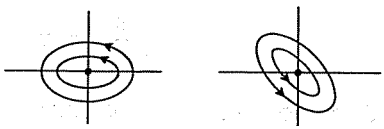
c. instável, se λ_1 e λ_2 forem reais e pelo menos uma delas for positiva, ou ainda, se forem complexas e tiverem parte real positiva.

Os diferentes tipos de órbitas obtidas do Sistema linear (1)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

cujo polinômio característico é $P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ $(ad - bc \neq 0)$, são resumidos no Quadro 5.1.

Quadro 5.1

Raízes λ_1 e λ_2	Natureza do ponto crítico	Esboço da órbita	Estabilidade
$\Delta > 0$ $\begin{cases} \lambda_1 > \lambda_2 > 0 & (i) \\ \lambda_1 < \lambda_2 < 0 & (ii) \end{cases}$	nódulo (impróprio)	 (i) (ii)	instável assintoticamente estável
$\Delta > 0,\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$	ponto de sela		instável
$\Delta = 0$ $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 > 0 & (i) \\ \lambda_1 = \lambda_2 < 0 & (ii) \end{cases}$	nódulo	 (i) (ii)	instável assintoticamente estável
$\Delta < 0$ $\begin{cases} \lambda = \alpha \pm \beta i & \\ \alpha > 0 & (i) \\ \alpha < 0 & (ii) \end{cases}$	ponto espiral	 (i) (ii)	instável assintoticamente estável
$\Delta < 0,\ \alpha = 0$	centro		estável

EXEMPLO 7 Estabilidade do Oscilador Harmônico

Como já vimos em várias ocasiões, a equação de um oscilador harmônico dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{1}$$

caracteriza a imposição de duas forças, uma proporcional ao deslocamento e a outra proporcional à velocidade da partícula (de massa unitária) que se desloca.

Se supomos que a viscosidade é nula ($c = 0$), a equação se reduz a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (k > 0)$$

Esta equação de segunda ordem é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -kx, \qquad k > 0 \end{cases} \tag{2}$$

A solução deste sistema é dada (ver Capítulo 4) por

$$x = x_0 \cos\sqrt{k}t + y_0 \operatorname{sen}\sqrt{k}t$$
$$y = \sqrt{k}\,(y_0 \cos\sqrt{k}t + x_0 \operatorname{sen}\sqrt{k}t)$$

onde x_0, y_0 são valores iniciais das variáveis de estado para $t = 0$.

As trajetórias são obtidas diretamente da solução ou através da equação

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{kx}$$

cuja integração nos dá

$$kx^2 + y^2 = c^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{c^2/k} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

sendo c uma constante arbitrária.

Tais curvas são elipses centradas na origem (ou circunferências concêntricas, se $k = 1$) (ver Figura 5.14).

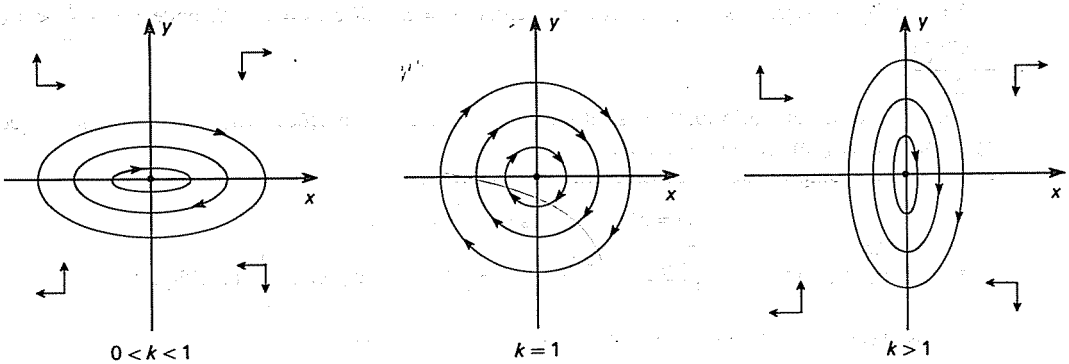


Figura 5.14 Órbitas fechadas (periódicas)

Se considerarmos t como uma variável independente, as trajetórias no espaço-xyt serão hélices sobre cilindros elípticos para cada k fixado (ver Figuras 5.15 e 5.16).

Neste caso, se tomamos o polinômio característico associado ao sistema dado, $\lambda^2 + k = 0$, obtemos como raízes $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$ que nos garante que o sistema é estável. O ponto crítico $(0, 0)$ é um *centro* e as soluções $\{x(t), y(t)\}$ são periódicas.

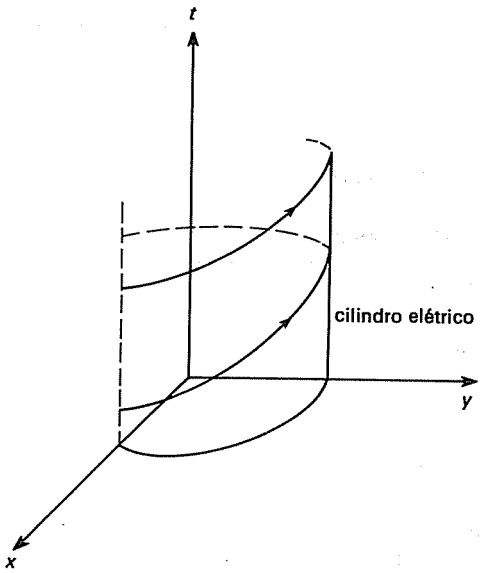


Figura 5.15 Trajetória no espaço-xyt

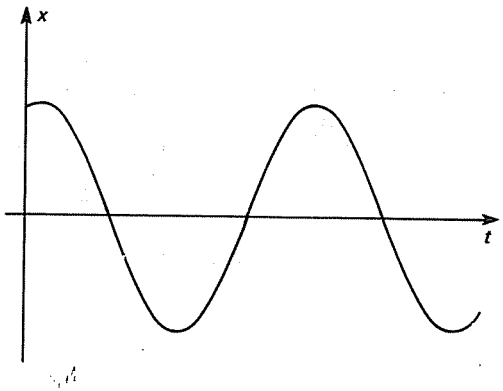


Figura 5.16 Trajetória no plano-tx (periódica)

Considerando agora $c > 0$, a Equação (1) é equivalente ao sistema autônomo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -kx - cy \end{cases} \tag{3}$$

$\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ é o polinômio característico associado a este sistema e suas raízes são $\lambda_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4k}}{2}$:

1. Se $c^2 < 4k$ (a viscosidade é bem pequena), então $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde $\alpha = -\dfrac{c}{2} < 0$ e $\beta = \dfrac{\sqrt{4k - c^2}}{2}$.

Logo, o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é assintoticamente estável, as soluções $\{x(t), y(t)\}$ são espirais que convergem para a origem quando t cresce.

Isto pode ser comprovado se considerarmos as soluções

$$x(t) = e^{-c/2\,t}\,(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$$

onde $\omega = \sqrt{k - \dfrac{c^2}{4}}$ e $y(t) = e^{-c/2\,t}\left[\left(B\omega - \dfrac{Ac}{2}\right)\cos \omega t - \left(A\omega + \dfrac{c}{2}B\right)\operatorname{sen} \omega t\right]$. (Verifique!)

Tomando $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$ obtemos $A = x_0$ e $B = \dfrac{2y_0 + cx_0}{2w}$.

Fazendo $x_0 = k \cos \theta$ e $B = k \operatorname{sen} \theta$, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e $A = \sqrt{x_0^2 + B^2}$, obtemos

$$\begin{cases} x(t) = R\,e^{-c/2\,t} \cos(\omega t - \theta) \\ y(t) = -R\,e^{-c/2\,t}\left[\dfrac{c}{2}\cos(\omega t - \theta) + \omega \operatorname{sen}(\omega t - \theta)\right], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

que é a equação de uma espiral no plano de fase e $\lim\limits_{t \to \infty} (x(t)\, y(t)) = (0, 0)$ (ver Figuras 5.17, 5.18 e 5.19).

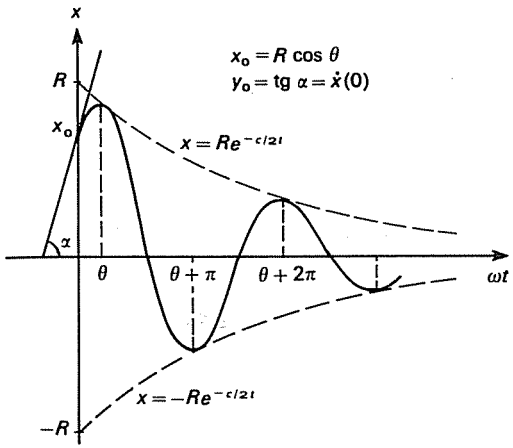


Figura 5.17 Movimento subamortecido ($c < 4k$)

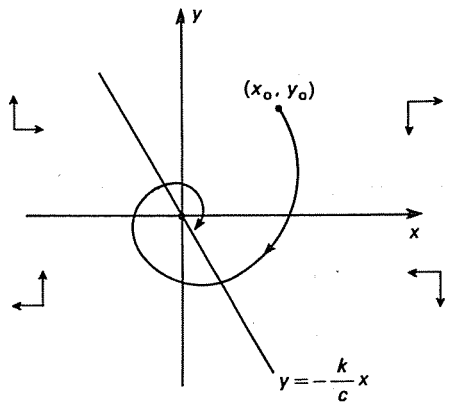


Figura 5.18 Trajetória no plano de fase

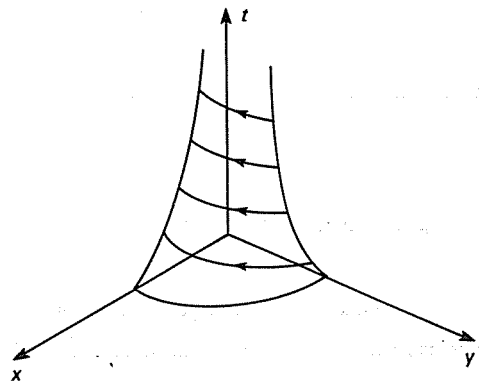


Figura 5.19 Trajetória no espaço-xyt

2. Se $c \leqslant 4k$ (movimento superamortecido), as raízes λ_1 e λ_2 são reais e negativas e, portanto, o ponto crítico $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ as soluções são da forma

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

As constantes A_1 e A_2 podem ser determinadas em termos da posição inicial $x(0) = x_0$ e da velocidade inicial $y(0) = y_0$

$$\begin{cases} x_0 = A_1 + A_2 \\ y_0 = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 \end{cases}$$

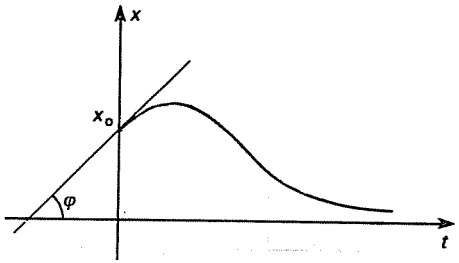
e portanto

$$A_1 = \frac{x_0\lambda_2 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{x_0\lambda_1 - y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

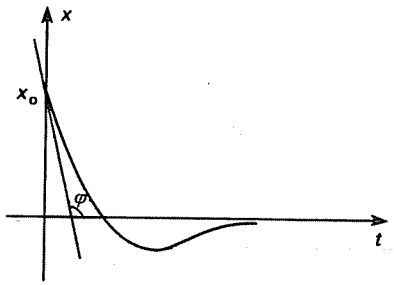
Se $y_0 > 0$ (velocidade inicial positiva) e $x_0 > 0$, como $\lambda_1 > \lambda_2$, então

$$\frac{x_0\lambda_2 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{x_0\lambda_1 - y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0 \quad \text{com} \quad \frac{x_0\lambda_1 - y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} > \left| \frac{x_0\lambda_2 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \right|$$

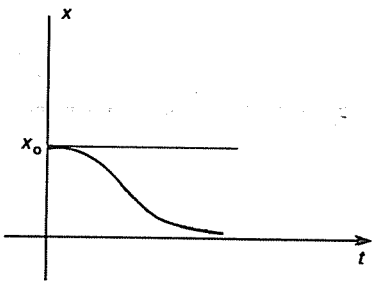
Portanto, a solução $x(t)$ é sempre *positiva* para $y_0 \geqslant 0$.



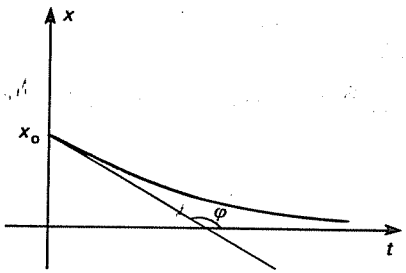
(a) $y_0 = \operatorname{tg}\varphi > 0;\ x_0 > 0$



(c) $y_0 < x_0\lambda_2 < 0$



(b) $y_0 = 0;\ x_0 > 0$



(d) $\lambda_1 x_0 < y_0 < x_0$

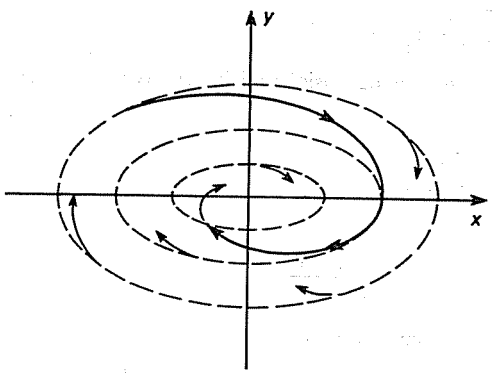
Figura 5.20 Movimento superamortecido $(c \geqslant 4k)$

Se $y_0 < 0$ e $x_0 > 0$, $x(t)$ se anula, no máximo, para um valor de t (ver Figura 5.20c).

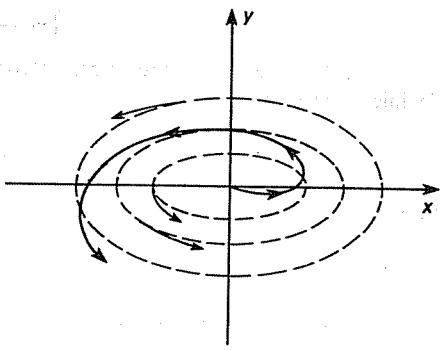
Para se obter as equações das trajetórias no plano de fase, é mais simples analisar a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kx}{y} - c$$

Desta equação concluímos que o coeficiente angular da reta tangente à trajetória do sistema amortecido é obtido ao acrescentarmos $-c$ ao coeficiente angular do sistema sem amortecimento. Isto favorece o traçado destas trajetórias, com base nas elipses obtidas quando $c = 0$ (ver Figura 5.21(a)).



(a) $c > 0$



(b) $c < 0$

Figura 5.21

EXERCÍCIO

1. Um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ também pode ser visto como um número complexo $z = x + iy$ e, portanto, a multiplicação de uma matriz 2×2 por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pode ser interpretada como o produto de números complexos.

A equação $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, correspondente ao sistema autônomo linear do Exemplo 6, pode ser escrita na forma complexa por

$$\frac{dz}{dt} = \alpha z$$

onde $\alpha = a - bi$ e $z = x + iy$.

Mostre que

a. $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a - ib)(x + iy)$ se, e somente se, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

b. A solução da equação complexa é dada por

$$z(t) = z_0 e^{\alpha t} = r_0 e^{at} e^{i(\theta_0 - bt)}, \text{ onde } z_0 = z(0) = r_0 e^{i\theta_0}$$

Analise o comportamento da solução para os diversos casos de estabilidade com relação aos parâmetros r_0, θ_0, a, b.

Modelo 1 ESTRATÉGIA DE ARMAMENTOS

A provisão de armamentos, prevendo um eventual conflito com outra nação, é um fator indispensável e planejado em cada país. Em nossos modelos, consideramos dois países A e B razoavelmente "isolados" dos demais (hipótese viável na prática, se levarmos em conta apenas o poderio militar). Supomos que os dois países possuem uma política externa pacífica, embora desejando estar preparados para uma guerra eventual.

Vamos supor ainda que o poderio militar de um país seja expresso pela sua "quantidade de armas" num determinado instante ou pelo capital que esta quantidade significa.

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ o potencial de guerra das duas nações. As seguintes hipóteses são essenciais para a modelagem com equações diferenciais:

1. x e y são funções contínuas com derivadas contínuas para $t > 0$, $t =$ tempo.

2. Quanto maior o potencial de guerra de um país, mais ele será fonte de problemas para o outro. Portanto, a variação do poderio militar de um país é proporcional ao poderio do outro.

3. A depreciação dos armamentos existentes, em relação ao tempo, é responsável pela diminuição do poderio militar de cada país. Tais depreciações são decorrentes das condições de armazenamento, da intensidade de uso em treinamentos, do aparecimento de novas armas alternativas no mercado, etc.

Vamos supor que a depreciação seja proporcional à quantidade de armamentos existentes.

4. Se um país tem intuitos bélicos secretos, isto pode influenciar no crescimento de seu potencial de guerra. Por outro lado, se não houver uma situação econômica compatível para suportar o crescimento bélico do outro país, isto pode acarretar uma diminuição na aquisição de armas.

Estas hipóteses permitem propor como modelo o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax + by + g(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx - dy + h(t), \text{ com } a, b, c \text{ e } d \text{ constantes positivas} \end{cases} \tag{3}$$

onde:

b e c são os coeficientes de proporcionalidade devido à interação de um país com o outro;

a e d são os coeficientes de depreciação do material bélico;

$g(t)$ e $h(t)$ são as estratégias particulares de cada país. São funções que dependem do tempo em geral.

Dependendo das estratégias utilizadas, temos modelos distintos:

1. Não há estratégias particulares ($h = 0$ e $g = 0$).
O Sistema (3) torna-se homogêneo.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx - dy \end{cases} \tag{4}$$

A equação característica associada a (4) é dada por

$$\lambda^2 + (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

cujas raízes são

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}\right]$$

ou

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[-(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right]$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left[-(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 + 4bc}\right]$$

Logo, λ_1 e λ_2 são sempre reais e distintas.

A solução geral de (4) é dada por

$$x(t) = A\,e^{\lambda_1 t} + B\,e^{\lambda_2 t};\quad y(t) = A\,\frac{a+\lambda_1}{b}\,e^{\lambda_1 t} + B\,\frac{a+\lambda_2}{b}\,e^{\lambda_2 t} \tag{5}$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

O ponto de equilíbrio de (4) é a origem $(0, 0)$ e sua natureza depende essencialmente do sinal de $(ad - bc)$.

a. Se $ad - bc > 0$, λ_1 e λ_2 são negativas e o ponto crítico $(0, 0)$ é um nódulo assintoticamente estável, os países estarão em paz permanente (ver Figura 5.22(a)).

b. Se $ad - bc < 0$, então $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ e, portanto, a origem será um ponto de sela (instável). As duas quantidades x e y crescem sem limitação. A tendência é um estado de beligerância crescente com o tempo.

As únicas órbitas que se dirigem para o ponto $(0, 0)$ são as semiretas definidas por

$$y = \frac{a+\lambda_2}{b}\,x \qquad (A = 0 \text{ e } B \neq 0)$$

que se encontram no segundo e quarto quadrantes, uma vez que $\frac{a+\lambda_2}{b} < 0$. (Verifique!) Neste caso, não há possibilidade de diminuição de armamentos para os dois países (ver Figura 5.22(b)).

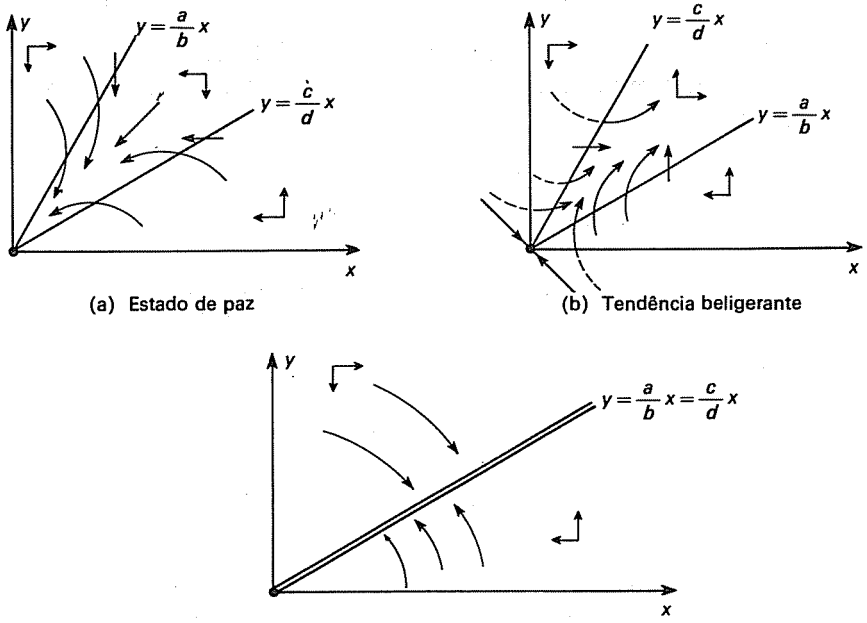


Figura 5.22 Comportamento armamentista

c. Se $ad - bc = 0$, então $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -(a+d) < 0$. Neste caso toda a reta $y = \frac{a}{b}x = \frac{c}{d}x$ é constituída de pontos de equilíbrio. Dependendo das quantidades iniciais de armamentos de cada país e, portanto, dos valores de A e B em (5), estas quantidades tenderão a um valor (x_∞, y_∞) sobre a reta $y = \frac{a}{b}x$ (ver Figura 5.22(c)). Não deve haver guerra neste caso.

2. Estratégias constantes não nulas (positivas ou negativas).
O sistema vem dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax + by + g \\ \dfrac{dy}{dt} = cx - dy + h \end{cases} \tag{6}$$

onde a, b, c, d são constantes positivas e h e g são constantes não nulas.

Se $ad \neq bc$, o ponto crítico de (6), $\left(\dfrac{gd+bh}{ad-bc}, \dfrac{ah+gc}{ad-bc}\right)$, é obtido da intersecção das isóclinas

$$-ax + by + g = 0, \qquad cx - dy + h = 0$$

Se $ad = bc$, não teremos ponto de equilíbrio.

Para determinar a natureza da estabilidade do ponto crítico, tomamos a mudança de variáveis

$$x = x_e + u, \qquad y = y_e + v$$

onde u e v são pequenas variações dos valores

$$x_e = \frac{gd+bh}{ad-bc}, \qquad y_e = \frac{ah+gc}{ad-bc}$$

O Sistema (6) vem, então, dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -au + bv \\ \dfrac{dv}{dt} = cu - dv \end{cases} \tag{7}$$

Para o Sistema (7), que é autônomo, o ponto de equilíbrio é $(0, 0)$ e o estudo de sua estabilidade é análogo ao efetuado para o Sistema (4).

A solução geral de (6) é dada por

$$x(t) = x_h + x_p, \qquad y(t) = y_h + y_p$$

onde x_h, y_h são as soluções gerais do sistema homogêneo e x_p, y_p são soluções particulares de (6). Assim, quando $ad-bc\neq 0$, podemos escrever a solução geral de (6) por

$$x(t)=A\,e^{\lambda_1 t}+B\,e^{\lambda_2 t}+x_e$$

$$y(t)=A\,\frac{a+\lambda_1}{b}\,e^{\lambda_1 t}+B\,\frac{a+\lambda_2}{b}\,e^{\lambda_2 t}+y_e$$

a. Se $ad-bc>0$, λ_1 e λ_2 são ambas negativas e o ponto de equilíbrio (x_e, y_e) é um nódulo assintoticamente estável (ver Figura 5.23).

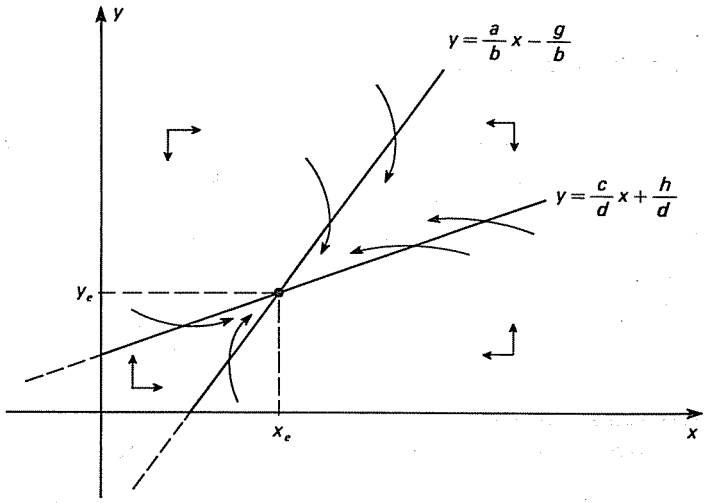


Figura 5.23 $r(ad-bc>0)$; (x_e, y_e) é assintoticamente estável

b. Se $ad-bc<0$, $\lambda_1>0$ e $\lambda_2<0$ e o ponto de equilíbrio (x_e, y_e) é um ponto de sela (instável).

As trajetórias que se dirigem ao ponto (x_e, y_e) são obtidas quando $A=0$ e $B\neq 0$ em (8), ou seja

$$y=\frac{a+\lambda_2}{b}\,(x-x_e)+y_e$$

Tal reta é denominada *separatriz* e determina quando, dada uma condição inicial (x_0, y_0) das potencialidades bélicas dos países em questão, tais potenciais crescem ou diminuem.

Se o ponto crítico (x_e, y_e) estiver no primeiro quadrante ($x_e>0$ e $y_e>0$), então $x(t)$ e $y(t)$ crescem sem limitação, quando (x_0, y_0) estiver situado na região acima da separatriz. Caso contrário, $x(t)$ e $y(t)$ diminuirão a partir de um instante t, atingindo valores constantes num tempo finito (ver Figura 5.24).

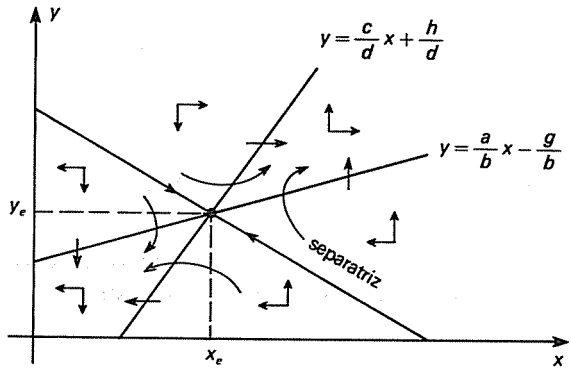


Figura 5.24 Ponto de sela $(ad-bc<0)$

O aumento de armamento devido às influências do país vizinho é menor que as depreciações, o que deve levar a uma parada no sistema de armas.

c. Se $ad-bc=0$, não podemos usar a solução anterior, uma vez que as isóclinas do Sistema (6)

$$y=\frac{a}{b}x-\frac{g}{b}, \qquad y=\frac{c}{d}x+\frac{h}{d}$$

são retas paralelas.

Neste caso, quando t cresce, $(x(t), y(t))$ se aproxima de algum ponto (x^*, y^*) situado sobre uma reta com coeficiente angular $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (ver Figura 5.25).

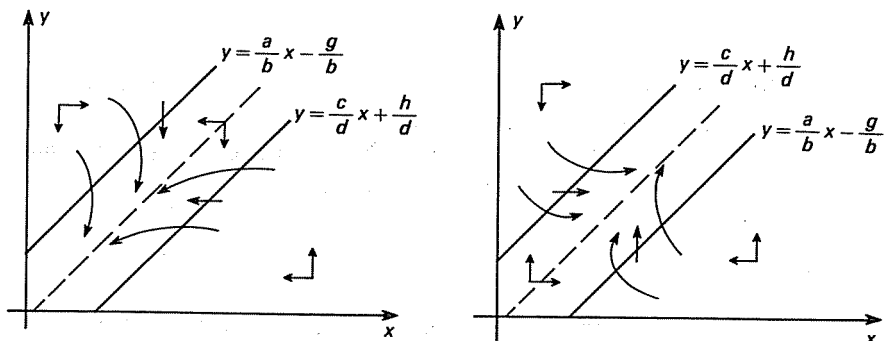


Figura 5.25

Como exercício, calcule a equação da reta crítica, neste caso em que $ad=bc$.

Os projetos que seguem podem ser desenvolvidos pelo leitor sem muito esforço.

PROJETO 1

Na ocasião que antecedeu a Primeira Guerra Mundial (1909-1914), a França estava aliada à Rússia, e a Alemanha à Áustria e Hungria enquanto que nem a Inglaterra nem a Itália tinham se definido ainda em suas alianças. O Orçamento de Defesa para cada um dos países aliados formava, aproximadamente, o seguinte quadro:

Quadro 5.2 Orçamento de Defesa em milhões de dólares (1909)

	1909	1910	1911	1912	1913
Rússia	67	68	71	82	92
França	48	51	57	63	75
Total: θ_1	115	119	128	145	167
Variação: $\Delta\theta_1$		4	9	17	22
Alemanha	63	62	62,5	68	95
Áustria-Hungria	21	24	24,5	26	27
Total: θ_2	84	86	87	94	122
Variação: $\Delta\theta_2$		2	1	7	28
Variação total: $\Delta(\theta_1+\theta_2)$		6	10	24	50
$\theta_1+\theta_2$ médio		202	210	227	264

Calcule $\Delta(\theta_1+\theta_2)$ como função de $(\theta_1+\theta_2)$ e obtenha a reta (forma discreta)

$$\Delta(\theta_1+\theta_2)=k[(\theta_1+\theta_2)-C] \qquad \text{(Use ajuste linear.)}$$

Agora, considerando, por exemplo, o valor do poderio militar de um país como sendo a diferença entre seu orçamento de defesa e a quantidade de bens exportados entre os aliados, temos

$$x(t)=\theta_1(t)-\varphi_1(t) \qquad \text{e} \qquad y(t)=\theta_2(t)-\varphi_2(t)$$

Usando o Sistema (6) (estratégias constantes) com $a=d$ e $b=c$, vem

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(\theta_1-\varphi_1)=-a(\theta_1-\varphi_1)+b(\theta_2-\varphi_2)+g$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(\theta_2-\varphi_2)=b(\theta_1-\varphi_1)-a(\theta_2-\varphi_2)+h$$

Então

$$\frac{d(\theta_1+\theta_2)}{dt}=(b-a)\left\{(\theta_1+\theta_2)-\left[(\varphi_1+\varphi_2)-\frac{(g+h)\dfrac{d}{dt}(\varphi_1+\varphi_2)}{b-a}\right]\right\}$$

Comparando o caso contínuo dado pela equação acima com o discreto, faça uma estimativa dos parâmetros a e b. Analise o modelo (pontos de equilíbrio) com os valores encontrados para a e b.

Observação:

Embora exista uma certa "validade" do modelo proposto neste projeto, não parece ser razoável prever uma guerra com este modelo matemático, uma vez que ocorrem muitas outras variáveis, não consideradas aqui.

PROJETO 2

Faça um estudo do modelo relativo à corrida armamentista, quando o potencial bélico de um país não tem influência no programa estratégico do outro ($a = 0$). Considere os casos

1. g e h são constantes
2. $g = \alpha t$ e $h = \beta t$

Justifique a validade deste modelo.

PROJETO 3

Desenvolva um modelo de corrida armamentista entre 3 nações vizinhas*.

5.4 FUNÇÕES INTEGRAIS DE UM SISTEMA AUTÔNOMO

Suponhamos que o estado de um sistema mecânico seja completamente caracterizado pela sua posição em um espaço de fase e que todos os observáveis físicos sejam funções reais definidas neste espaço. Por exemplo, se temos uma partícula sob ação de forças que dependem apenas de sua posição e velocidade (partícula carregada em um campo eletromagnético estacionário), o seu espaço de fase natural será $\mathbb{R}^6$ ou $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, onde $(x_1, x_2, x_3; v_1, v_2, v_3)$ ou $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ deve fornecer a sua posição e velocidade.

É claro que se houver uma identificação entre os pontos do espaço de fase em $\mathbb{R}^n$ com os elementos de um determinado conjunto M, podemos pensar em descrever o espaço de fase através de M e não de $\mathbb{R}^n$; veremos mais adiante como isto é vantajoso, em alguns casos.

Consideremos, por enquanto, apenas espaços de fase em $\mathbb{R}^n$. Neste espaço de fase está definido, então, o campo vetorial que "aciona" o sistema dinâmico, que por sua vez descreverá aí as suas trajetórias.

Suponha então que $F(\mathbf{x})$ seja um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ o seu fluxo, isto é, as soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

---

* RAPOPORT, A. *Mathematical Models in Social and Behavior Science*. New York, Wiley, 1983.

RAPOPORT, A. & Chammah, A.M. *Prisioner's Dilemma. A Study in Conflict and Cooperation*. Ann Arbor, Michigan University Press, 1965.

ZINNER, D.A.; Gillespie, J.U. & Tahim, G.S. The Richardson Arms Race Model. In: *Modules and Monographs in Undergraduate Mathematics and its Applications Project*. USA, Indiana University, 1978.

Se $\varphi(\mathbf{x})$ for uma função de valor real que representa um observável deste sistema dinâmico, podemos calculá-la em particular sobre as trajetórias pela composição $\varphi(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$ cuja derivada com relação a t nos fornecerá a taxa de variação de φ sobre a trajetória $t \to \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.

Pela regra de cadeia temos

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \frac{\partial x_k}{\partial t}(t, \mathbf{x}_0) =$$

$$= \operatorname{grad} \varphi_{[\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0)]} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} \varphi \cdot F_{[\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0)]}$$

que é exatamente a derivada direcional de φ na direção do campo vetorial F. Observe que podemos calcular esta derivada em cada ponto de $\mathbb{R}^n$, sem necessidade de resolvermos o problema de Cauchy.

As funções φ que são constantes sobre as trajetórias na forma $\varphi(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \varphi(\mathbf{x}_0)$ e tais que $\nabla\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x}$, são chamadas *integrais* do sistema dinâmico e são de grande importância no estudo de sistemas dinâmicos em geral. Os sistemas mecânicos têm suas integrais naturais dadas por leis físicas de conservação de energia, de quantidade, de movimento angular e outros.

Analisemos agora a interpretação geométrica das integrais de um sistema dinâmico e a razão de sua importância.

Observemos inicialmente que φ é uma integral de $F(\mathbf{x})$ se as suas superfícies (linhas em $\mathbb{R}^2$) de nível $\{\mathbf{x} : \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0)\} = S_{\mathbf{x}_0}$ tangenciarem o campo vetorial $F(\mathbf{x})$, pois grad $\varphi(\mathbf{x})$ é normal a $S_{\mathbf{x}_0}$ e grad $\varphi(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x}) = 0$ (ver Figura 5.26).

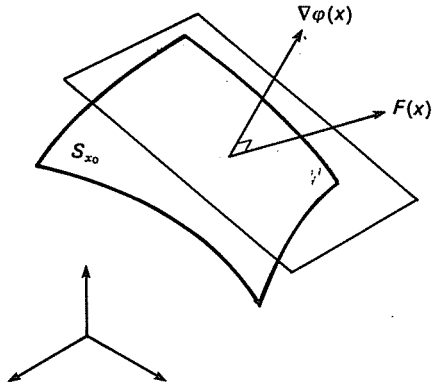


Figura 5.26

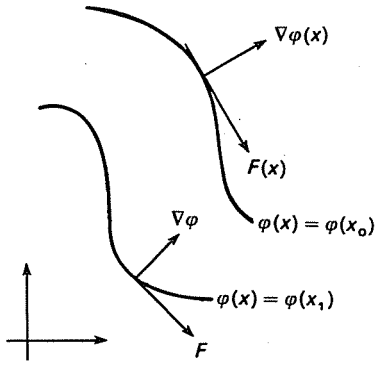


Figura 5.27

No caso particular de $\mathbb{R}^2$, observamos então que as *linhas* de nível

$$L_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x} : \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0)\}$$

são os traços geométricos das trajetórias (ver Figura 5.27).

Portanto, para um campo em $\mathbb{R}^2$, as suas trajetórias no plano de fase são imediatamente obtidas, se conhecemos uma integral deste campo e vice-versa.

EXEMPLO 1

Considere uma partícula em movimento unidimensional cuja equação dinâmica tem a forma $\ddot{x} = f(x)$, onde $f(x)$ é a força que atua sobre ela.

Podemos pensar em $f(x)$ como derivada de uma função potencial $\phi(x)$, $f(x) = -\frac{d}{dx}\phi(x)$ e, portanto, $\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\phi(x)$. Multiplicando a equação por $\dot{x}$ temos

$$\ddot{x}\ \dot{x} = -\dot{x}\frac{d}{dx}\phi(x)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\right)\dot{x}^2(t) = -\frac{d}{dt}\phi(x(t))$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\right)\dot{x}^2(t) + \phi(x(t)) = 0$$

Esta igualdade nos diz que a expressão $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \phi(x)$ se mantém constante sobre a trajetória do sistema, que representa obviamente a energia total (energia cinética + energia potencial) do sistema.

Considerando a equação de segunda ordem como um sistema no plano de fase (posição-velocidade)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{d}{dx_1}\phi(x_1) \end{cases}$$

verificamos que a função $E(x_1, x_2) = E(x) = 1/2\ x_2^2 + \phi(x_1)$ é uma integral do campo $F(x) = \left(x_2, -\frac{d}{dx_1}\phi(x_1)\right)$ e as trajetórias deste sistema dinâmico são traçadas sobre as linhas de nível de $E(x) = E(x_0)$, ou seja, $\phi(x_1) + 1/2\ x_2^2 = \text{constante}$. É claro que o argumento acima, embora carregado de linguagem e significado físico, pode ser repetido matematicamente para qualquer equação diferencial ordinária autônoma de segunda ordem. Analisemos agora o plano de fase de alguns sistemas dinâmicos com base no gráfico da função potencial $\phi(x)$. O exemplo clássico destes problemas é o pêndulo não linear cuja equação $\ddot{x} = \frac{-g}{\ell}\operatorname{sen} x$ tem potencial $\phi(x) = -g/\ell \cos x$, sendo a função de energia dada por

$$E(x_1, x_2) = 1/2\ x_2^2 - \frac{g}{\ell}\cos x_1$$

Observe que, no caso geral, os pontos de máximo e mínimo de $\phi(x)$ podem ser considerados como pontos de equilíbrio do sistema, se interpretarmos a equação como o movimento de uma partícula sob ação da força $f(x)$ (obtida do potencial ϕ).

Analisaremos os pontos de mínimo e para isto tomaremos $\phi(x)$ com o gráfico abaixo (ver Figura 5.28).

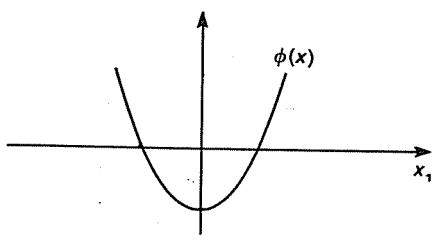


Figura 5.28

A integral de energia, neste caso, é $E(x_1, x_2) = \phi(x_1) + 1/2\, x_2^2$ e o traço de uma trajetória de energia E_0 é dado por

$$x_2 = \pm\sqrt{2\,(E_0 - \phi)}$$

Como $\phi(x_1)$ cresce para $x_1 \to \pm\infty$, concluímos que esta trajetória só existe para

$$a \leqslant x_1 \leqslant b; \qquad \phi(a) = \phi(b) = E_0$$

Nestes pontos a energia da partícula é toda potencial e a velocidade v é nula. Como estes pontos $(a, 0)$ e $(b, 0)$ não são pontos singulares pois $\phi'(a) < 0$ e $\phi'(b) > 0$, a trajetória não termina aí. Portanto, a trajetória deve chegar em $(a, 0)$ pela curva $x_2 = -\sqrt{2\,(E_0 - \phi)}$ (velocidade negativa) e sair pela curva $x_2 = \sqrt{2\,(E_0 - \phi)}$ (velocidade positiva, para a direita).

Assim, todas as trajetórias são periódicas (ver Figura 5.29).

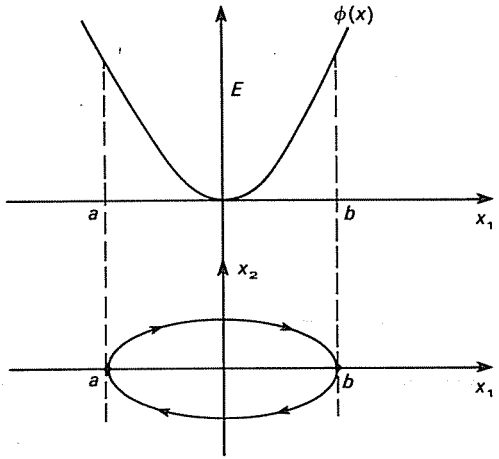


Figura 5.29

O período pode variar com E_0 pois

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm\sqrt{2\,(E_0 - \phi(x_1))}$$

Como a trajetória no plano de fase é simétrica com relação ao eixo-x_1, é suficiente analisar apenas a sua parte superior.

Verificamos que para a partícula percorrer o comprimento dx_1 é necessário o tempo

$$dt = \frac{dx_1}{\sqrt{2\,(E_0 - \phi(x_1))}}$$

e, portanto, o período será dado por

$$\sqrt{2}\int_a^b \frac{dx_1}{\sqrt{(E_0 - \phi(x_1))}} = T(E_0)$$

É importante observar que um ponto de mínimo estrito da função potencial $\phi(x_1)$ é um ponto de equilíbrio estável do sistema mecânico. Para sistemas mecânicos conservativos gerais esta afirmação é o chamado Princípio de Lagrange-Dirichlet, que será visto no Capítulo 7.

Observe que o campo $F(x) = (x_2, -\phi'(x_1))$ tem um ponto singular em

$$\begin{cases} x_1^0 = \text{mínimo estrito para } \phi(x_1) \\ x_2^0 = 0 \end{cases}$$

e este ponto é estável para o sistema $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$.

Suponha agora que o ponto de mínimo seja da forma mostrada na Figura 5.30.

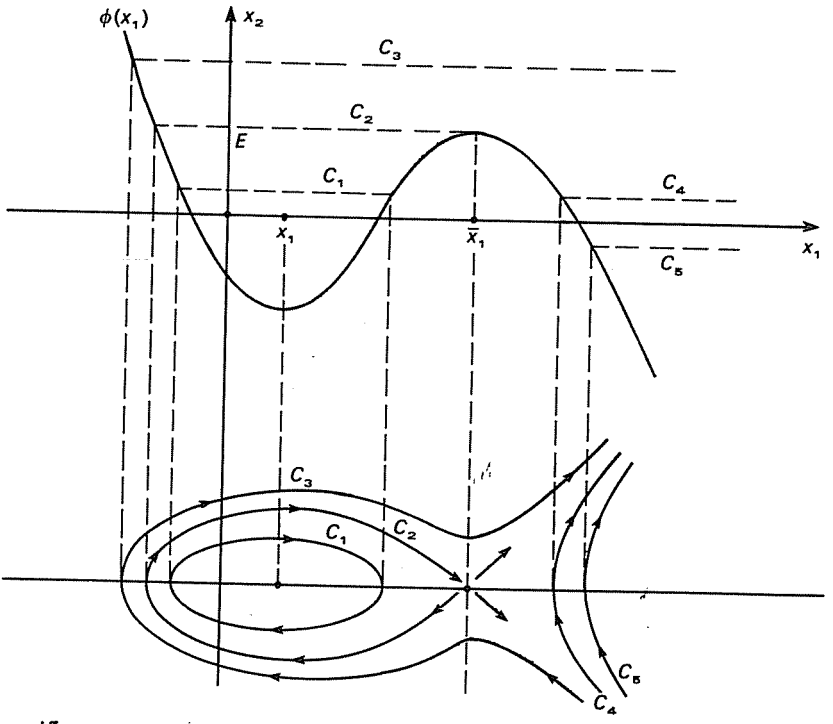


Figura 5.30

É fácil verificar que se a energia E da partícula é tal que $E < \phi(\bar{x}_1)$, teremos uma órbita periódica. Utilizando uma linguagem física, dizemos que a partícula é capturada pelo poço do potencial.

Se a energia $E > \phi(\bar{x}_1)$, a partícula é "refletida" à esquerda e "escapa" à direita, "acima" do ponto de máximo $\bar{x}_1$.

Não é difícil ver que o plano de fase nas imediações de $(\bar{x}_1, 0)$, onde $\bar{x}_1$ é ponto de máximo para $\phi(x_1)$, é uma sela. ■

EXERCÍCIOS

1. Obtenha o plano de fase global para os sistemas obtidos da equação $\ddot{x} = -\phi'(x)$ onde o potencial ϕ tem as seguintes expressões:

   a. $\phi(x) = ax^2 + x^3$ (potencial crítico)
   b. $\phi(x) = -(g/\ell)\cos x$ (pêndulo não linear)
   c. $\phi(x) = -x^4$
   d. $\phi(x) = x^\gamma;\ \gamma > 0$
   e. $\phi(x) = x^{-4} - 2x^{-2};\ x > 0$
   f. $\phi(x) = -\operatorname{sech}^2 x$.

2. Em muitos casos o potencial ϕ é apenas uma pequena perturbação do potencial quadrático ϕ_0 do oscilador harmônico $\phi = \phi_0 + \varepsilon\,\phi_1$ ($\varepsilon \sim 0$) e, portanto, o período também deve apresentar uma pequena variação com ε que escreveremos na forma

$$T(E, \varepsilon) = \sqrt{2}\int_a^b \frac{dx_1}{(E - \phi_0(x_1) - \varepsilon\,\phi_1(x_1))^{1/2}}$$

aproximado até a primeira ordem em ε por

$$T(E, \varepsilon) \cong T(E, 0) + \varepsilon \left.\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \sigma(\varepsilon) = T_0(E) + \varepsilon T_1(E) + \sigma(E)$$

O período do oscilador não perturbado é $T(E,0)=T_0(E)$. Mostre que

$$T_1(\varepsilon)=\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}(E\,.\,0)$$

pode ser obtido pela fórmula

$$T_1(E)=-\sqrt{2}\frac{d}{dE}\int_a^b \frac{\phi_1(x_1)dx_1}{[E-\phi_0(x_1)]^{1/2}}$$

Observe que

$$dt=\frac{dx_1}{[E-\phi_0(x_1)]^{1/2}}$$

e portanto

$$T_1(E)=-\sqrt{2}\frac{d}{dE}\int_0^{T_0}\phi_1(x_1(t))dt$$

Obtenha as correções de primeira ordem em ε para perturbações cúbicas e quárticas do potencial quadrático:

a. $\phi(x)=x^2+\varepsilon x^3$
b. $\phi(x)=x^2+\varepsilon x^4$

3. Imagine um sistema unidimensional formado por duas cargas positivas elétricas σ_1 e σ_2 fixadas em $-\ell$ e ℓ, respectivamente, e uma outra partícula de massa m e carga unitária positiva, livre para se movimentar entre elas. Obtenha o potencial, o diagrama de fase e uma expressão para o período de oscilação em função da sua amplitude.

Observação:

Para a obtenção do período devemos calcular a integral que vai do ponto a ao ponto b, onde $E-\phi(x)=0$, o que torna o integrando infinito e a integral imprópria. Observe, então, que para a existência da órbita periódica é necessário que $\phi'(a)\neq 0$ e, portanto, nas imediações de a, temos $E-\phi(x)\cong -\phi'(a)(x-a)$, ou seja

$$\frac{1}{\sqrt{E-\phi(x)}}\cong\frac{1}{\sqrt{-\phi'(a)(x-a)}}$$

onde $\phi'(a)<0$ e $(x-a)>0$ e, portanto, integrável.

Um argumento análogo vale para b.

4. Analise a equação

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}=-u+a(1+\varepsilon u^2)$$

que descreve a órbita de Mercúrio com a correção relativística (a órbita newtoniana é obtida para $\varepsilon=0$). O estudo deste problema foi um dos principais testes iniciais para a teoria da relatividade. Observe que $\varepsilon\sim 0$!

5. Considere a equação $\ddot{x}=F(x)$ na reta onde F é uma função continuamente diferenciável. Analise a possibilidade de simular as soluções desta equação através da projeção do movimento de uma massa m que desliza sem atrito e sob a ação da gravidade em uma curva plana de gráfico $y=f(x)$.

Voltemos agora às equações do tipo $\dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. Para melhor visualização geométrica, tomemos $n=3$.

Se $\phi(\mathbf{x})$ é uma função escalar (com a diferenciabilidade necessária!) integral do campo $f(\mathbf{x})$, sabemos então que este campo é tangente às superfícies de nível de $\phi(\mathbf{x})$.

Portanto, uma vez fixada uma destas superfícies, podemos considerar o campo $f(\mathbf{x})$ como que "acionando" um sistema dinâmico *sobre* a superfície. Desta forma, o estudo do espaço de fase de três dimensões originais pode ser reduzido a um espaço de fase de duas dimensões, embora *não plano*, em geral. Ou seja, uma função integral reduz, por assim dizer, a dimensão do espaço de fase que deve ser analisado.

No caso de duas dimensões, o espaço de fase reduzido era unidimensional e, portanto, caracterizava os traços geométricos em trajetórias. Em dimensão três (ou superior) uma integral não é, todavia, suficiente para caracterizar os traços da trajetória. Mas suponha que tenhamos $\phi_1(\mathbf{x})$ e $\phi_2(\mathbf{x})$ duas integrais do campo funcionalmente independentes, isto é, grad $\phi_1(\mathbf{x})$ e grad $\phi_2(\mathbf{x})$ linearmente independentes, para todo $\mathbf{x}$. Isto nos garante que as superfícies de nível de ϕ_1 e ϕ_2 se interceptam transversalmente e definem, portanto, um sistema de linhas L que "varre" uma região do $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 5.31).

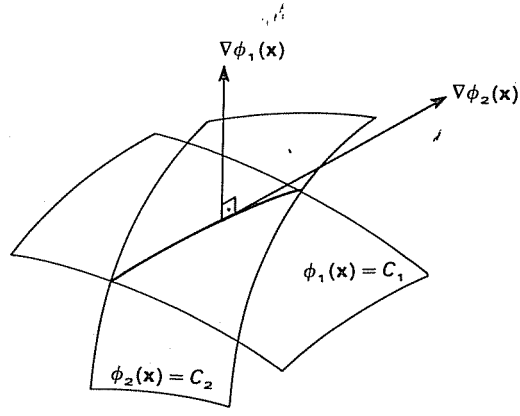


Figura 5.31

Não é difícil concluir que estas linhas são os traços das trajetórias do sistema dinâmico. Seja $\mathbf{x}_0$ um ponto de $\mathbb{R}^3$ e considere a linha

$$L_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x} : \phi_1(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}_0) \quad \text{e} \quad \phi_2(\mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x}_0)\}$$

Se uma solução de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ é tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ então, sendo ϕ_1 e ϕ_2 integrais, temos $\phi_1(\mathbf{x}(t)) = \phi_1(\mathbf{x}_0)$ e $\phi_2(\mathbf{x}(t)) = \phi_2(\mathbf{x}_0)$ para todo t, ou seja, $\mathbf{x}(t)$ descreve uma trajetória sobre a linha $L_{\mathbf{x}_0}$.

Observe que este sistema de linhas *não* representa completamente o sistema dinâmico, simplesmente o reduz para um sistema de dimensão $n = 1$ (de primeira ordem). A obtenção destas funções integrais nos leva, portanto, à resolução do sistema de equações através de um ponto de vista geométrico.

Analisemos agora um sistema de segunda ordem $\ddot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ em $\mathbb{R}^n$, com o objetivo de repetir os argumentos desenvolvidos para $n = 1$.

Multiplicando a equação por $\dot{\mathbf{x}}$ (produto escalar) temos

$$\frac{d}{dt}\ \frac{1}{2}\| \dot{\mathbf{x}} \|^2 = f(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \qquad \text{onde} \qquad (\| \dot{\mathbf{x}} \|^2 = \langle \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle)$$

Mas o termo $f(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}$ só poderá ser escrito como $-\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{x}(t))$ se $f(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad}\phi$. Entretanto, ao contrário do caso unidimensional, isto só é possível se a função $f(\mathbf{x})$ satisfizer as condições de compatibilidade

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

ou seja, se a matriz jacobiana $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ for simétrica. No caso $n=3$, isto significa que $\operatorname{rot} f \equiv 0$.

Nestes casos o campo $f(\mathbf{x})$ é chamado conservativo e derivado do potencial ϕ

$$f(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad}\phi\,; \left(f_i(\mathbf{x}) = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)$$

e o sistema mecânico $[\ddot{\mathbf{x}} = -\operatorname{grad}\phi]$ é chamado conservativo, em virtude do fato de que suas trajetórias $\mathbf{x}(t)$ conservam a energia

$$\frac{1}{2}\| \dot{\mathbf{x}}(t) \|^2 + \phi(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2}\| \mathbf{x}(0) \|^2 + \phi(\mathbf{x}(0))$$

Transformando esta equação vetorial de segunda ordem em $\mathbb{R}^n$ para um sistema em $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\operatorname{grad}\phi(x_1) \end{cases}$$

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Verificamos que $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\| \mathbf{x}_2 \|^2 + \phi(x_1)$ é uma integral deste sistema dinâmico.

Portanto, sistemas mecânicos conservativos podem ser vistos como sistemas dinâmicos definidos sobre as (hiper)superfícies de nível da função energia.

Em Mecânica Celeste temos sistemas mecânicos conservativos com potencial de atração gravitacional e podemos sempre contar com a conservação de energia e também com a conservação da quantidade de movimento angular, que provêm do fato de que as forças envolvidas são centrais, isto é, têm a mesma direção das retas que ligam as partículas envolvidas e não dão origem a torques (ver Exemplo 2).

EXEMPLO 2

Um outro problema mecânico clássico que pode ser analisado pelos argumentos geométricos anteriores é o movimento livre de um corpo rígido.

Se L é o vetor quantidade de movimento angular com relação ao ponto 0 do corpo e ω o vetor de sua velocidade angular, as equações de Euler-Poinsot nos dão

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{L} = I \times \boldsymbol{\omega}$$

onde I é a matriz de momento de inércia. Tomando os eixos principais (I é anti-simétrica e pode ser diagonalizada!)

$$L_k = I_k \omega_k$$

de onde temos as equações de Euler em novas coordenadas

$$\begin{cases} \dfrac{dL_1}{dt} = \dfrac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} L_2 L_3 \\ \dfrac{dL_2}{dt} = \dfrac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} L_3 L_1 \\ \dfrac{dL_3}{dt} = \dfrac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} L_1 L_2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\, \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dfrac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\, \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dfrac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\, \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

Observe agora que multiplicando a i-ésima equação por ω_i e somando, temos

$$\frac{d}{dt}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = 0$$

ou seja, os elipsóides

$$\left(\frac{\omega_1}{1/\sqrt{I_1}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{1/\sqrt{I_2}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_3}{1/\sqrt{I_3}}\right)^3 = C^2$$

são superfícies integrais do sistema e $E(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2$ é uma integral do sistema ($\omega \neq 0$). ■

EXERCÍCIOS

1. Obtenha os pontos singulares do sistema dinâmico sobre um determinado elipsóide e faça um esboço do espaço de fase (reduzido) sobre este elipsóide.

   Observe a estabilidade e instabilidade na perturbação do movimento angular, nos diversos pontos de equilíbrio, para o vetor velocidade angular. Interprete os resultados do ponto de vista mecânico*.

2. Analise o problema de Kepler, considerando uma massa M grande, fixa na origem, e o movimento de uma outra massa m pequena, sob a ação do campo gravitacional daquela.

   Considere a conservação da quantidade de movimento angular e energia para a redução do sistema quadridimensional.

---

* SYNGE, J.L. & Griffith, B. *Mecânica Racional*. Porto Alegre, Globo, 1965.

5.5 TEORIA DA ESTABILIDADE — MÉTODO DE LYAPUNOV

Consideraremos agora uma generalização importante do conceito de funções integrais chamadas *funções de Lyapunov* e que, de certa forma, são motivadas pelo próprio conceito de energia em osciladores *não* conservativos, onde a energia não é preservada pela trajetória, mas assume um comportamento monótono, *decrescente*, se o processo for dissipativo, e *crescente*, se houver absorção de energia. Esta característica é essencial na motivação do chamado método de Lyapunov para o estudo de estabilidade.

Comecemos então por analisar o oscilador harmônico linear para exemplificar estas idéias. Se $c=0$ escrevemos $\ddot{x}+kx=0$ na forma

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-kx\end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ -kx\end{pmatrix}=\mathbf{f}(x,y)$$

A energia total E do sistema pode ser tomada como soma de $k(x,y)=\frac{y^2}{2}$ (que é a energia cinética e só depende da velocidade) e $V(x,y)=\frac{kx^2}{2}$ (que é a energia potencial e só depende da posição da partícula). Se considerarmos agora o oscilador harmônico amortecido ($c>0$), podemos ainda tomar $E(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{kx^2}{2}$, mas, neste caso, E não será constante sobre as trajetórias; $E(x,y)$ tenderá a zero quando $t\to\infty$, devido ao fato de que o sistema amortecido perde energia por causa da viscosidade representada pelo termo $c\dot{x}$.

De qualquer forma, $E(x,y)$ será *não crescente* quando percorremos a trajetória com t crescente e, portanto, se $E(x(t_0),y(t_0))<E_0$, a trajetória do sistema a partir de t_0 não mais cruzará a elipse $E(x,y)=E_0$ do plano de fase. (Observe que na Figura 5.33(b), o campo sobre a elipse é dirigido no sentido interior ou, na pior das hipóteses, tangente à elipse $\{(x,y): E(x,y)=E_0\}$.)

Por outro lado, se $c<0$, o sistema absorve energia e $E(x(t),y(t))$ será crescente ao longo da trajetória.

Neste caso, se $E(x(t_0),y(t_0))>E_0$, a trajetória $(x(t),y(t))$ não entrará na região $\{(x,y): E(x,y)\leqslant E_0\}$ para $t>t_0$, pois como se pode ver pela Figura 5.33(c), o campo na fronteira é dirigido no sentido exterior.

Resumindo, temos que a função de energia $E(x,y)$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $E(0,0)=0$;
2. $E(x,y)>0$ se $(x,y)\neq(0,0)$ (positiva definida);
3. *a.* $E(x,y)$ é não crescente sobre as trajetórias e o sistema é estável ($c\geqslant 0$);
   b. $E(x,y)$ é estritamente decrescente sobre as trajetórias e o sistema é assintoticamente estável ($c>0$);
   c. $E(x,y)$ é estritamente crescente sobre as trajetórias e o sistema é instável ($c<0$).

As funções de Lyapunov, que iremos estudar em seguida, de certa forma generalizam o conceito de energia para sistemas gerais. Os Teoremas de Lyapunov sobre estabilidade são também extensões dos argumentos acima.

Embora o argumento geométrico seja elegante e até convincente, a demonstração rigorosa do Teorema de Lyapunov, no caso geral, faz uso de métodos topológicos e analíticos.

Considere, então, um sistema autônomo $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, em que o campo f é continuamente diferenciável, tal como exigido pelo Teorema da Secção 5.2, definido em uma região Ω em torno da origem onde f tem um ponto crítico. Como o tratamento a seguir tem um caráter local, não se perde nada em analisar o problema apenas em um disco (bola) $B_{r_0} = \{\mathbf{x} : \| \mathbf{x} \| < r_0\}$ que, com sua circunferência ($\| \mathbf{x} \| = r_0$), está em Ω.

Definição 1. Seja U uma função continuamente diferenciável definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com valores reais.

Dizemos que U é uma função de Lyapunov se:

1. $U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
2. $U(\mathbf{x}) > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (isto é, U é positiva definida);
3. U satisfaz *uma* das seguintes condições:

a. U é não crescente sobre qualquer trajetória em Ω;
b. U é estritamente decrescente sobre qualquer trajetória em Ω;
c. U é estritamente crescente sobre qualquer trajetória em Ω.

Observe que as condições (*a*), (*b*) e (*c*) de **3** podem ser testadas sem conhecermos as trajetórias, pois o objetivo da teoria é analisar o comportamento do fluxo sem dispor das trajetórias explicitamente.

Basta utilizar a Regra da Cadeia e veremos que

$$\frac{d}{dt} U(\mathbf{x}(t)) = \Sigma \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \text{grad } U \cdot f(\mathbf{x})$$

e, portanto, podemos expressar estas condições da seguinte forma:

4. *a*. $\text{grad } U(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) \leqslant 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
   b. $\text{grad } U(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
   c. $\text{grad } U(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

isto é, $\varphi(\mathbf{x}) = \text{grad } U(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$ é, (*a*) negativa semidefinida, (*b*) negativa definida e (*c*) positiva definida.

O Teorema de Lyapunov repete, então, no caso geral, as conclusões que obtivemos para o oscilador harmônico quanto à estabilidade do ponto crítico, desde que tenhamos uma função de Lyapunov com propriedades **3** correspondentes àquelas da função energia.

Teorema de Lyapunov Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo continuamente diferenciável com um ponto crítico na origem, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, e considere o sistema dinâmico $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$.

Suponha que exista uma função U de Lyapunov satisfazendo uma das condições (a), (b) ou (c) da definição. Então, o ponto crítico será, respectivamente

a. estável;
b. assintoticamente estável;
c. instável.

Demonstraremos inicialmente (a) e (b) e para isto necessitamos saber se os conjuntos $V_\tau = \{\mathbf{x} \in B_{r_0} : U(\mathbf{x}) \leqslant \tau,\ \tau > 0\}$ formam um sistema de vizinhanças "decrescentes" da origem, de tal maneira que quando $U(\mathbf{x}(t))$ se aproxima de zero com $t \to \infty$, possamos garantir que $\mathbf{x}(t)$ se aproxime da origem.

Isto não é tão evidente e o leitor pode verificar por si mesmo, com alguma experimentação gráfica. Esclarecemos este fato através do lema a seguir.

Lema. Os conjuntos V_τ formam um sistema de vizinhanças da origem satisfazendo as seguintes propriedades:

1. V_τ é uma vizinhança da origem para todo $\tau > 0$.

2. Para todo disco $B_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega: \| x \| < \varepsilon\}$, existe $\tau > 0$ tal que $V_\tau \subset B_\varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ (ver Figura 5.33).

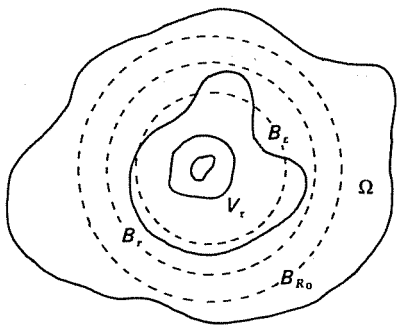
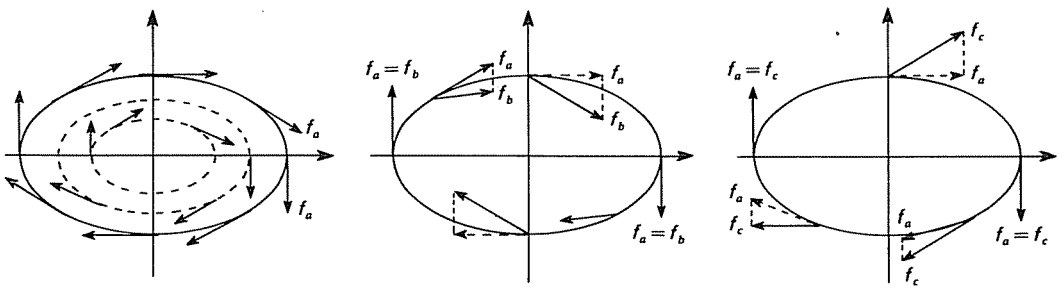


Figura 5.32 Vizinhança V



(a) $c = 0$

$\vec{f}_a(x, y) = (y, -kx)$

As trajetórias estão sobre as curvas de níveis $E_0 = \frac{kx^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ (elipses)

(b) $c > 0$

$\vec{f}_b(x, y) = (y, -kx - cy) = \vec{f}_a + (0, -cy)$

O campo f_b é dirigido no sentido do interior da região limitada pela curva de nível $E(x, y) = E_0$

(c) $c < 0$

$\vec{f}_c(x, y) = \vec{f}_a + (0, -cy)$

O campo f_c é dirigido no sentido do exterior à região limitada pela curva de nível $E_0 = E(x, y)$

Figura 5.33

Demonstração do Lema:

1. Esta afirmação é decorrência direta da continuidade de U.

2. Consideremos um disco fechado $\overline{B}_{r_0} = \{\mathbf{x} : \| \mathbf{x} \| \leqslant r_0\}$ contido em Ω.

Suponhamos que a afirmação não seja válida, isto é, existe um ε_0, $r_0 > \varepsilon_0 > 0$, e uma seqüência $\mathbf{x}_n \in B_{r_0}$ tal que $U(\mathbf{x}_n) < 1/n$ e, no entanto, $\| \mathbf{x}_n \| \geqslant \varepsilon$.

Como $\mathbf{x}_n$ está em um conjunto limitado $\{\mathbf{x} : \varepsilon \leqslant \| \mathbf{x} \| \leqslant r_0\}$, existe uma subseqüência (Teorema de Bolzano-Weierstrass) $\mathbf{x}_{nk}$ convergente, digamos, para $\overline{\mathbf{x}}$. Mas então $U(\overline{\mathbf{x}}) = \lim_{k \to \infty} U(\mathbf{x}_{nk}) = 0$, o que é impossível, pois U é positiva definida e $\overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$.

Demonstração do Teorema:

1. Tomemos um disco B_r centrado na origem, $r < r_0$, e tomemos $\tau > 0$ tal que $V_\tau = \{\mathbf{x} \in B_{r_0} : U(\mathbf{x}) \leqslant \tau\} \subset B_r$, e B_ε um disco contido em V_τ.

Então, se $\| \mathbf{x}(t_0) \| \leqslant \varepsilon$, teremos $\mathbf{x}(t_0) \in V_\tau$ e da hipótese **1** sabemos que $U(\mathbf{x}(t)) \leqslant U(\mathbf{x}(t_0))$ para todo $t > t_0$ para o qual exista $\mathbf{x}(t)$. Mas isto implica imediatamente que $\mathbf{x}(t) \in V_\tau$ e, portanto, $\mathbf{x}(t) \in B_r$. A estabilidade pode daí ser concluída da existência de $\mathbf{x}(t)$ para *todo* $t > t_0$, o que decorre do princípio de continuação de soluções (observação *c* do Teorema da Secção 6.3.4).

2. Considere agora B_r, V_τ e B_ε como em **1**. Se $\mathbf{x}(t_0) \in B_\varepsilon$ então $\mathbf{x}(t) \in B_r$ para $t > t_0$. Mostraremos agora que dado $\gamma > 0$, existe t_γ tal que $\mathbf{x}(t) \in V_\gamma$ para todo $t > t_\gamma$ o que, pela propriedade "decrescente" das vizinhanças V_γ, nos levará a concluir que $\mathbf{x}(t) \to 0$ para $t \to \infty$, isto é, o ponto crítico é assintoticamente estável.

Suponha que esta afirmação não seja correta, isto é, existe $\gamma > 0$ tal que $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \notin V_\gamma$ para nenhum $t > t_0$. (Se $\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}_0) \in V_\gamma$, então, obviamente, $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in V_\gamma$ para $t > t_1$).

Tomemos, então, a função $\varphi(\mathbf{x}) = \text{grad } U(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$ no conjunto fechado $\{\mathbf{x} : \| \mathbf{x} \| \leqslant r_0 \text{ e } U(\mathbf{x}) \geqslant \gamma\}$, onde ela tem um máximo negativo $-\lambda_0 < 0$.

Como a trajetória se encontra nesta região para $t > t_0$, temos $\dfrac{d}{dt} U(\mathbf{x}(t)) < -\lambda_0$ para $t > t_0$.

Mas isto é um absurdo, pois implicaria que $U(\mathbf{x}(t)) \to -\infty$ $(t \to \infty)$. Fica, portanto, provada a afirmação.

3. Os argumentos para a demonstração desta parte são muito semelhantes aos utilizados anteriormente, e deixaremos por conta do leitor.

Observações:

a. É importante que o leitor não fique tão impressionado com os detalhes meramente técnicos, a ponto de se esquecer das idéias fundamentais da teoria.

O teorema que acabamos de demonstrar considera funções de Lyapunov muito gerais, o que resulta em algumas dificuldades topológicas.

Uma função de Lyapunov não é "única" e, obviamente, nos interessa sempre procurar aquelas mais simples.

b. As funções de Lyapunov usualmente encontradas nas aplicações são funções quadráticas (a exemplo do oscilador harmônico) do tipo $U(\mathbf{x}) = P\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, onde P é uma matriz simétrica positiva definida e, portanto, as linhas (respectivamente, superfícies) de nível de $U(\mathbf{x})$ são as familiares elipses (respectivamente, elipsóides).

Observe que, neste caso, grad $U(\mathbf{x}) = 2P\mathbf{x}$. Obtenha esta representação para o oscilador harmônico!

c. Um caso especial e que possivelmente motivou os trabalhos de Lyapunov foi o princípio de Dirichlet-Lagrange: "A posição de equilíbrio de um sistema mecânico conservativo configura um ponto de mínimo estrito para a energia potencial".

Para sermos mais precisos analisemos o Princípio de Dirichlet-Lagrange para sistemas dinâmicos conservativos do tipo $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\,\phi$, que escreveremos na forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{grad}_{\mathbf{x}}\,\phi(\mathbf{x}), \qquad \text{com} \qquad \phi(\mathbf{0}) = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1/2\ \mathbf{y}^2 + \phi(\mathbf{x})$ é a função de energia e é uma integral do sistema. Por outro lado, suponha que ϕ tenha um mínimo estrito na origem do $\mathbb{R}^n$, o que implica que $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ terá mínimo estrito na origem do $\mathbb{R}^{2n}$.

Portanto, $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é positiva definida e é uma função de Lyapunov (*a*) para o sistema acima.

d. O método de Lyapunov tem extensões naturais para o estudo da estabilidade de soluções não estacionárias de sistemas não autônomos, isto é, para soluções $\mathbf{z}_0(t)$ de $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, t)$. Também existe uma generalização para o estudo da estabilidade de soluções periódicas, mas não entraremos neste assunto.

O leitor interessado poderá consultar com grande proveito o livro de L. S. Pontriaguine*.

e. Tomemos agora um sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, de coeficientes constantes e consideremos o problema de encontrar uma função de Lyapunov no caso em que a matriz A é assintoticamente estável, isto é, se λ é autovalor de A, então $Re\,\lambda < 0$.

A função natural a ser procurada neste caso é uma forma quadrática e, portanto, suponha que $U(\mathbf{x}) = P\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, onde P deve ser simétrica positiva definida. Então, devemos ter grad $U(\mathbf{x}) = 2P\mathbf{x}$ (verifique!) e para a condição de estabilidade assintótica

$$2P\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} < 0 \qquad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

A expressão $2P\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$ pode ser escrita como uma forma quadrática

$$2P\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = P\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + P\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = A^tP\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot PA\mathbf{x} = (A^tP + PA)\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

A questão, portanto, pode ser formulada totalmente em termos de Álgebra de Matrizes: dada uma matriz real A assintoticamente estável, em que condições podemos obter uma matriz simétrica positiva definida P tal que $L = A^tP + PA$ (que é simétrica!) seja negativa definida?

Esta questão é completamente respondida pelo seguinte Teorema de Lyapunov: "Todos os autovalores λ de A têm $Re\,\lambda < 0$ se, e somente se, para toda matriz simétrica negativa definida N existe uma correspondente matriz simétrica positiva definida P tal que $N = A^tP + PA$"**.

Observe que o problema pode ser abordado se analisarmos o operador L entre o espaço de matrizes $n \times n$, $L(M) = A^tM + MA$ e considerarmos apenas o subespaço das matrizes simétricas. (Verifique!) Na verdade basta considerar apenas as matrizes diagonais. Não iremos detalhar esta demonstração, pois utilizaremos outro método mais analítico em seguida.

Concluímos, assim, que as funções de Lyapunov quadráticas não só foram a motivação da teoria, mas constituem a regra geral das aplicações. Procuraremos, então, uma função de Lyapunov para sistemas lineares assintoticamente estáveis que possa ser obtida pelo teorema a seguir.

Teorema da Função de Lyapunov para Sistemas Lineares Assintoticamente Estáveis Se A é uma matriz $n \times n$ assintoticamente estável, então existe uma forma quadrática $W(\zeta) = P\zeta \cdot \zeta$ positiva definida tal que $\dot{W}(\zeta) = \text{grad } W \cdot A\zeta$ é negativa definida.

---

* PONTRIAGUINE, L. S. *Equations Différentiálles Ordinaires*. Moscou, Mir, 1969.

** LYAPUNOV, A. M. *Probleme Generale de la Stabilité du Mouvement*. Princeton, Princeton University Press, 1947.

Demonstração: Defina $W(\zeta)=\int_0^\infty \| U(\tau)\zeta \|^2 d\tau = \int_0^\infty U(\tau)\zeta \cdot U(\tau)\zeta\, d\tau$.

Esta integral existe, pois as funções $U_{k_j}(\tau)$ são quase-polinômios cujos expoentes λ são autovalores de A e, portanto, $Re\,\lambda<0$, ou seja, $\| U(\tau)\zeta \| < Me^{-\mu t}$, com μ e M positivos.

Então

$$W(x(t))=\int_0^\infty \| U(\tau)x(t) \|^2 d\tau$$

Como $x(t)=U(t)x_0$ e $U(\tau)U(t)x_0=U(\tau+t)x_0$ (ver Capítulo 4) temos

$$W(x(t))=\int_0^\infty \| U(t+\tau)x_0 \|^2 d\tau$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}W(x(t))=\int_0^\infty \frac{d}{dt}\| U(t+\tau)x_0 \|^2 d\tau=\int_0^\infty \frac{d}{d\tau}\| U(t+\tau)x_0 \|^2 d\tau=$$

$$=\| U(t+\tau)x_0\|^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau\to\infty} = -\| U(t)x_0 \|^2 = -\| x(t) \|^2$$

ou seja

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta}\cdot A\zeta = -\| \zeta \|^2 = 2P\zeta \cdot A\zeta = (A^tP+PA)\zeta\cdot\zeta$$

Portanto, P é a solução da equação matricial de Lyapunov $A^tP+PA=-I$, onde

$$P_{kj}=\sum_i \int_0^\infty U_{ij}(t)\,U_{ik}(t)\,dt$$

Observe que as elipses (elipsóides) $W(x)=E$ são atravessadas sempre pelas trajetórias na direção do seu interior $\{x: W(x)\leqslant E\}$ e nunca tangenciados (ver Figura 5.34).

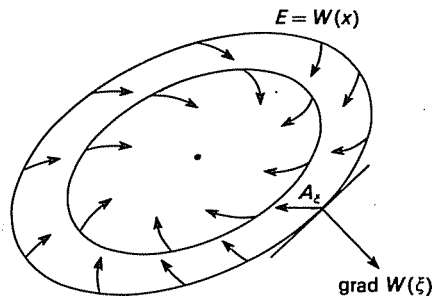


Figura 5.34

Com base neste teorema, podemos então discutir o importante caso de pontos de equilíbrio para sistemas ditos quase lineares e que se constitui em uma ferramenta indispensável e básica no desenvolvimento da teoria não linear.

5.6 SISTEMAS AUTÔNOMOS QUASE LINEARES

Consideremos novamente o sistema autônomo geral de segunda ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

Seja (x_0, y_0) um ponto de equilíbrio isolado deste sistema, isto é

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad G(x_0, y_0) = 0$$

e existe $\varepsilon > 0$ tal que $F(x, y) \neq 0$, $G(x, y) \neq 0$ para todo par $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, (x, y) pertencente ao círculo de centro (x_0, y_0) e raio ε.

Já sabemos que $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ é uma solução constante de (1). Para analisar o comportamento das trajetórias nas vizinhanças do ponto de equilíbrio podemos, sem perda de generalidade, considerar $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ (se $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$ fazemos a substituição $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$). Considerando as funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ contínuas com derivadas de primeira ordem também contínuas numa vizinhança de $(0, 0)$, podemos expandi-las pela Fórmula de Taylor e obtemos o Sistema (1) na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y) = F(0, 0) + x \dfrac{\partial F}{\partial x}(0, 0) + y \dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0) + F_1(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y) = G(0, 0) + x \dfrac{\partial G}{\partial x}(0, 0) + y \dfrac{\partial G}{\partial y}(0, 0) + G_1(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

Temos que

$$F(0, 0) = G(0, 0) = 0$$

e

$$\lim_{r \to 0} \frac{F_1(x, y)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{G_1(x, y)}{r} = 0 \tag{3}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (distância do ponto (x, y) à origem $(0, 0)$).

Isto nos sugere que o comportamento das órbitas numa vizinhança do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ seja determinado pelo sistema linearizado

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_x(0, 0)\, x + F_y(0, 0)\, y \\ \dfrac{dy}{dt} = G_x(0, 0)\, x + G_y(0, 0)\, y \end{cases} \tag{4}$$

De uma maneira geral, dizemos que um sistema autônomo é *quase linear*, se for da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + F_1(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + G_1(x, y) \end{cases} \tag{5}$$

onde $F_1(x, y)$ e $G_1(x, y)$ satisfazem a Propriedade (3).

Observamos que se as funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ do Sistema (1) forem contínuas e tiverem derivadas parciais primeiras contínuas numa vizinhança do ponto de equilíbrio isolado $(0, 0)$, então o Sistema (1) será quase linear.

Para o caso geral de um campo $f(\mathbf{x})$ em $\mathbb{R}^n$, onde $\mathbf{0}$ é ponto de equilíbrio, podemos escrever

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathcal{o}(\mathbf{x})$$

onde $A_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0})$ e $\mathcal{o}(\mathbf{x})$ é uma designação geral para as funções contínuas definidas em uma vizinhança da origem e que são de ordem de nulidade inferior a x; isto é, podemos escrever

$$\mathcal{o}(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} \| r(\mathbf{x}) \qquad \text{onde} \qquad \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{0} \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} r(\mathbf{x}) = 0$$

ou

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{0} \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathcal{o}(\mathbf{x})}{\| \mathbf{x} \|} = 0$$

O campo $f(\mathbf{x})$ pode ser considerado como um campo linear perturbado por termos de ordem superior.

No que se segue, iremos sempre supor que f seja continuamente diferenciável, tal como no Teorema da Secção 5.2.

A questão a ser estudada agora é: em que condições a parte linear predomina sobre os termos de ordem superior na caracterização qualitativa do ponto crítico?

Esta questão é respondida pelo famoso Teorema de Linearização de Lyapunov, que passaremos a demonstrar:

Teorema da Linearização de Lyapunov-Poincaré Seja $f(\mathbf{x})$ um campo continuamente diferenciável em uma vizinhança de origem onde podemos escrever

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathcal{o}(\mathbf{x})$$

1. Então, se a matriz A for assintoticamente estável, o ponto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ será assintoticamente estável para o campo $f(\mathbf{x})$.

2. Se a matriz A tiver um de seus autovalores λ tal que $Re\,\lambda > 0$ (parte real positiva) então o sistema será instável.

3. Se todos os autovalores λ de A forem tais que $Re\,\lambda > 0$, o ponto crítico é repulsor, isto é, existe uma vizinhança da origem V tal que se $\mathbf{x}(t)$ for uma órbita não nula, existirá t_0, e para $t > t_0$ temos que $\mathbf{x}(t) \notin V$.

Demonstração: Mostraremos que a função quadrática de Lyapunov $W(\mathbf{x}) = P\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ para o sistema linear $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, tal como construída no teorema anterior, é suficiente.

Para isto, analisemos a derivada desta função na direção do campo f

$$\frac{\partial W}{\partial x} f(\mathbf{x}) = 2P\mathbf{x} \cdot (A\mathbf{x} + \mathcal{o}(\mathbf{x})) = 2P\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + 2P\mathbf{x} \cdot \mathcal{o}(\mathbf{x}) = -\| \mathbf{x} \|^2 + 2P\mathbf{x} \cdot \mathcal{o}(\mathbf{x})$$

Mas

$$2P\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \leqslant 2 \| P\mathbf{x} \| \quad \| \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \| \leqslant \gamma \| \mathbf{x} \| \quad \| \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \| \leqslant \gamma \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})}{\| \mathbf{x} \|} \| \mathbf{x} \|^2$$

Se tomarmos $\mathbf{x}$ em uma região Ω tal que $\gamma \dfrac{\| \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \|}{\| \mathbf{x} \|} < 1 - \varepsilon$ (o que é possível, visto que $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \dfrac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})}{\| \mathbf{x} \|} = 0$) vemos que em Ω, grad $W \cdot f < -\varepsilon \| \mathbf{x} \|^2$ e, portanto, $W(\mathbf{x})$ é uma função de Lyapunov do tipo 3b (Secção 5.5) para o campo $f(\mathbf{x})$ na vizinhança de origem o que implica, pelo Teorema de Lyapunov, a estabilidade assintótica.

Deixaremos a cargo do leitor efetuar a demonstração dos outros itens, já que os argumentos são semelhantes.

EXEMPLO 1

Determine a natureza dos pontos de equilíbrio do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - xy = F(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - y^2 = G(x, y) \end{cases}$$

Solução: O sistema dado é quase linear, uma vez que as funções

$$\frac{F_1(x, y)}{r} = \frac{-xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{G_1(x, y)}{r} = \frac{-y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

tendem a zero quando $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$. Os pontos de equilíbrio são obtidos do sistema algébrico

$$\begin{cases} x - xy = x(1 - y) = 0 \\ 2y - y^2 = y(2 - y) = 0 \end{cases}$$

de onde obtemos $(0, 0)$ e $(0, 2)$.

Vamos analisá-los separadamente:

$\boxed{A = (0, 0)}$ Na proximidade da origem, o sistema inicial pode ser aproximado pelo sistema linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \dfrac{\partial F(0, 0)}{\partial x} + y \dfrac{\partial F(0, 0)}{\partial y} \\ \dfrac{dy}{dt} = x \dfrac{\partial G(0, 0)}{\partial x} + y \dfrac{\partial G(0, 0)}{\partial y} \end{cases}$$

ou seja, cujo ponto crítico $(0, 0)$ é um nódulo instável, uma vez que as raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ do polinômio característico associado são reais positivas.

$\boxed{B = (0, 2)}$ Tomando a mudança de variáveis $x = u$ e $y = 2 + v$, o sistema inicial vem dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u - u(2 + v) = -u - uv \\ \dfrac{dv}{dt} = 2(2 + v) - (2 + v)^2 = -2v - v^2 \end{cases}$$

que também é quase linear. Vamos analisar o ponto crítico $(0, 0)$ deste sistema, que corresponde ao ponto $(0, 2)$ do inicial.

Consideramos o sistema linear correspondente

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -u \\ \dfrac{dv}{dt} = -2v \end{cases}$$

Neste caso, as raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ e, portanto, o ponto de equilíbrio será um nódulo assintoticamente estável (ver Figura 5.35).

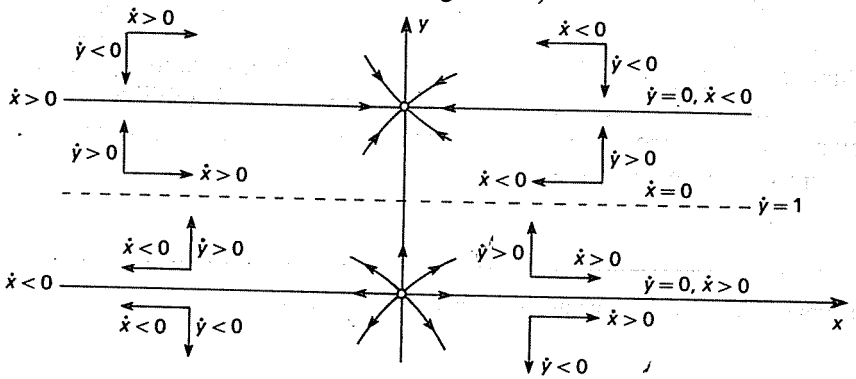


Figura 5.35

$$\dot{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-y) > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \text{ e } y < 1) \quad \text{ou} \quad (x < 0 \text{ e } y > 1)$$

$$\dot{y} > 0 \Leftrightarrow y(2-y) > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 2$$

A figura acima nos dá um esboço da natureza dos pontos críticos. Como as órbitas não podem se cruzar e nem cruzar outras órbitas, e como os eixos x e y são órbitas, então cada uma que nasce num determinado quadrante permanece neste quadrante.

Como não temos órbitas fechadas, quando $t \to \infty$, todas as órbitas devem convergir para o ponto crítico $(0, 2)$. A reta $y = 1$ é uma *isóclina* que intersecta estas órbitas ortogonalmente.

Uma visão global das trajetórias no plano de fase pode ser dada pela Figura 5.36, mostrada abaixo:

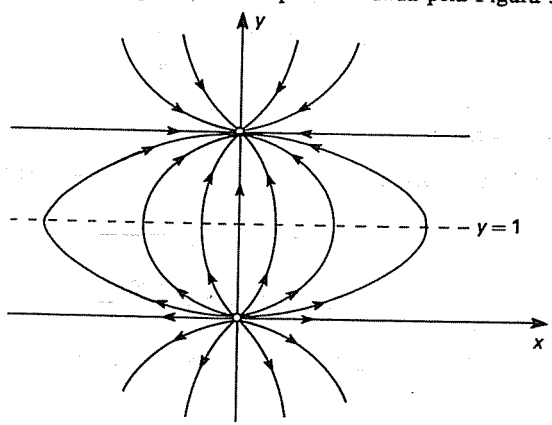


Figura 5.36

EXEMPLO 2

Analise o ponto de equilíbrio do sistema quase linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y\sqrt{x^2+y^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + x\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Solução: O único ponto de equilíbrio deste sistema é a origem (0, 0). O sistema linear correspondente é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

Temos que as raízes do polinômio característico são reais e iguais: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Portanto, a origem seria um nó assintoticamente estável do sistema linear.

O Teorema da Secção 5.3 chama a atenção para a sensibilidade do ponto crítico, quando $\lambda_1 = \lambda_2$. Vamos analisá-lo neste caso:

Consideremos o sistema inicial em coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

De onde

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

ou seja

$$-r\cos\theta - r^2\operatorname{sen}\theta = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$-r\operatorname{sen}\theta + r^2\cos\theta = \frac{dr}{dt}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Tirando os valores de $\dfrac{dr}{dt}$ e $\dfrac{d\theta}{dt}$, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -r \\ \dfrac{d\theta}{dt} = r \end{cases}$$

Integrando a primeira equação, temos $r(t) = c\,e^{-t}$ (onde $c > 0$ é uma constante arbitrária). Substituindo na segunda equação, obtemos

$$\theta(t) = -c\,e^{-t} + k, \qquad \text{ou seja,} \qquad r = -\theta + k$$

Isto mostra que a origem é um *ponto espiral* e como $\dfrac{dr}{dt} < 0$, este ponto é assintoticamente estável. ■

EXEMPLO 3

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Este sistema quase linear tem como único ponto de equilíbrio a origem (0, 0). Para o sistema linear correspondente (Verifique!)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

O ponto crítico $(0, 0)$ seria um centro (estável), uma vez que as raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$ imaginários puros (ver Quadro 5.1).

Em coordenadas polares o sistema inicial é escrito na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -r^2 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$$

cuja solução geral é dada por

$$r(t) = \frac{1}{t + k_1} \qquad (k_1 > 0); \qquad \theta(t) = t + k_2$$

que é a equação paramétrica de uma espiral.

Observamos que quando t cresce, r decresce e, portanto, a origem é um ponto espiral assintoticamente estável. ■

EXEMPLO 4 Equação de Van Der Pol

O coeficiente de viscosidade c que aparece na equação do oscilador harmônico amortecido tem uma influência substancial no comportamento das soluções (ver Exemplo 7 da Secção 5.3). As equações propostas por Van der Pol consideram a possibilidade do coeficiente c depender da variável de estado particularmente na forma $c(x) = -\varepsilon(1 - x^2)$ onde $\varepsilon \sim 0$ é constante e, portanto, a equação toma a forma

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + kx = 0 \tag{6}$$

Observe que se $\varepsilon > 0$, $c(x)$ é um termo impulsionador para $x^2 < 1$ e se transforma em resistência para $x^2 > 1$.

Estas equações apareceram inicialmente com o estudo dos amplificadores de válvula na década de 1930, embora outras análogas já tivessem sido analisadas pelo matemático Lord Rayleigh em problemas mecânicos. Posteriormente foram também utilizadas na descrição de excitações nervosas*.

Podemos escrever a equação (6) como um sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon(1 - x^2)y - kx \end{cases} \tag{7}$$

ou vetorialmente

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \varepsilon)$$

Observe que a origem é o único ponto singular do campo f. Linearizando o campo neste ponto obtemos o sistema

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{8}$$

cujos autovalores são

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4k}}{2}$$

Consideraremos apenas o caso $\varepsilon^2 \ll 4k$ (ε^2 é "bem menor" que $4k$), de onde temos duas possibilidades:

(*i*) Se $\varepsilon < 0$, temos dois autovalores complexos com parte real negativa e, portanto, o ponto é assintoticamente estável:

Pelo Teorema de Lyapunov-Poincaré concluímos, então, que a origem é assintoticamente estável para o sistema $\mathbf{x} = f(x, \varepsilon)$.

A equação de Van der Pol se constitui em um exemplo clássico da influência marcante que a variação de parâmetros pode exercer sobre o aspecto qualitativo do plano de fase.

---

* ROSEN, R. *Dynamical System Theory in Biology*. New York, Wiley, 1970, 1v.

Suponha agora que tenhamos controle sobre o parâmetro ε, e passando então do valor $\varepsilon = 0$, analisemos o que se sucede.

(*ii*) Se $\varepsilon > 0$, os autovalores têm $Re\ \lambda = \varepsilon/2 > 0$ e, portanto, também pelo Teorema de Lyapunov-Poincaré as vizinhanças da origem se tornam repulsoras, ou seja, o repouso do oscilador é instável e ele se afasta rapidamente desta posição. Observe, todavia, que a trajetória não deve ir muito longe, pois para $x^2 > 1$, o termo $-\varepsilon(1 - x^2) = c(x)$ muda de sinal e passa a ser uma resistência contrária ao movimento cada vez maior.

Do ponto de vista físico é razoável supor, então, que o processo se estabilize quando $c(x) = 0$, isto é $|x| = 1$, e do ponto de vista geométrico do plano de fase podemos suspeitar da existência de uma solução periódica atratora.

E é exatamente isto que acontece. Para $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon \sim 0$, temos o seguinte plano de fase, ilustrado na Figura 5.37.

O fenômeno do aparecimento de processos oscilatórios repentinos (soluções periódicas atratoras) a partir de pontos de equilíbrios estáveis, causado pela passagem de um parâmetro através de um valor crítico, é chamado *bifurcação de Hopf* e tem uma destacada importância em variadas questões de Física, Biologia, Química e Matemática.

Uma trajetória fechada, tal que todas as trajetórias vizinhas se aproximem dela, é denominada *ciclo limite estável* (ver Figura 5.38).

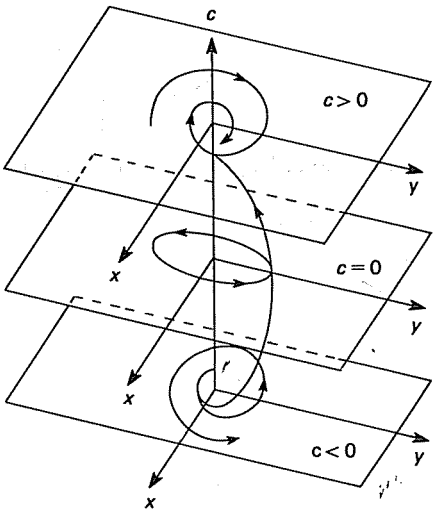


Figura 5.37 Espaço-*xyc* da equação de Van Der Pol

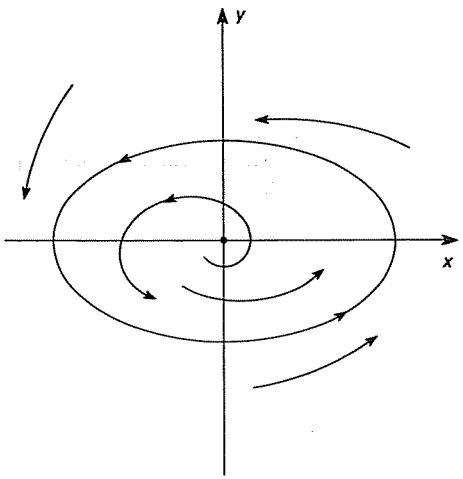


Figura 5.38 Ciclo limite

Este seria o funcionamento permanente do oscilador para $\varepsilon > 0$. Analise detalhadamente o plano de fase das equações de Van der Pol e obtenha o traço do ciclo limite. Supõe-se que fenômenos semelhantes sejam a base para a explicação de reações químicas que têm um comportamento periódico. Consulte os interessantes artigos, sobre este assunto, escritos por L. Howard e A. Winfree*.

---

* HOWARD, L. Nonlinear Oscillations. In: *Nonlinear Oscillations in Biology*. Providence, AMS Lectures in Applied Mathematics, 1978.

WINFREE, A. Rotating Chemical Reaction. USA, *Scientific American*, June 1974.

Além desses artigos, há um livro histórico contendo uma enorme quantidade de exemplos de osciladores físicos e uma notável riqueza de idéias apresentadas de forma clara e elegante: Andronov, A.A. & Chaikin, C.E. *Theory of Oscillators*. Princeton, Princeton University Press, 1949.

Consulte ainda Krasnosel'skiy, M.A.; Perov, A.I.; Povolotskiy, A.I. & Zabreiko, P.P. *Plane Vector Fields*. New York, Academic Press, 1966, para uma leitura elementar e agradável em uma apresentação de resultados profundos.

Observação:

A equação de Van der Pol pode ser vista como uma pequena perturbação do oscilador harmônico conservativo, $(z \in \mathbb{C})$, $\dot{z} = -iz + \varepsilon f(z)$. Observe como uma pequena perturbação pode modificar completamente o plano de fase de um campo vetorial. ■

EXERCÍCIOS

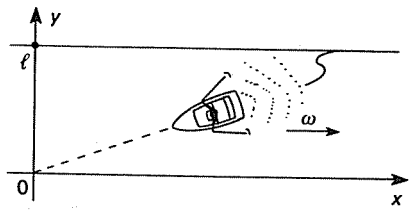
1. Faça um estudo completo dos sistemas quase lineares em relação à estabilidade de seus pontos críticos

$$a.\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 yx + c_1 x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 y + b_2 xy + c_2 y^2 \end{cases}$$

$$b.\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 y + b_2 x\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

2. Estude a equação de Liénard: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + (3x^2 - 2)\dfrac{dx}{dt} + x + x^3 = 0$. Verifique a existência de ciclo limite para esta equação.
3. Um barco é remado com o objetivo de atravessar um rio de largura ℓ, sempre dirigido para um determinado ponto P do lado oposto, e com velocidade constante v com relação à água que, por sua vez, tem velocidade constante w. Mostre que

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{-vx}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ \dot{y} = w - \dfrac{vy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \end{cases}$$



Mostre que as órbitas (linhas de fluxo) são dadas por

$$(x^2 + y^2)^{1/2} + y = \ell^{\alpha} x^{1-\alpha} \qquad (\alpha = w/v)$$

Obtenha o plano de fase para $\alpha < 1$ nas vizinhanças da origem.

4. Analise o plano de fase para

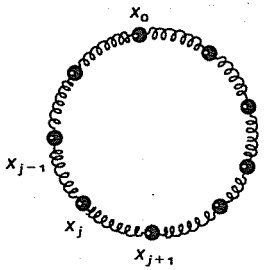
$$a.\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \operatorname{sen} y - x \end{cases}$$

$$b.\ \begin{cases} \dot{x} = y + 2x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

5. O chamado *reticulado periódico de Toda* (sistema de massa-mola estudado por M. Toda) é sujeito a forças apenas entre massas vizinhas (ver a figura deste exercício) derivadas de um potencial exponencial na forma

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = \exp(x_{j-1} - x_j) - \exp(x_j - x_{j+1})$$

onde x_j é a posição da j-ésima massa (unitária) e $x_m = x_0$.



Escreva estas equações como um sistema em $\mathbb{R}^m$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x, y) \qquad \text{onde} \qquad y_j = \frac{dx_j}{dt}$$

e analise o ponto crítico $x = y = 0$*.

6. Analise o ponto crítico da origem para as equações de E. Lorenz (obtidas de um problema-modelo de Meteorologia)

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda)$$

onde

$$f(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{pmatrix} -3(x_1 - x_2) \\ -x_1x_3 + \lambda x_1 - x_2 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

para $\lambda < 0$ e para $\lambda > 1$.

Obtenha os outros pontos críticos do sistema para $\lambda > 1$ e mostre que são estáveis para $1 < \lambda < 21$ e instáveis para $\lambda > 21$.

As trajetórias deste sistema para $\lambda > 21$ apresentam um caráter completamente caótico. Este tipo de comportamento de certos sistemas dinâmicos tem sido motivo de intensa pesquisa na última década e representa uma tentativa (em dimensão finita) para a explicação do ainda misterioso fenômeno da turbulência em Dinâmica dos Fluidos (um sistema de dimensão infinita)**.

MODELOS MATEMÁTICOS — UM ESTUDO QUALITATIVO

Modelo 1 COMPETIÇÃO ENTRE DUAS ESPÉCIES (UM MODELO MAIS GERAL)

A interação entre duas espécies A e B se processa de maneira que cada espécie afeta negativamente a outra na luta pela sobrevivência (espaço,

---

* Você poderá pesquisar sobre o assunto em Kunin, I., *Elastic Media with Microstructure*. New York, Springer-Verlag, 1978, v. 1.

** HOFSTADTER, D.R. Strange Attractors: Mathematical Patterns Delicately Poised Between Order and Chaos. In: *Science*, 245:5, 1981.

KADANOFF, L.P. Roads to Chaos. In: *Physics Today*. December, 1983.

MAY, R.M. Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics. In: *Nature*, 1976, v. 261.

alimentação etc.). Como os recursos são limitados, o modelo de crescimento logístico é o mais indicado para cada espécie, na ausência da outra.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bx^2 & (\text{se } y = 0) \\ \dfrac{dy}{dt} = cy - dy^2 & (\text{se } x = 0) \end{cases} \tag{1}$$

onde x e y são as populações das espécies A e B, respectivamente. Se incluirmos o efeito da competição, a interação será modelada, supondo que a taxa de crescimento de cada espécie seja reduzida por um fator proporcional à população da outra espécie. Assim, as equações que governam tal ecossistema são

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - bx - \alpha y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c - dy - \beta x) & (x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0) \end{cases} \tag{2}$$

indicando que as respectivas taxas de crescimento são inibidas de uma maneira linear pelas duas populações.

O sistema de equações diferenciais (2) não tem necessariamente uma solução analítica; por isso, neste caso específico, um estudo qualitativo das soluções é imprescindível.

Os pontos críticos de (2) são dados pelas soluções do sistema algébrico

$$\begin{cases} x(a - bx - \alpha y) = 0 \\ y(c - dy - \beta x) = 0 \end{cases}$$

Obtemos, então, os seguintes pontos críticos:

1. a origem $(0, 0)$ (intersecção das retas $x = 0$ e $y = 0$);

2. a intersecção da reta $a - bx - \alpha y = 0$ com a reta $y = 0$ (eixo-x), resultando: $\left(\dfrac{a}{b}, 0\right)$;

3. a intersecção das retas $c - dy - \beta x = 0$ e $x = 0$: $\left(0, \dfrac{c}{d}\right)$;

4. a intersecção das retas $a - bx - \alpha y = 0$ e $c - dy - \beta x = 0$ resultando: $\left(\dfrac{ad - c\alpha}{bd - \alpha\beta}, \dfrac{cb - a\beta}{bd - \alpha\beta}\right)$ desde que $(bd - \alpha\beta) \neq 0$.

No caso de $bd - \alpha\beta = 0$ (as retas paralelas), a análise já foi feita no início do capítulo.

O ponto de equilíbrio $(0, 0)$ será sempre um nódulo instável, independentemente dos valores dos coeficientes que aparecem em (2), pois tal sistema linearizado é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \\ \dfrac{dy}{dt} = cy \qquad a>0 \quad \text{e} \quad c>0 \end{cases} \tag{3}$$

onde $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = c$ são as raízes do polinômio característico associado.

Para a análise do ponto $\left(\dfrac{a}{b}, 0\right)$, tomamos a mudança de variáveis $x = \dfrac{a}{b} + u$ e $y = v$. O Sistema (2) se modifica em

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -au - \dfrac{a\alpha}{b}v - bu^2 - \alpha uv \\ \dfrac{dv}{dt} = \left(c - \dfrac{\beta a}{b}\right)v - dv^2 - \beta uv \end{cases} \tag{4}$$

que linearizado nos fornece

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -au - \dfrac{a\alpha}{b}v \\ \dfrac{dv}{dt} = \left(c - \dfrac{\beta a}{b}\right)v \end{cases} \tag{5}$$

As raízes do polinômio característico associado são $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = c - \dfrac{\beta a}{b}$. Como λ_1 é sempre negativo, se $\dfrac{c}{\beta} < \dfrac{a}{b}$, então $\lambda_2 < 0$ e o ponto $\left(\dfrac{a}{b}, 0\right)$ será um nódulo assintoticamente estável; se $\dfrac{c}{\beta} > \dfrac{a}{b}$, então $\lambda_2 > 0$ e o ponto $\left(\dfrac{a}{b}, 0\right)$ será um ponto de sela (instável).

Com uma análise análoga para o ponto de equilíbrio $\left(0, \dfrac{c}{d}\right)$ temos: $\lambda_1 = a - \alpha\dfrac{c}{d}$ e $\lambda_2 = -c$. Logo, se $\dfrac{a}{\alpha} < \dfrac{c}{d}$, o ponto será um nódulo assintoticamente estável e se $\dfrac{a}{\alpha} > \dfrac{c}{d}$ será um ponto de sela.

Para que o ponto $\left(\dfrac{ad - c\alpha}{bd - \alpha\beta}, \dfrac{cb - a\beta}{bd - \alpha\beta}\right)$ com $(bd - \alpha\beta) \neq 0$ esteja no primeiro quadrante, é necessário que

1. $\dfrac{c}{d} > \dfrac{a}{\alpha}$ e $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{\beta}$

ou

2. $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{\alpha}$ e $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{\beta}$

pois em ambos os casos teremos $x_e = \dfrac{ad - c\alpha}{bd - \alpha\beta} > 0$ e $y_e = \dfrac{cb - a\beta}{bd - \alpha\beta} > 0$.

A mudança de variáveis $x = x_e + u$, $y = y_e + v$ no Sistema (2) fornece um sistema quase linear, cujo linearizado correspondente é

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -b\,x_e\,u - \alpha x_e\,v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\beta\,y_e\,u - d\,y_e\,v \end{cases} \qquad \text{(Verifique!)}$$

O polinômio característico da matriz dos coeficientes é

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (bx_e + dy_e)\lambda + (bd - \alpha\beta)x_e y_e = 0$$

Suas raízes são

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(bx_e + dy_e) \pm \frac{1}{2}[(bx_e + dy_e)^2 - 4\,(bd - \alpha\beta)\,x_e y_e]^{1/2}$$

Agora

$$\Delta = (bx_e + dy_e)^2 - 4\,(bd - \alpha\beta)x_e y_e = (bx_e - dy_e)^2 + 4\,\alpha\beta x_e y_e > 0$$

1. $\dfrac{c}{d} > \dfrac{a}{\alpha}$ e $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{\beta} \Rightarrow \dfrac{ac}{bd} > \dfrac{ac}{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta - bd > 0$

logo, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$.

Neste caso, o ponto de equilíbrio será um ponto de sela.

Analogamente, no caso **2**,

2. $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{\alpha}$ e $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{\beta}$, temos $(\alpha\beta - bd) < 0$ e, portanto, $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$,

o que implica que o ponto (x_e, y_e) é um nó assintoticamente estável.

No plano de fase a equação (não separável)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(c - dy - \beta x)}{x(a - bx - \alpha y)}$$

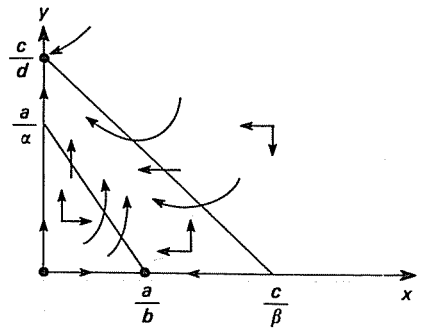
não admite solução envolvendo funções elementares. Neste plano, os eixos são ambos isóclinas e curvas soluções. As outras isóclinas são

$$c - dy - \beta x = 0, \qquad \text{onde} \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

e

$$a - bx - \alpha y = 0, \qquad \text{onde} \qquad \frac{dx}{dy} = 0$$

Dependendo da posição relativa dessas retas temos quatro configurações distintas, onde os pontos críticos serão marcados como nos diagramas:



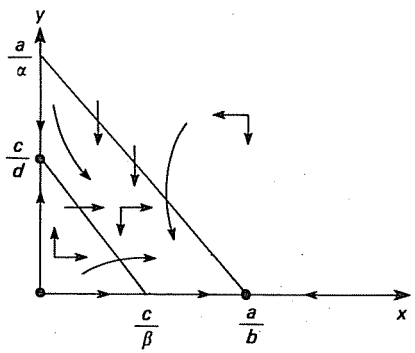
$\frac{c}{d} > \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{c}{\beta} > \frac{a}{b}$

(0, 0) nó instável
(0, c/d) nó assintoticamente estável
(a/b, 0) ponto de sela

A espécie y sobrevive e sua população limite será $y_\infty = \frac{c}{d}$.

A espécie x será extinta, a não ser que $y_0 = 0$; logo $x_\infty = \frac{a}{b}$.

Figura 5.39



$\frac{c}{d} < \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$

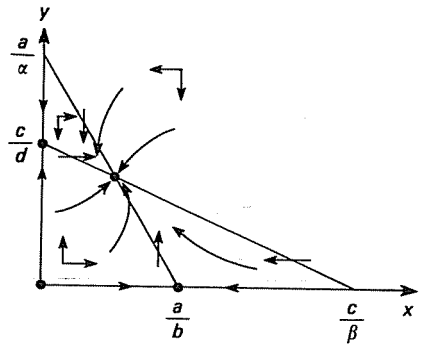
(0, 0) nó instável
(0, c/d) ponto de sela
(a/b, 0) nó assintoticamente estável.

A espécie x sobrevive e tende a $x_\infty = \frac{a}{b}$.

A espécie y vai para a extinção, a não ser que $x_0 = 0$ e daí $y_\infty = \frac{c}{d}$.

Figura 5.40

I. M. E. C. C.
BIBLIOTECA



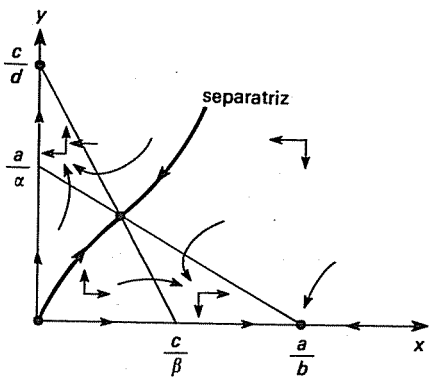
$$\frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d} \text{ e } \frac{c}{\beta} > \frac{a}{b}$$

(0, 0) nó instável
(0, c/d) ponto de sela
(a/b, 0) ponto de sela
(x_e, y_e) nó assintoticamente estável
As duas espécies sobrevivem e tendem a

$$x_\infty = x_e = \frac{ad - c\alpha}{bd - \alpha\beta} \text{ e } y_\infty = y_e = \frac{cb - \alpha\beta}{bd - \alpha\beta}$$

com $bd - \alpha\beta > 0$ (há uma fraca competição entre as duas espécies).

Figura 5.41



$$\frac{c}{d} > \frac{a}{\alpha} \text{ e } \frac{c}{\beta} < \frac{a}{b}$$

(0, 0) nó instável
(0, c/d) nó assintoticamente estável
(a/b, 0) nó assintoticamente estável
(x_e, y_e) ponto de sela (instável)

Haverá extinção de uma das espécies, dependendo da condição inicial das populações. Só pode haver coexistência das espécies se o ponto inicial estiver na trajetória divisória (separatriz), que é composta das duas órbitas que se dirigem para (x_e, y_e).

Figura 5.42 Ponto de sela

Comentário final. O "Princípio de Exclusão Competitiva" ou Lei de Gause estabelece que não podem coexistir duas espécies em estado de competição forte; uma delas sempre será extinta. No caso em que (x_e, y_e) é um nódulo estável, na verdade as espécies não estão competindo, pois $bd - \alpha\beta > 0$ indica que os fatores de competição α e β são bem pequenos. Um exemplo deste caso é a interação existente entre tilápias e carpas convivendo em um mesmo tanque.

Modelo 2 PRESA-PREDADOR (LOTKA-VOLTERRA)

Neste modelo focalizaremos a interação entre duas espécies, onde uma delas dispõe de alimentos em abundância (presa) e a segunda espécie alimenta-se da primeira (predador). Denotaremos a população de presas por x e a dos predadores por y. Tanto x como y são funções do tempo t e seus crescimentos dependem das suas respectivas taxas de natalidade e mortalidade.

Admitiremos que o encontro de elementos das duas espécies seja ao acaso, a uma taxa proporcional ao tamanho das duas populações. Se a causa principal de mortalidade de cada presa for atribuída ao ataque de um predador, então tal taxa de mortalidade será proporcional ao produto xy. Admitindo que a taxa de natalidade da espécie predadora seja proporcional ao tamanho y da população e que a quantidade de elementos desta população sobrevivente seja proporcional à quantidade de alimento disponível x, podemos dizer que a taxa de natalidade efetiva para os predadores é proporcional a xy. Ainda, temos como hipótese que na ausência de predadores, as presas crescerão sem limite (não sofrerão nenhum tipo de inibição) e que na ausência de presas os predadores morrerão (por falta de alimento). Assim, as equações que regem o crescimento destas espécies são

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \tag{1}$$

onde a e α, b e β são constantes positivas, sendo a a taxa de crescimento das presas, b a taxa de mortalidade dos predadores e α, β as medidas de interação entre as duas espécies.

O modelo presa-predador (1) foi estabelecido e analisado independentemente por Lotka e Volterra, por volta de 1925.

Estamos interessados em saber o que acontecerá no futuro com as populações das presas e dos predadores, quando seus tamanhos iniciais são conhecidos.

Vamos estudar as órbitas do Sistema quase linear (1) no plano de fase:

Inicialmente, observamos que há dois pontos de equilíbrio do Sistema (1) dados pelas soluções das equações algébricas

$$\begin{cases} x(a-\alpha y)=0 \\ y(-b+\beta x)=0 \end{cases} \tag{2}$$

Tais pontos críticos são $(0,0)$ e $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, sendo $(0,0)$ um ponto de sela instável, uma vez que o sistema linearizado

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax \\ \dfrac{dy}{dt}=-by \end{cases} \tag{3}$$

admite como raízes do polinômio característico, $\lambda_1=a>0$ e $\lambda_2=-b<0$. Para analisar o ponto crítico $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, fazemos a mudança de variáveis (4) $x=\frac{b}{\beta}+u$ e $y=\frac{a}{\alpha}+v$ em (1) e obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-\dfrac{\alpha b}{\beta}v-\alpha uv \\ \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{a\beta}{\alpha}u+\beta uv \end{cases} \tag{5}$$

Tal sistema quase linear tem como sistema linearizado correspondente o seguinte

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-\dfrac{b\alpha}{\beta}v \\ \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{a\beta}{\alpha}u \end{cases} \tag{6}$$

cujo polinômio característico associado é $\lambda^2+ab=0$. As raízes são os imaginários puros $\lambda=\pm i\sqrt{ab}$. Neste caso, o ponto crítico é um centro (estável) para o Sistema linear (6). De fato, tomando

$$\frac{dv}{du}=-\frac{\frac{a\beta}{\alpha}}{\frac{b\alpha}{\beta}}\frac{u}{v} \tag{7}$$

obtemos as curvas-soluções no plano-uv de fase, dadas por

$$\frac{a\beta}{\alpha}u^2+\frac{b\alpha}{\beta}v^2=K \tag{8}$$

(sendo K uma constante positiva arbitrária) que são elipses concêntricas para cada valor de $K>0$ (ver Figura 5.43).

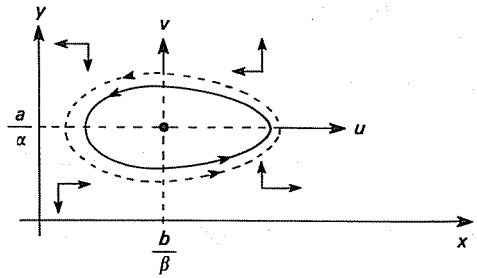


Figura 5.43 Ciclo ecológico

Sabemos que quando λ_1 e λ_2 são imaginários puros, a natureza do ponto crítico para o sistema não linear é indeterminada (conforme vimos no Teorema da Secção 5.3), podendo ser um centro ou uma espiral. No modelo presa-predador, especificamente, esta indeterminação pode ser resolvida, uma vez que a equação do plano de fase

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(a-\alpha y)}{y(-b+\beta x)} \tag{9}$$

é separável. As curvas soluções de (9) são dadas implicitamente por

$$a\ln y-\alpha y=-b\ln x+\beta x+\ln k \tag{10}$$

onde $k>0$ é uma constante de integração.

Na Equação (10) nem x, nem y podem ser explicitados em termos de funções elementares. As órbitas representadas pela Equação (10) podem ser traçadas através do método gráfico de Volterra.

Seja z uma variável auxiliar,

$$z=a\ln y-\alpha y$$
$$z=-b\ln cx+\beta x \qquad \text{onde} \quad c=\left(\frac{1}{k}\right)^{1/b}$$

Podemos agora esboçar z como função de y e de x, separadamente, como mostra a Figura 5.44.

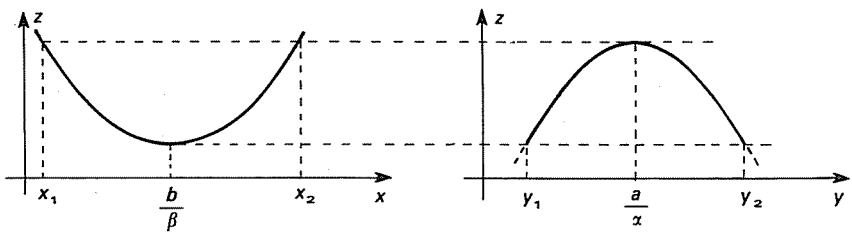


Figura 5.44

Temos que $\frac{dz}{dy} = \frac{a}{y} - \alpha$; $\frac{dz}{dy} = 0$ se, e somente se, $y = \frac{a}{\alpha}$. Ainda, $\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{a}{y^2} < 0$. Portanto, para $y = \frac{a}{\alpha}$, z atinge seu valor máximo $z_M = a\left(\ln \frac{a}{\alpha} - 1\right)$.

Analogamente, z atinge seu valor mínimo $z_m = b\left(1 - \ln \frac{cb}{\beta}\right)$ quando $x = \frac{b}{\beta}$. Desta forma, a população x deve variar entre um valor mínimo x_1 e um valor máximo x_2, soluções de

$$a\left(\ln \frac{a}{\alpha} - 1\right) = -b \ln cx + \beta x \quad \text{(ver Figura 5.45)}$$

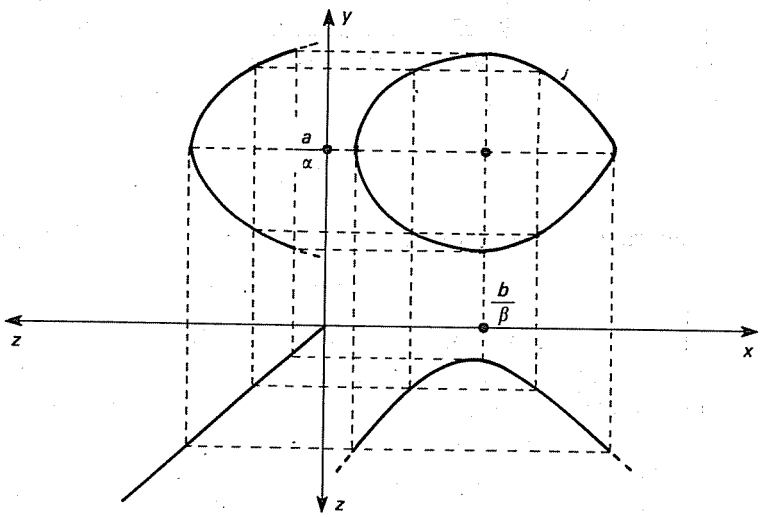


Figura 5.45 Construção da trajetória no plano de fase

O mesmo acontece com a variação da população y que está compreendida entre as duas soluções de

$$b\left(1 - \ln \frac{cb}{\beta}\right) = a \ln y - \alpha y$$

Os valores limitantes de ambas as populações são dependentes de seus estágios iniciais, pois dependem da constante arbitrária c.

Quando o desvio do ponto crítico $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ for pequeno, as órbitas são a família de elipses dada por (8). A solução analítica do Sistema (6) fornece estas elipses na forma paramétrica, onde o tempo t é o parâmetro.

Derivando, em relação a t, ambos os membros da primeira equação de (6) e tomando o valor de $\frac{dv}{dt}$ da segunda equação, obtemos

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{b\alpha}{\beta}\ \frac{dv}{dt} = -\frac{b\alpha}{\beta} \cdot \frac{a\beta}{\alpha} u$$

ou

$$u'' + bau = 0 \tag{11}$$

Com processo análogo, obtemos

$$v'' + abv = 0 \tag{11'}$$

As soluções de (11) e (11') são

$$\begin{cases} u(t) = k\,\frac{b}{\beta}\cos\left(\sqrt{ab}\,t + \theta\right) \\ v(t) = k\,\frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{b}{a}}\,\text{sen}\left(\sqrt{ab}\,t + \theta\right) \end{cases} \tag{12}$$

onde k e θ são constantes arbitrárias a serem determinadas com as condições iniciais.

Retornando à mudança de variáveis (4), temos

$$\begin{cases} x(t) = \frac{b}{\beta} + k\,\frac{b}{\beta}\cos\left(\sqrt{ab}\,t + \theta\right) \\ y(t) = \frac{a}{\alpha} + k\,\frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{b}{a}}\,\text{sen}\left(\sqrt{ab}\,t + \theta\right) \end{cases} \tag{13}$$

Portanto, para pequenas flutuações em torno do ponto crítico $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, o tamanho das populações de presas e predadores varia periodicamente com o período $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$, independentemente das condições iniciais (Lei do Isocronismo dos Pequenos Desvios).

Temos também que as populações de presas e de predadores estão defasadas em $\frac{1}{4}$ de ciclo e a amplitude das oscilações é $k\,\frac{b}{\beta}$ para as presas e $k\,\frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{\alpha}}$ para os predadores, dependendo das condições iniciais e também dos parâmetros do problema (ver Figura 5.46).

Do Sistema (1) temos que

$\frac{dx}{dt} > 0$ quando $y < \frac{a}{\alpha}$ (com um nível baixo de predadores o número de presas aumenta) e

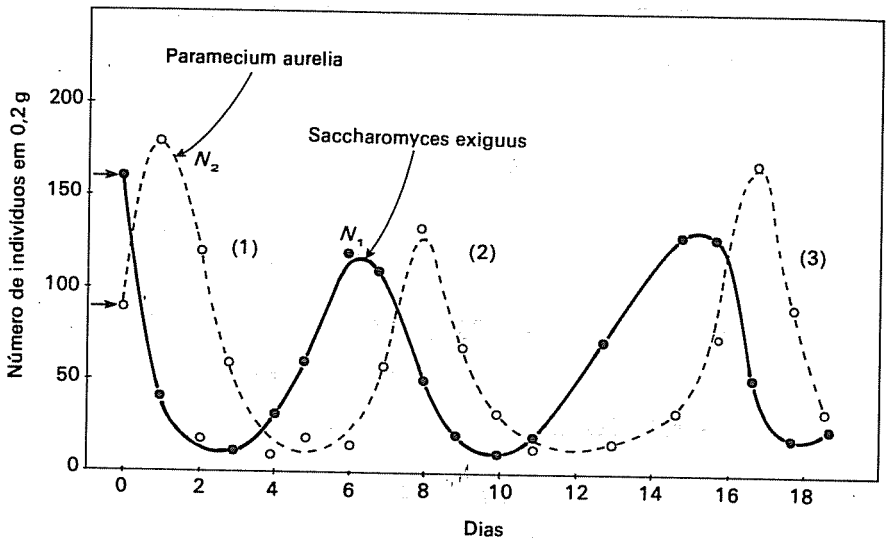


Figura 5.46 Flutuação no tamanho da população de *Paramecium aurelia* que se alimenta de *Saccharomyces exiguus*. A experiência foi desenvolvida por G. F. Gause. A figura foi reproduzida de D'Ancona (1954, p. 244).

$\frac{dx}{dt} < 0$ quando $y > \frac{a}{\alpha}$ (o número de presas diminui quando a quantidade de predadores é grande).

Também, $\frac{dy}{dt} > 0$, se $x > \frac{b}{\beta}$ (alimentação em grande quantidade favorece o crescimento dos predadores) e $\frac{dy}{dt} < 0$, se $x < \frac{b}{\beta}$ (com pouco alimento os predadores diminuem).

É interessante observar que os valores médios de x e y ao longo de um período são os mesmos para todas as soluções, embora soluções diferentes tenham períodos distintos. Para demonstrar este resultado, consideremos o Sistema (1) escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a - \alpha y \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -b + \beta x \end{cases} \tag{14}$$

Integrando ambas as equações de (14) entre 0 e T, onde T é o período da solução em questão, obtemos

$$\begin{cases} \ln x(T) - \ln x(0) = \int_0^T (a - \alpha y)\,dt \\ \ln y(T) - \ln y(0) = \int_0^T (-b + \beta x)\,dt \end{cases} \tag{15}$$

como $x(T)=x(0)$ e $y(T)=y(0)$, pois T é o período, obtemos

$$aT-\alpha\int_0^T y\,dt=0 \quad \text{e} \quad \beta\int_0^T x\,dt-bT=0$$

ou

$$\frac{1}{T}\int_0^T y\,dt=\frac{a}{\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{1}{T}\int_0^T x\,dt=\frac{b}{\beta} \tag{16}$$

sendo os primeiros membros das equações (16) os valores médios de y e de x ao longo de um período.

Como conseqüência deste resultado, temos que os valores médios das populações x e y independem de seus estados iniciais e são exatamente iguais a seus valores estacionários $\frac{a}{\alpha}$ e $\frac{b}{\beta}$.

Isto sugere que para diminuir a quantidade de presas em um ecossistema não adianta aumentarmos a quantidade de predadores, pois fal fato somente aumentaria a magnitude da oscilação do ciclo. Os valores médios continuariam os mesmos.

Um fenômeno interessante que ocorre num modelo presa-predador é que uma *retirada uniforme de elementos de ambas as populações beneficia as presas*. Por exemplo, o bicudo (praga do algodão) e a formiga (predadora) convivem num sistema presa-predador. Se usarmos um inseticida que mata indiscriminadamente tanto os insetos predadores (formigas) como as presas (bicudos), o valor médio dos bicudos deve aumentar, a não ser que o veneno seja suficientemente eficaz, a ponto de destruir toda a praga, e quem sabe se também algumas vidas humanas!

Este fenômeno foi observado pela primeira vez por Volterra, analisando os dados fornecidos por D'Ancona, relativos à quantidade de tubarões e outros peixes predadores, que havia aumentado consideravelmente durante a 1.ª Guerra Mundial (1914-1918) no mar Adriático. A diminuição da pesca, neste período, propiciou o aumento do valor médio dos predadores.

Presa-Predador com Perturbação das Populações Médias

Se considerarmos uma retirada uniforme de elementos das duas populações, que interagem segundo o modelo presa-predador, cada população será diminuída a uma taxa proporcional a esta população. De fato, denotando por ε a constante de proporcionalidade de retirada, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax-\alpha xy-\varepsilon x \\ \dfrac{dy}{dt}=-by+\beta xy-\varepsilon y \end{cases} \tag{17}$$

que pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a-\varepsilon) - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -(b+\varepsilon) + \beta xy \end{cases} \tag{18}$$

A diferença entre o Sistema (18) e o Sistema (1) consiste somente na posição do ponto de equilíbrio de cada um deles.

Os valores médios para as populações do Sistema (18) passam a ser

$$\bar{y} = \frac{a-\varepsilon}{\alpha} < \frac{a}{\alpha} \quad \text{e} \quad \bar{x} = \frac{b+\varepsilon}{\beta} > \frac{b}{\beta}$$

Assim, o valor médio para predadores diminui, enquanto aumenta o das presas.

Modelo 3 MODELO GERAL PRESA-PREDADOR (KOLMOGOROV)

A.N. Kolmogorov (1903-) generaliza o sistema de Lotka-Volterra, abolindo completamente as formas explícitas das características das espécies e das relações funcionais de suas interações e usando hipóteses qualitativas. O modelo geral é dado por

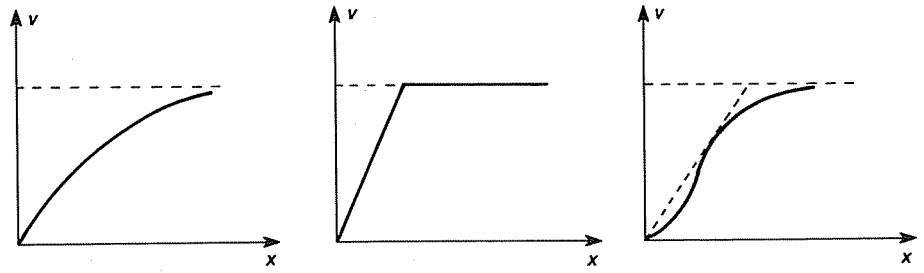
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x)x - V(x)y \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x)y \end{cases} \tag{1}$$

No modelo de Kolmogorov não são feitas, *a priori*, suposições acerca das formas particulares de A, V e B. Para estas funções são consideradas essencialmente suas características biológicas:

a. $A(x)$ é decrescente; $A(0) > 0 > A(\infty)$. Estas restrições podem ser interpretadas da seguinte forma: na ausência do predador ($y = 0$), o coeficiente de natalidade da presa diminui com o aumento da população (população inibida), indo de valores positivos para negativos; isto significa que a população das presas assume características de uma competição para recursos limitados. Assim, esta população é estabilizada num nível dado por $A(\bar{x}) = 0$ ($y = 0$).

b. $B(x)$ é crescente com x; $B(0) < 0 < B(\infty)$. A taxa de crescimento da população dos predadores vai de valores negativos (com a falta de alimentos) a valores positivos.

c. $V(x) > 0$ para $x > 0$ e $V(0) = 0$ (*trophic function* ou resposta funcional dos predadores à densidade da população de presas). Os tipos mais freqüentes para a função *trophic* em sistemas do tipo presa-predador clássico são dados na Figura 5.47.



(a) invertebrados e alguns peixes (b) moluscos (c) vertebrados

Figura 5.47 Tipos de função *trophic* em sistemas presa-predador

O Sistema (1) tem dois ou três pontos de equilíbrio no primeiro quadrante: $(0, 0)$, $(\bar{x}, 0)$ onde $\bar{x}$ satisfaz $A(\bar{x}) = 0$, e o ponto (x_e, y_e) determinado pelas equações

$$\begin{cases} A(x_e)x_e - V(x_e)y_e = 0 \\ B(x_e) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

para $x_e < \bar{x}$, isto é, $A(x_e) > 0$.

Linearizando (1) podemos estudar o comportamento das trajetórias na vizinhança de cada ponto crítico; para isto, basta considerar $u = x - x_e^*$, $v = y - y_e^*$, onde x_e^* e y_e^* são as coordenadas destes pontos.

No ponto $(0, 0)$ temos o sistema linearizado

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(0)u \\ \dfrac{dv}{dt} = B(0)v \end{cases} \tag{3}$$

As raízes do polinômio característico associado a (3) são $\lambda_1 = A(0)$ e $\lambda_2 = B(0)$, ambas reais e de sinais diferentes e, portanto, a origem será um *ponto de sela* (instável). Os eixos x e y são as separatrizes.

No ponto $(\bar{x}, 0)$, temos

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{dA}{dx}(\bar{x})\bar{x}u - V(\bar{x})v \\ \dfrac{dv}{dt} = B(\bar{x})v \end{cases} \tag{4}$$

As raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = \dfrac{dA}{dx}(\bar{x})\bar{x}$ e $\lambda_2 = B(\bar{x})$. $\lambda_1 < 0$, pois $\dfrac{dA}{dx}(\bar{x}) < 0$ e $\bar{x} > 0$; $\lambda_2 < 0$, se $\bar{x} < x_e$ (*nó estável*), enquanto que $\lambda_2 > 0$, se $\bar{x} > x_e$ (*ponto de sela*).

No ponto (x_e, y_e) temos

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \left[-\dfrac{dV(x_e)}{dx} y_e + \dfrac{dA}{dx}(x_e)x_e + A(x_e) \right] u \\ \dfrac{dv}{dt} = \left[\dfrac{dB}{dx}(x_e)y_e \right] u \end{cases} \tag{5}$$

Tomemos $\alpha = \dfrac{dV}{dx}(x_e)y_e - \dfrac{dA}{dx}(x_e) - A(x_e)$ e $\beta = V(x_e)\dfrac{dB}{dx}(x_e)y_e$.

O polinômio característico deste sistema é dado por

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

Como $\beta = V(x_e)\dfrac{dB}{dx}(x_e)y_e > 0$, então o ponto (x_e, y_e) será um *foco*, se $\alpha^2 < 4\beta$, ou um *nó*, se $\alpha^2 > 4\beta$. (Verifique!) A estabilidade é determinada pelo sinal de α, isto é, para $\alpha > 0$ será estável e para $\alpha < 0$, instável.

Um resumo da situação é dado pela Figura 5.48.

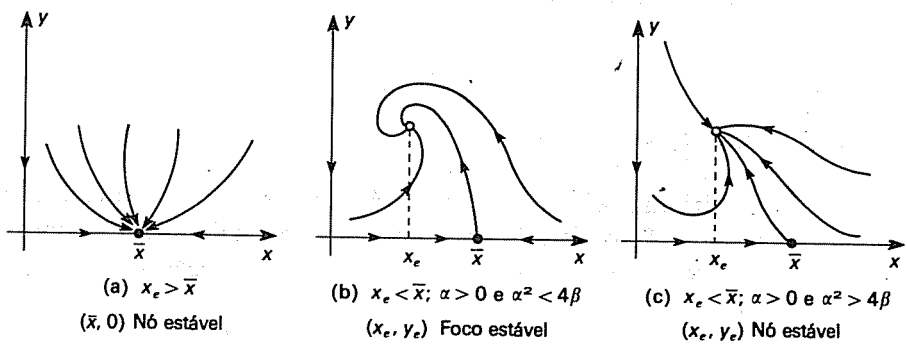


Figura 5.48

Ainda no caso em que $x_e < \bar{x}$, a separatriz que se origina em $(\bar{x}, 0)$ pode ficar girando em torno do ponto (x_e, y_e), dando origem a um ciclo limite (ver Figura 5.49).

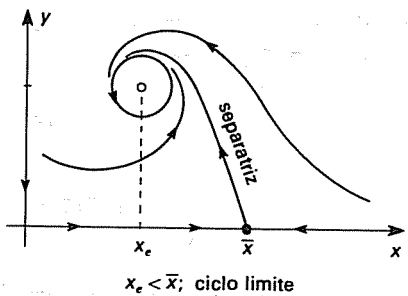


Figura 5.49

Não iremos analisar este caso, o leitor interessado poderá consultar o excelente livro de Svirezhev-Logofet*.

* SVIREZHEV, Y.M. & Logofet, D.O. *Stability of Biological Communities*. Moscou, Mir, 1983.

Utilizamos apenas a teoria elementar do plano de fase (pontos de equilíbrio e órbitas) para analisar estes resultados fundamentais que envolvem princípios biológicos. Entretanto, as diversas variáveis que interferem nos ecossistemas e em Biologia em geral, nem sempre podem ser facilmente equacionadas. Os modelos apresentados são apenas uma ligeira aproximação da realidade. Experimentos de laboratórios envolvendo presas e predadores geralmente terminam com a extinção das presas e posterior extinção dos predadores – o mesmo nunca ocorre com os modelos determinísticos que vimos. Alguns modelos mais modernos incorporam processos aleatórios, isto é, a probabilidade de uma pequena população de presas tornar-se extinta.

Sob o ponto de vista ecológico, a interação do tipo presa-predador não é considerada danosa, uma vez que as duas espécies podem conviver no mesmo *habitat* – o mesmo não ocorre com o modelo de competição com recursos limitados, onde uma das espécies será sempre eliminada.

A criação de modelos modernos pode ser facilitada quando já são conhecidos os modelos clássicos. J. Stein* propôs, para o estudo do crescimento de tumores cancerígenos, um modelo sugerido pela *analogia* da doença com a dinâmica do sistema presa-predador. O câncer origina-se quando certos tipos de células começam a se desenvolver, tomando o espaço das células normais. Considera-se também um terceiro protagonista, o *protetor*, cuja função é destruir as células cancerígenas, inibindo seu desenvolvimento e, portanto, evitando a destruição das células normais. Estudos recentes reconhecem a existência de uma substância, o interferon, que faz o papel do protetor.

As variáveis consideradas são:

$s = s(t)$: presa (*sheep*) – são as células normais,
$w = w(t)$: predador (*wolves*) – são as células cancerígenas,
$D = D(t)$: protetor (*dogs*) – células ou substâncias protetoras, responsáveis pelo sistema de imunização do corpo.

Assim, as equações de Stein que traduzem a dinâmica do câncer são

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = s(a_1 - b_1 s) - c_1 sw \\ \dfrac{dw}{dt} = w(a_2 - b_2 s) - c_2 wD \\ \dfrac{dD}{dt} = D(\alpha - \beta D) \end{cases} \tag{6}$$

onde as constantes são todas positivas.

---

* STEIN, J. Prey-Predator-Protector Model for Cancer. IEEE *Transac on Biomedical Engin.* 28v., 7, 1981.

Quando $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, o modelo é semelhante ao presa-operador. O Sistema (6) é quase linear, podendo ser resolvido numericamente, quando simulado em um computador. Do ponto de vista biológico, um modelo mais coerente seria o de competição, uma vez que as células não se comportam como presas ou predadores (ver Exercício a seguir).

EXERCÍCIOS

1. Considere o modelo presa-predador com fatores inibidores internos para a população das presas (por exemplo, se os recursos são limitados) e faça um estudo completo de tal modelo. Suponha, por exemplo, que na ausência dos predadores, as presas são regidas pela equação logística de Verhurst.

   No caso da inibição de ambas as espécies, como fica o modelo presa-predador?

2. Formule um sistema de equações diferenciais descrevendo todas as seguintes interações entre duas espécies no mesmo *habitat*:

   a. os recursos para ambas as populações são limitados;
   b. cada espécie compete com a outra pelos mesmos recursos;
   c. existe uma migração para uma das espécies numa taxa $\mathcal{C}$ por unidade de tempo.

3. Tilápias e lambaris são duas espécies de peixes que competem uma com a outra por alimento, mas que não se alimentam uma da outra. Num lago onde convivem estas duas espécies, o que acontecerá no futuro se

   a. $\dfrac{c}{\beta} > \dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d} > \dfrac{a}{\alpha}$

   ou

   b. $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ e $\dfrac{a}{\alpha} > \dfrac{c}{d}$

   Considere que $x = x(t)$ seja a população de tilápias e $y = y(t)$ de lambaris, regidas pelo sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\,(a - bx - \alpha y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y\,(c - dx - \beta x) \end{cases}$$

4. Se no mesmo lago houver traíra, peixe predador de tilápias e lambaris, como deve ser modelado tal ecossistema?
5. Estude os modelos dos Exercícios 3 e 4 considerando que existe uma pesca moderada uniforme.
6. Em um modelo presa-predador seja x_M o valor máximo atingido pelas presas em um ciclo. Qual deve ser o novo valor máximo das presas se:

   a. Retirarmos metade dos predadores quando estas atingem seu valor mínimo y_m?
   b. Acrescentarmos $1/2\, y_m$ à população dos predadores quando estes atingirem seu valor máximo y_M?

   Faça estas análises considerando os ciclos como elipses em torno do ponto de equilíbrio (x_e, y_e), onde $x_e = \dfrac{y_m + y_M}{2}$ e $y_e = \dfrac{x_m + x_M}{2}$.

7. Formule o problema de crescimento de tumores cancerígenos como se as células normais e doentes formassem um sistema de competição-proteção.

Modelo 4 EPIDEMIAS

Quando uma doença se espalha em uma comunidade "fechada" através do contato entre pessoas infectadas e sadias, temos uma epidemia. Como comunidade fechada consideraremos aquela em que a população eventualmente diminui, se morrer alguém devido à doença em questão, e só pode aumentar quando ali nasce alguma criança, isto é, não se admite emigração e nem imigração.

Para cada espécie de doença contagiosa podemos estimar sua velocidade de alastramento, desde que tenhamos relacionadas as variáveis supostas essenciais em uma epidemia:

$S = S(t)$: pessoas *sadias*, mas suscetíveis à epidemia, podendo ser infectadas quando em contato com pessoas que contraíram a doença;
$I = I(t)$: pessoas *infectadas* e que podem transmitir a doença;
$P = P(t)$: pessoas *portadoras* da doença, mas que não são transmissoras;
$R = R(t)$: pessoas *removidas* — aquelas que são isoladas, ou mortas, ou curadas (tendo desenvolvido imunidade total ou temporária);
$N =$ tamanho da população: $N = S + I + P + R$.

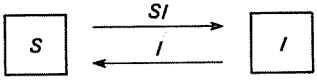
O estudo dos diferentes tipos de epidemia segue de perto o mesmo esquema dos modelos compartimentais do Capítulo 4. Vejamos alguns exemplos:

Caso 1 *Modelo SIS.* Consiste de uma doença na qual o indivíduo, ao recuperar-se, não obtém nenhuma imunidade e pode ter uma recaída. O período de incubação é relativamente pequeno ($P \cong 0$) e as pessoas doentes não são isoladas ($R = 0$). Por exemplo: gripe.

(*i*) Consideremos a população N constante, assumindo que não haja mortes e nem nascimentos na comunidade.

Seja I_0 a quantidade inicial de indivíduos infectados, então $S_0 = N - I_0$ será a quantidade inicial de pessoas sadias.

Se α for a constante de proporcionalidade de transmissão da doença e β a constante de proporcionalidade de recuperação, poderemos esquematizar o ciclo da doença no seguinte diagrama compartimental:



onde o aumento de I é proporcional à quantidade de "encontros" (SI) entre pessoas sadias e infectadas e a diminuição de I é proporcional à própria quantidade de I.

O diagrama favorece a elaboração matemática do modelo, indicando o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases} \tag{1}$$

onde

$$S(t) + I(t) = N \text{ (constante)} \tag{2}$$

O Sistema (1), apesar de ser não linear, pode ser facilmente resolvido se usarmos a Condição (2), substituindo o valor de S na segunda equação de (1).

Assim, obtemos uma única equação

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(N - I)\, I - \beta I$$

$$= \alpha I\left[\left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) - I\right]$$

com $I(0) = I_0 > 0$, que pode ser resolvida ao separarmos as variáveis (ver Capítulo 1), obtendo

$$I(t) = \frac{\alpha N - \beta}{\alpha + \left[(\alpha N - \beta)\dfrac{1}{I_0} - \alpha\right] e^{-(\alpha N - \beta)t}}$$

para $I \neq 0$ e $I \neq N - \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Como αN deve ser maior que β (justifique), temos que $I(t)$ tende a $\left(N - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ quando t cresce, e conseqüentemente $S(t) \to \dfrac{\beta}{\alpha}$. A enfermidade mantém-se em um nível constante na população

$$S = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad I = N - \frac{\beta}{\alpha}$$

O ponto $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}, N - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ é o ponto de equilíbrio do Sistema (1). Este ponto de equilíbrio pode ser obtido diretamente de (1) e (2), sem resolvermos o sistema de equações diferenciais.

Do Sistema (1) temos que

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \alpha I\left(S - \frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{3}$$

Logo, se $I = 0$ ou $S = \dfrac{\beta}{\alpha}$, então $\dfrac{dS}{dt} = 0$ e $\dfrac{dI}{dt} = 0$ e, portanto, não há epidemia.

Se $I = 0 \Rightarrow N = S$, todas as pessoas são sadias.

Se $S = \dfrac{\beta}{\alpha} \Rightarrow I = N - \dfrac{\beta}{\alpha}$ e neste caso $\dfrac{dN}{dt} = -\dfrac{dS}{dt} = 0$.

Se estamos com uma quantidade $S > \dfrac{\beta}{\alpha}$ e $I \neq 0$, o ponto (S, I) sobre a reta $S = N - I$ tende ao valor $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}, N - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, pois, da Equação

(3), $\frac{dI}{dt} > 0$ e $\frac{dS}{dt} < 0$. Se $S < \frac{\beta}{\alpha}$, como $\frac{dS}{dt} > 0$ e $\frac{dI}{dt} < 0$, então o ponto (S, I) ainda se aproxima de $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ sobre a reta $S = N - I$.

Neste caso, dizemos que o ponto $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ é assintoticamente estável (ver Figura 5.50).

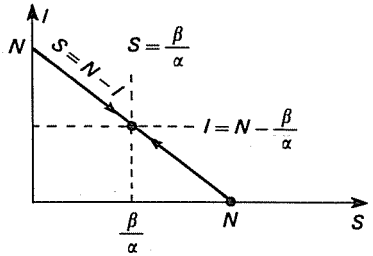


Figura 5.50 Modelo *SIS* com população N constante

O ponto $(S, I) = (N, 0)$ também é de equilíbrio, mas instável. Se $I \neq 0$ (por menor que seja), a doença se propaga.

Em resumo: o ponto de equilíbrio $\left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ é assintoticamente estável, pois as soluções não constantes se aproximam deste ponto. O ponto de equilíbrio $(N, 0)$ é instável porque as soluções não constantes se afastam deste ponto.

A maior velocidade da epidemia é obtida quando $\frac{dI}{dt}$ atinge seu ponto máximo, isto é, quando $\frac{d^2I}{dt^2} = 0$

$$\frac{d^2I}{dt^2} = \alpha\left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) - 2\alpha I = 0 \Rightarrow I^* = \frac{1}{2}\left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ou seja, quando I é o ponto médio entre os dois pontos de equilíbrio $\left(I = 0 \text{ e } I = N - \frac{\beta}{\alpha}\right)$, conforme está ilustrado na Figura 5.51.

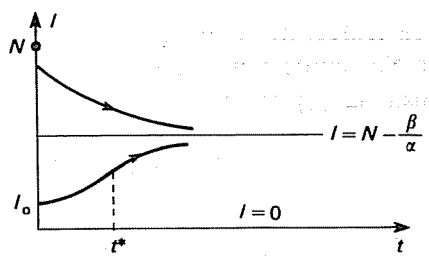


Figura 5.51 Propagação da doença
$I \equiv 0$ e $I \equiv N - \beta/\alpha$ são soluções constantes

A análise para a população de pessoas sadias é análoga

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha(N-S)S + \beta(N-S) = (N-S)\,(B-\alpha S), \qquad 0 < S \leqslant N$$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = (N-S)\,(-\alpha) + (\beta - \alpha S)\,(-1) = 2\alpha S - (\alpha N + \beta)$$

então

$$\frac{d^2S}{dt^2} = 0 \qquad \text{se} \qquad S^* = \frac{1}{2}\left(N + \frac{\beta}{2}\right)$$

Se $S < \frac{\beta}{\alpha}$, então $\frac{dS}{dt} > 0$ (S crescente) e $\frac{d^2S}{dt^2} < 0$ (concavidade para baixo), como indica a Figura 5.52.

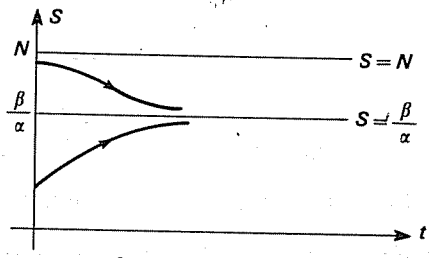


Figura 5.52 $S = N$ e $S = \frac{\beta}{\alpha}$ são as soluções constantes para S

É muitas vezes interessante saber qual o instante em que a epidemia tem velocidade máxima. Verifique se neste instante temos o ponto (I^*, S^*)!

(*ii*) Consideremos agora a população N variável. Vamos supor inicialmente que todos os bebês nasçam sadios, com taxa de natalidade γ igual à taxa de mortalidade da população. Obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \gamma S \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \gamma I \end{cases} \tag{4}$$

Ainda temos, neste caso, $N = S + I$ (N constante, apesar da população ter elementos renovados!)

O Sistema (4) se reduz à equação

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I\left(N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} - I\right) \tag{5}$$

ou então a

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha\,(N-S)\left(S - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right) \tag{6}$$

Observemos que $-\frac{dS}{dt}=\frac{dI}{dt}$.

Os pontos de equilíbrio de (4) são $I=0$ e $I=N-\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$ e da Equação (5)

$$S=N \quad \text{e} \quad S=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$$

Neste caso, os resultados obtidos são análogos aos do caso (*i*), com a epidemia se estabilizando em $(S, I)=\left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N-\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$. (Verifique!)

Se a taxa de natalidade γ for diferente da taxa de mortalidade m, de fato teremos N variando e o Sistema (4) vem modificado

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}=-\alpha SI+\beta I+\gamma N-mS \\ \frac{dI}{dt}=\alpha SI-\beta I-mI \end{cases} \tag{7}$$

Convém notar que $\frac{dN}{dt}=\frac{d(S+I)}{dt}=(\gamma-m)(S+I)=(\gamma-m)N$. Portanto, $N(t)=N_0e^{(\gamma-m)t}$ com $N_0=I_0+S_0$.

Considerando o plano de fase (plano-SI) obtemos as isóclinas, isto é, as curvas onde uma das derivadas se anula, tomando

$$\frac{dI}{dt}=0 \Rightarrow I=0 \quad \text{ou} \quad S=\frac{\beta+m}{\alpha}$$

$$\frac{dS}{dt}=0 \Rightarrow I=\frac{S(\gamma-m)}{\alpha S-(\beta+\gamma)}$$

Neste caso, não há ponto de equilíbrio pois as isóclinas dadas por $\frac{dI}{dt}=0$ não se encontram com a proveniente de $\frac{dS}{dt}=0$. Para qualquer valor inicial $I_0>0$ a trajetória atinge o valor máximo para S quando intercepta a isóclina $I=\frac{S(\gamma-m)}{\alpha S-(\beta+\gamma)}$, enquanto que $I\to+\infty$ quando $t\to\infty$ (ver Figura 5.53).

Caso 2 *Modelo SIR.* Consiste de uma epidemia em que o indivíduo deve ser isolado, podendo ser curado e tornar-se imune à doença, ou morrer. Consideramos aqui o período de incubação relativamente pequeno ($P\cong 0$), e a população constante (contando também com os mortos). Então

$$N=S(t)+I(t)+R(t) \quad \text{para todo} \quad t\geqslant 0 \tag{8}$$

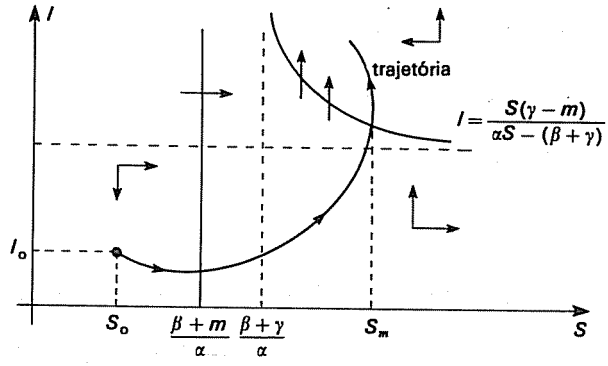


Figura 5.53 Isóclinas e uma trajetória modelo *SIS* (*N* variável)

O sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica desta epidemia é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = \text{taxa de infecção} \\ \beta = \text{taxa de remoção} \end{pmatrix} \tag{9}$$

com $I(0) = I_0$, $R(0) = 0$ e $S(0) = S_0 = N - I_0$.

É um sistema não linear mas, uma vez que as duas primeiras equações só dependem de S e I, podemos reduzi-las a uma única equação

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = -1 + \frac{\beta}{\alpha S} \tag{10}$$

cuja solução é dada por

$$I = -S + \frac{\beta}{\alpha} \ln S + K$$

Usando as condições iniciais, obtemos o valor da constante K

$$K = N - \frac{\beta}{\alpha} \ln S_0$$

Assim

$$I = N - S + \frac{\beta}{\alpha} \ln \left(\frac{S}{S_0} \right)$$

Da Equação (10), vem que

$$\frac{dI}{dS} > 0 \quad \text{se} \quad \frac{\beta}{\alpha S} > 1, \quad \text{ou seja, se} \quad S < \frac{\beta}{\alpha}$$

Portanto, I é uma função crescente se $S<\frac{\beta}{\alpha}$. Analogamente, I é decrescente, quando $S>\frac{\beta}{\alpha}$.

Observamos que $I \to -\infty$ quando $S \to 0$ e, como $I_0 > 0$, existe pelo menos um valor de S para o qual $I=0$. Seja $S=S_\infty$ este valor.

Ainda, das duas primeiras equações do Sistema (2) temos que: $I=0$ é ponto de equilíbrio

$$\frac{dS}{dt}<0 \qquad (S \text{ é sempre decrescente})$$

$$\frac{dI}{dt}>0 \quad \text{se} \quad S>\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{e,} \quad \frac{dI}{dt}<0 \quad \text{se} \quad S<\frac{\beta}{\alpha}$$

Quando t cresce, o ponto (S, I) se move ao longo da trajetória, com S sempre decrescendo, I cresce se $S_0>\frac{\beta}{\alpha}$ e decresce para zero se $S_0<\frac{\beta}{\alpha}$. Observamos que quanto maior for a taxa de remoção relativamente à taxa de infecção, mais rapidamente a epidemia cessará! (Ver Figura 5.54.)

Supondo que a doença não tenha cura e que uma pessoa contaminada morra, então é importante saber o valor de R em cada instante.

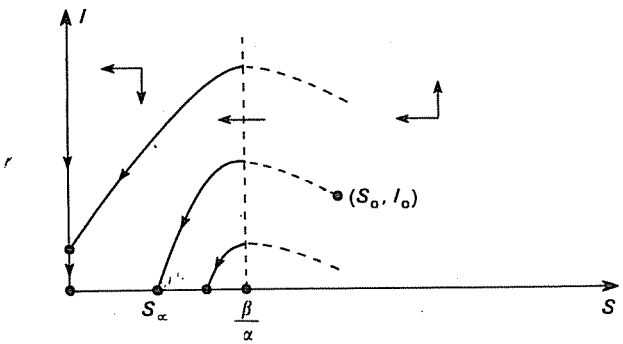


Figura 5.54 Trajetória no plano-SI (modelo SIR)

Do Sistema (9), tomando a primeira e terceira equações, podemos escrevê-las de maneira reduzida como uma só equação

$$\frac{dS}{dR}=\frac{dS/dt}{dR/dt}=-\frac{\alpha}{\beta}S$$

Resolvendo para S, obtemos

$$S=S_0\, e^{-\alpha/\beta\, R}$$

Agora, usando a Equação (8) na terceira equação do Sistema (9), vem

$$\frac{dR}{dt}=\beta(N-R-S)$$

ou

$$\frac{dR}{dt} = \beta (N - R - S_0 e^{-\alpha/\beta R}) \tag{11}$$

Esta equação não pode ser resolvida explicitamente, mas supondo que R seja suficientemente pequeno, podemos escrever

$$e^{-\alpha/\beta R} \cong 1 - \frac{\alpha}{\beta} R + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} R\right)^2}{2} + \ldots$$

de modo que a Equação (11) é aproximadamente igual a

$$\frac{dR}{dt} = \beta \left[N - R - S_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} R + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} R^2 \right) \right] =$$
$$= \beta \left[N - S_0 + \left(\frac{\alpha}{\beta} S_0 - 1 \right) R - \frac{\alpha^2 S_0}{2\beta^2} R^2 \right]$$

Podemos resolver tal equação separando as variáveis e fazendo a integração por frações parciais.

Se considerarmos

$$a = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} S_0 - 1 \right)^2 + 2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} S_0 (N - S_0) \right]^{1/2}$$

e

$$\theta = \text{tgh}^{-1} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} S_0 - 1 \right)}{a}$$

Então

$$R(t) = \frac{\beta^2}{\alpha^2 S_0} \left[\frac{\alpha}{\beta} S_0 - 1 + a \, \text{tgh} \left(\frac{a\beta t}{2} - \theta \right) \right]$$

A variação das pessoas isoladas $\frac{dR}{dt}$ é dada por

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\beta^3 a^2}{2\alpha^2 S_0} \text{sech}^2 \left(\frac{a\beta t}{2} - \theta \right)$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \quad \text{se} \quad \frac{a\beta t}{2} - \theta = 0 \Rightarrow t = \frac{2\theta}{a\beta} \quad \text{(ponto de máximo)*}$$

(ver Figura 5.55).

---

* HOPPENSTEADT, F.C. *Mathematical Methods of Population Biology*. New York, Cambridge University Press, 1982.

WALTMAN, P. Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics. In: *Springer Lecture Notes in Biomathematics*. New York, Springer, 1974, n. 1.

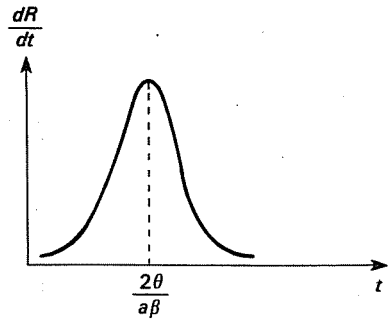


Figura 5.55 Curva epidêmica

EXERCÍCIOS

1. Numa epidemia em que a equação da curva epidêmica é dada por $\frac{dR}{dt} = 720\ \text{sech}^2(0{,}3t - 4{,}5)$, faça uma estimativa dos parâmetros envolvidos e calcule o número de mortos 20 semanas após ter-se iniciado o surto epidêmico. Calcule o valor máximo de $\frac{dR}{dt}$.

2. Mostra-se que se $\left(S_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ é pequeno comparado com $\frac{\beta}{\alpha}$, então o número de indivíduos que contraem a doença é aproximadamente $2\left(S_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Supondo $N \cong S_0$ e tomando $h = \left(S_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$, então $S_0 - S_\infty \cong 2h$ de onde $S_\infty = S_0 - 2h$.

   Neste caso, o número máximo de infecção se dá quando $S \cong N - h$

$$\frac{dR}{dt} \cong \beta R\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}S_0 - 1\right) - \frac{S_0\alpha^2}{2\beta^2}R\right]$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \Leftrightarrow R = 0 \quad \text{ou} \quad R = \frac{2\beta\alpha S_0 - 2\beta^2}{\alpha^2 S_0}$$

   Neste caso, $R_\infty = \frac{4\beta(\alpha S_0 - \beta)}{\alpha^2 S_0}$ (quantidade final de mortos).

   Calcule $R(t)$.

3. Verifique se os sistemas usados para modelar os diferentes tipos de epidemia poderiam ser analisados com o auxílio da Secção 5.6. (Justifique!)

Modelo 5 BIODIGESTORES

Um *biodigestor* consiste basicamente de um tanque de fermentação anaeróbica (sem a presença de ar) de matérias orgânicas frescas, substrato ou biomassa, produzindo um gás combustível composto essencialmente de metano e dióxido de carbono, como mostra a Figura 5.56. Tal mistura recebe o nome de *biogás* e sua utilização é bastante diversificada. Outro produto obtido da biodigestão, o *fertilizante*, é o resíduo da matéria orgânica depois de fermentada.

A composição das bactérias que atuam na fermentação do substrato, assim como o processo de formação do biogás, são extremamente com-

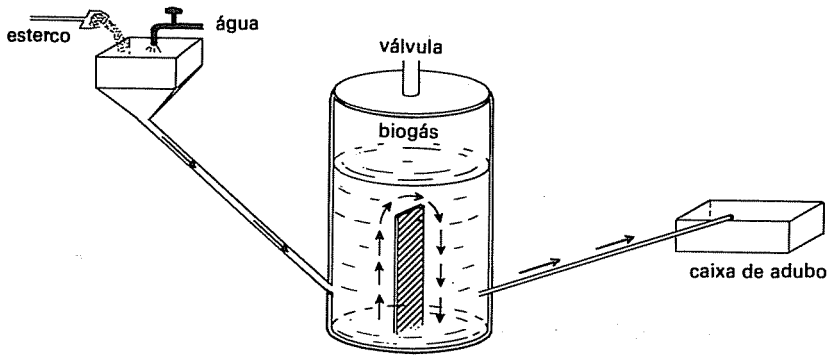


Figura 5.56 Biodigestor indiano com renovação de biomassa

plexos. Propomos, neste contexto, modelos que relacionem apenas duas das componentes básicas de um biodigestor:

$x = x(t)$: quantidade de bactérias que produzem o biogás, e
$y = y(t)$: quantidade de biogás produzido que continua no interior do biodigestor.

Estamos supondo que x e y são variáveis dependentes do tempo t, que x é considerado uma população de bactérias generalizadas, e não apenas de uma qualidade específica – sua variação depende de sua própria quantidade e seu crescimento pode ser inibido pelas condições ambientais: espaço, alimentação, acidez, temperatura etc., ou pela presença do próprio biogás produzido.

A variação da quantidade de biogás no interior do biodigestor é proporcional à quantidade de bactérias presentes e sua diminuição pode ser traduzida pelo tipo de retirada efetuada.

Estas hipóteses estão relacionadas no seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x) - pxy \\ \dfrac{dy}{dt} = kx - h(y, t) \end{cases} \tag{1}$$

onde as constantes p e k são positivas; $F(x)$ fornece a variação das bactérias, independentemente da presença de biogás; o termo pxy é responsável pelo fator de inibição, e a função $h(y, t)$ é responsável pelo tipo de retirada de biogás que é efetuada.

Vejamos alguns casos particulares deste modelo:

Caso 1. Todo gás produzido é mantido no biodigestor ($h(y, t) = 0$).

(*i*) $F(x) = \alpha x$ (válido para o início da biodigestão, onde o crescimento das bactérias ainda não está inibido)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - pxy \\ \dfrac{dy}{dt} = kx \end{cases} \tag{2}$$

Neste caso, $x = 0$ é uma reta de equilíbrio (se não existirem bactérias não haverá fermentação).

Vamos analisar as curvas-soluções no plano de fase

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha - py}{k} \quad (x \neq 0) \tag{3}$$

Integrando (3), que é uma equação separável, obtemos

$$x = \frac{\alpha}{k} y - \frac{p}{2k} y^2 + C$$

onde C é a constante de integração. Se supomos $x(0) = x_0 > 0$ e $y(0) = 0$, obtemos

$$x = \frac{\alpha}{k} y - \frac{p}{2k} y^2 + x_0 \tag{4}$$

(ver Figura 5.57).

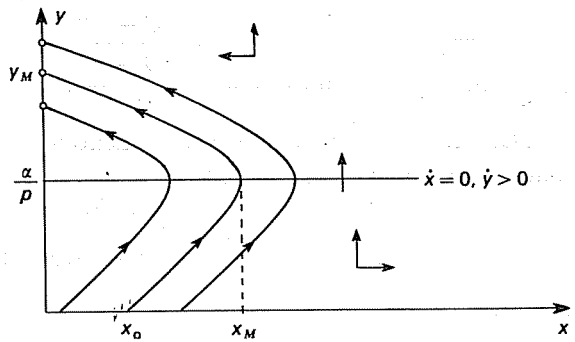


Figura 5.57 Relação entre quantidade de bactérias e de biogás

x como função de y atinge seu valor máximo $x_M(x_0) = x_0 + \dfrac{\alpha^2}{2kp}$ quando $y = \dfrac{\alpha}{p}$, enquanto que y é limitado por

$$y_M(x_0) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2kx_0p}}{p} > \frac{\alpha}{p}$$

Os dois valores x_M e y_M dependem da quantidade inicial de bactérias, x_0. Por outro lado, substituindo a expressão de x dada em (4) na segunda equação do Sistema (2), obtemos a equação separável

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \frac{p}{2} y^2 + x_0 k \tag{5}$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$y(t) = \frac{y_M y_* (1 - e^{-tD})}{y_* - y_M e^{-tD}}, \quad \text{onde} \quad D = \sqrt{\alpha^2 + 2pkx_0} \tag{6}$$

e

$$y_M = \frac{\alpha + D}{p} > 0 \qquad \text{e} \qquad y_* = \frac{\alpha - D}{p} < 0$$

Assim, quando $t \to +\infty$, $y(t)$ tende a y_M, ou seja, a produção do gás é limitada (ver Figura 5.58).

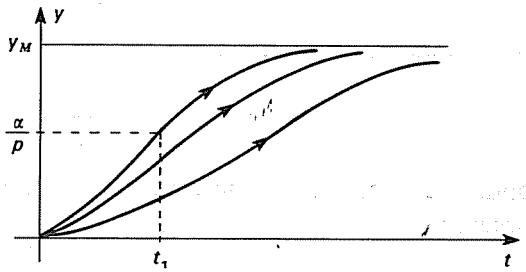


Figura 5.58 Produção de biogás

Vimos que a quantidade máxima de bactérias é atingida quando $y = \frac{x}{p}$, ou seja, quando $t_1 = \frac{\ln\left(\frac{D+\alpha}{D-\alpha}\right)}{D}$.

Derivando a Equação (6) em relação a t e substituindo na segunda equação do Sistema (2), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = 4\frac{kx_0 D^2 e^{-tD}}{[(\alpha - D) + (\alpha + D)e^{-tD}]^2} = kx$$

Portanto

$$x(t) = \frac{4x_0 D^2 e^{-tD}}{[(\alpha - D) + (\alpha + D)e^{-tD}]^2} \tag{7}$$

o que nos mostra que quando $t \to \infty$, as bactérias tendem à extinção (ver Figura 5.59).

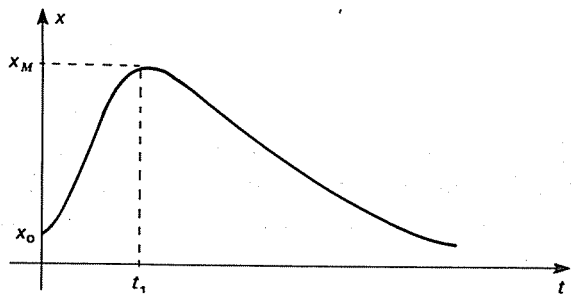


Figura 5.59 Quantidade de bactérias em um biodigestor

(*ii*) $F(x) = \alpha x - rx^2$ (o crescimento das bactérias é inibido).

O Sistema (1), com $h(y, t) = 0$, é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\alpha - rx - py), & x > 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = kx \end{cases} \tag{8}$$

α, r, p e k constantes positivas.

Ainda aqui os pontos de equilíbrio *não são isolados* e constituem todo o semi-eixo positivo dos $y (x = 0,\ y \geqslant 0)$.

Vamos supor que

$$\begin{cases} x(0) = x_0 > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(não há biogás no início da fermentação)} \tag{9}$$

A equação no plano de fase é dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha}{k} - \frac{r}{k}x - \frac{p}{k}y \tag{10}$$

(equação linear não homogênea), cujas curvas-soluções são

$$x = Ae^{-\frac{r}{k}y} - \frac{p}{r}y + \frac{ar + pk}{r^2}$$

onde A é determinado pelas condições iniciais (9), $A = x_0 - \dfrac{\alpha r + pk}{r^2}$.

Como $\dfrac{dx}{dy} = -A\dfrac{r}{k}e^{-\frac{r}{k}y} - \dfrac{p}{r}$, temos que $\dfrac{dx}{dy} = 0$ quando

$$y = y^* = \frac{k}{r}\ln\left(\frac{-Ar^2}{pk}\right)$$

Tal valor tem sentido se $x_0 < \dfrac{\alpha}{r}$. Se $x_0 > \dfrac{\alpha}{r}$, então $x(y)$ é sempre decrescente. Ainda,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{Ar^2}{k^2}e^{-\frac{r}{k}y};\ \text{logo}\ \left.\frac{d^2x}{dy^2}\right|_{y=y^*} = -\frac{p}{k} < 0$$

e, portanto, y^* é um ponto de máximo para $x(y)$.

Por outro lado, de (10) concluímos que a reta $x = \dfrac{\alpha - py}{r}$ é uma isóclina no plano de fase, como indica a Figura 5.60.

$$x^* = x\,(y^*) = \frac{\alpha}{r} - \frac{pk}{r^2}\ln\left(\frac{-Ar^2}{pk}\right) \tag{11}$$

é a quantidade máxima de bactérias.

Consideremos agora as quantidades de bactérias e biogás em função de t

$$\frac{dy}{dt} = kx > 0$$

então y é sempre crescente com t.

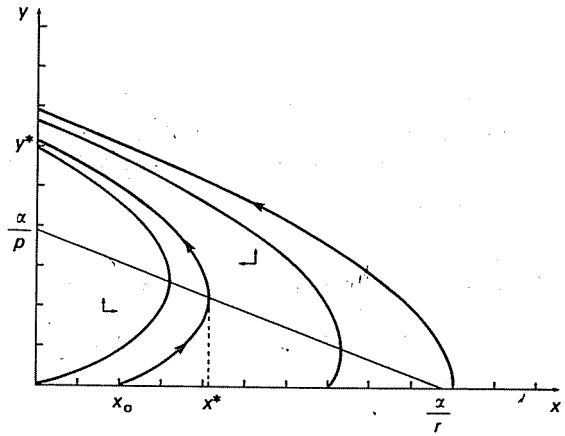


Figura 5.60 Trajetórias de (8) — bactéria × biogás

y é limitado, uma vez que a reta $x = \frac{P}{r}y + \frac{\alpha r + pk}{r^2}$ é uma assíntota da curva $x = x(y)$.

Por outro lado, $\frac{dx}{dt} > 0$ se $x < x^*$ e $\frac{dx}{dt} < 0$ se $x > x^*$ $\left(\text{se } x_0 < \frac{\alpha}{r}\right)$.

Se $x_0 > \frac{\alpha}{r}$, então $\frac{dx}{dt} < 0$.

Caso 2. Biodigestor com retirada de biogás. A colheita do gás produzido por um biodigestor pode ser efetuada de vários modos, o que é traduzido pela função $h(y, t)$ do Sistema (1). Vejamos o caso em que a retirada é proporcional à quantidade existente; então $h(y, t) = \beta y$, onde β é a taxa de colheita. O sistema de equações para $F(x) = \alpha x$ é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - pxy \qquad (x > 0) \\ \dfrac{dy}{dt} = kx - \beta y \end{cases} \tag{12}$$

α, p, k, β constantes positivas.

O Sistema (12) é quase linear com os pontos de equilíbrio dados pelas soluções do sistema algébrico

$$\begin{cases} x(\alpha - py) = 0 \\ kx - \beta y = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Então, obtemos $(0, 0)$ e $\left(\frac{\alpha\beta}{kp}, \frac{\alpha}{p}\right)$.

O sistema linearizado de (12) é

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x \\ \dfrac{dy}{dt} = kx - \beta y \end{cases} \tag{14}$$

As raízes do polinômio característico associado são $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = -\beta$ e, portanto, o ponto $(0, 0)$ é um *ponto de sela*, sendo a trajetória $x = 0$ $(y > 0)$ a que converge para $(0, 0)$. No nosso problema esta trajetória não está definida, uma vez que $x > 0$ para todo t. Vamos analisar a natureza do ponto $\left(\frac{\alpha\beta}{kp}, \frac{\alpha}{p}\right)$.

Tomando $x = u + \frac{\alpha\beta}{kp}$ e $y = v + \frac{\alpha}{p}$ no Sistema (12), temos

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\alpha\beta}{k} v - puv \\ \dfrac{dv}{dt} = ku - \beta v \end{cases} \tag{15}$$

As raízes da equação característica do sistema linearizado correspondente são $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} < 0$.

Assim, o ponto $\left(\frac{\alpha\beta}{kp}, \frac{\alpha}{p}\right)$ será *assintoticamente estável*, constituirá um *nódulo* se $\beta \geqslant 4\alpha$, ou uma *espiral* se $\beta < 4\alpha$ (ver Figura 5.61).

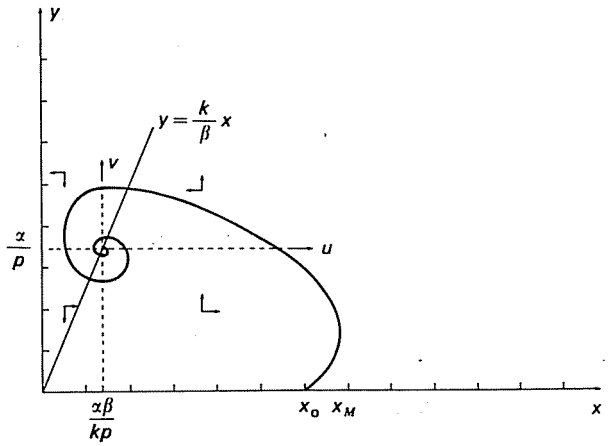


Figura 5.61 Curva-solução do sistema linearizado de (15)

Observemos que $\frac{dx}{dt}=0$ se $y=\frac{\alpha}{p}$. Agora

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha\frac{dx}{dt}-p\frac{dx}{dt}y-px\frac{dy}{dt}$$

Portanto

$$\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{y=\frac{\alpha}{p}}=-px\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=\frac{\alpha}{p}}=-px\left(kx-\frac{\beta\alpha}{p}\right)$$

Logo

$$\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{y=\frac{\alpha}{p}}>0$$

se $x<\frac{\beta\alpha}{kp}$ ocorrendo um ponto de mínimo para $x=x(t)$.

Se $x>\frac{\beta\alpha}{kp}$ então $\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{y=\frac{\alpha}{p}}<0$ ocorrendo um ponto de máximo (ver Figura 5.62).

Quando

$$t\to\infty,\ x(t)\to\frac{\beta\alpha}{kp}\qquad\text{e}\qquad y(t)\to\frac{\alpha}{p}$$

Uma outra maneira de encarar o problema de retirada de biogás do biodigestor é supor que a diminuição causada pela colheita tenha influência apenas na dinâmica populacional das bactérias e, portanto, a única modificação a ser efetuada é na primeira equação do sistema, mantendo a variação do biogás simplesmente proporcional à quantidade de bactérias.

Por exemplo, se imaginamos um biodigestor que em cada instante contenha apenas a metade do gás até então produzido, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x)-px\left(\dfrac{1}{2}y\right)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=kx\end{cases}\tag{16}$$

equivalente aos Sistemas (2) e (8) anteriores, tomando a metade do valor de p.

É interessante ressaltar que a quantidade de biogás produzido neste processo de retirada depois de 30 dias é a mesma que seria obtida se fizéssemos apenas uma retirada do total do gás produzido quando $t=15$. (Verifique!) Considere $F(x)=\alpha x-rx^2$ com $\alpha=2$, $r=10^{-2}$, $p=10^{-3}$, $k=1$, $x_0=20$ e $y_0=0$.

PROJETO 4

1. Interprete o sistema biodigestor dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - rx^2 - pxy \\ \dfrac{dy}{dt} = kx - \beta \end{cases}$$

2. Faça um estudo deste sistema.
3. Use as condições $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $r = 0{,}01$, $p = 0{,}001$, $k = 1$ e $\beta = 1/2$. Transforme o sistema contínuo num sistema discreto (equações de diferenças) e faça o gráfico da solução.

Modelo 6 LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

A noção de peso como propriedade inerente de um corpo, considerada por Aristóteles, perdurou até a época de Newton, que buscou uma explicação mais razoável. Nesta época acreditava-se ainda que tudo que ocorria no espaço conhecido pelo homem (perto da superfície terrestre) era essencialmente diferente do que poderia ocorrer "fora da Terra". As próprias leis de Kepler sobre o movimento planetário não alteravam em nada as idéias relativas aos fenômenos terrestres. Estas leis descreviam e analisavam o movimento observado nos planetas, mas não estabeleciam nenhuma teoria explicativa:

1. *todos os planetas movem-se segundo órbitas elípticas, nas quais um dos focos é ocupado pelo Sol*;
2. *uma reta imaginária que vai de qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais*;
3. *o quadrado do período de revolução de qualquer planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semi-eixo da elipse.*

Estas três leis experimentais foram confirmadas quando Newton aplicou ao movimento planetário suas leis de movimento e gravitação. O fato de os planetas terem seus movimentos bem determinados ficou explicado pela existência de *forças* agindo entre eles e o Sol. Até então, o conceito de força não tinha sido claramente definido.

Newton mostrou, também, que as forças não atuavam somente em corpos de dimensões do Sol ou dos planetas, mas entre quaisquer corpos. Desta forma, reuniu em uma só teoria as ciências da Mecânica Celeste e Terrestre, antes dissociadas. Ocorreu-lhe que a força responsável pela queda de um corpo podia ser essencialmente a mesma que atraía a Lua para a Terra.

Através de medidas da aceleração centrípeta da Lua, concluiu que *a aceleração de um corpo que cai é inversamente proporcional ao quadrado de sua "distância à Terra"* (admitindo que a massa do planeta poderia ser considerada como se estivesse concentrada em seu centro), uma concepção verdadeiramente revolucionária.

Lei da Gravitação Universal Duas partículas de massas m_1 e m_2, separadas por uma distância r, se atraem mutuamente, e as forças de atração têm intensidade

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{1}$$

onde G é a constante de gravidade universal ($G = 6{,}673 \cdot 10^{-8}$ unidades *CGS*). As forças atuam na direção da reta que une as partículas, de acordo com a Lei da Ação e Reação — "*Quando duas partículas exercem forças entre si, essas forças são iguais em intensidade, têm a direção da reta que as une e são de sentidos opostos*".

Observação:

No estudo da força gravitacional da Terra sobre corpos fora dela, supomos sempre que toda massa esteja concentrada no seu centro e tratamos o problema como atração entre partículas. Isto, no entanto, só é válido para corpos esféricos com sua massa distribuída de maneira homogênea. A Terra está longe de ser uma esfera e mais longe ainda de ter uma distribuição homogênea de massa. Essa diferença de massa entre a parte continental e oceânica é causa de sensíveis alterações nas órbitas dos engenhos espaciais, e a partir da análise destas órbitas foram descobertas algumas particularidades sobre a forma do nosso planeta.

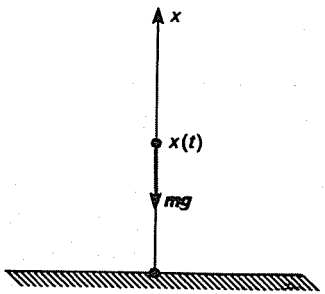
Consideremos uma partícula de massa m sujeita apenas à força gravitacional da Terra, como ilustra a Figura 5.62. Usando a Segunda Lei de Newton, $m\ddot{x} = F$, podemos escrever

$$m\ddot{x} = -\frac{GmM}{x^2} \tag{2}$$

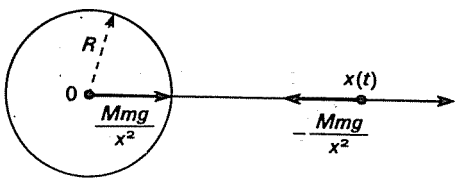
onde M é a massa da Terra, e x é a distância do corpo de massa m ao centro da Terra.

Quando $x = R$ (raio da Terra), $\ddot{x} = -g$ e portanto

$$\frac{GM}{R^2} = g \tag{3}$$



(a) Posição de uma partícula em relação a um eixo-x com origem no solo



(b) Força gravitacional da Terra

Figura 5.62

De uma maneira geral, sempre que o corpo estiver próximo da superfície terrestre supomos $\frac{GM}{x^2} = g$.

Substituindo os valores de (3) em (2), obtemos a equação diferencial

$$\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}, \text{ com } \begin{array}{l} \dot{x}(R) = v_0 \text{ (movimento ascendente)} \\ \text{ou} \\ \dot{x}(R) = -v_0 \text{ (movimento de queda)} \end{array} \tag{4}$$

Para resolver (4), tomamos $v(t) = \dot{x}(t)$, que implica

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Substituímos em (4) e obtemos

$v\frac{dv}{dx} = -gR^2\frac{1}{x^2}$ (equação de primeira ordem separável), cuja solução é

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{x} + C$$

com $x = R$, $C = \frac{v_0^2}{2} - gR$. Assim

$$v(t) = +\sqrt{2gR\left(\frac{R}{x} - 1\right) + v_0^2} \quad \text{(movimento ascendente)}$$

e

$$v(t) = -\sqrt{2gR\left(\frac{R}{x} - 1\right) + v_0^2} \quad \text{(movimento de queda)}$$

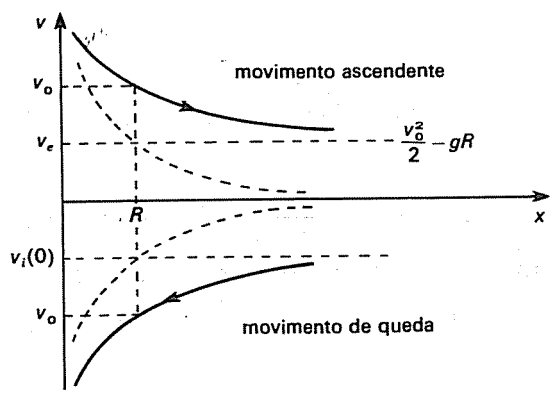


Figura 5.63

Concluímos que (ver Figura 5.63):

1. A velocidade em valor absoluto diminui quando a altura x (distância da Terra) aumenta.

2. Se $v_0^2 \geqslant 2\,Rg$, a velocidade nunca se anula e, portanto, o corpo continua em movimento. Se estiver subindo, continua para sempre e se estiver caindo, obviamente só vai parar porque a superfície terrestre servirá de anteparo. Sem considerar o atrito do ar, a menor velocidade inicial que possibilita um corpo a deixar a Terra é chamada *velocidade de escape* e é dada por $v_e = \sqrt{2\,Rg} \cong 40.240$ km/h.

3. Se um corpo é abandonado a uma distância h da Terra, portanto com $v(h) = 0$, sua velocidade de impacto v_i é determinada se tomarmos $x = R$. Então

$$v(h) = 0 = -\sqrt{v_i^2 + 2gR\left(\frac{R}{h} - 1\right)}$$

ou

$$v_i = -\sqrt{2gR - \frac{2gR^2}{h}}$$

A velocidade de impacto é proporcional à altura h do corpo que é abandonado e seu maior valor absoluto se aproxima da velocidade de escape. Por exemplo, se $h = 2R$, $v_i = \sqrt{gR}$.

Considerando agora a *resistência do ar* como uma força de atrito, sempre contrária ao movimento, usando a Segunda Lei de Newton, temos

$$m\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}m - k\dot{x} \quad (k > 0) \quad \text{para pequenas velocidades} \tag{5}$$

Para grandes velocidades a força de atrito do ar depende quadraticamente da velocidade. Devemos aqui separar em dois casos:

$$m\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}m + k\dot{x}^2 \quad \text{(movimento descendente)} \tag{6}$$

e

$$m\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}m - k\dot{x}^2 \quad \text{(movimento ascendente)} \tag{7}$$

A diferença entre $\dfrac{GM}{x^2}$ e g é pequena quando x está suficientemente próximo de R — será menor que 5% do valor de g quando x for menor que 165,43 km. De fato, se $g - \dfrac{GM}{x^2} = 0{,}05\ \text{g}$, então $0{,}95\ \text{g} = \dfrac{GM}{x^2}$ ou

$$x^2 = \frac{GM}{0{,}95\,g} = \frac{gR^2}{0{,}95\,g} = 1{,}0526316\,R^2 \Rightarrow x = 1{,}0259784\,R$$

Portanto

$$x - R = 0{,}0259784\,R = 165{,}43 \text{ km}$$

Assim, sem cometer um erro muito grande, podemos tomar

$$\frac{GM}{x^2} = g$$

Com esta modificação, as Equações (5), (6) e (7) são dadas por

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = -mg \quad \text{(pequenas velocidades)} \tag{5'}$$

ou

$$m\ddot{x} - k\dot{x}^2 = -mg \quad \begin{matrix}\text{(movimento descendente para} \\ \text{grandes velocidades)}\end{matrix} \tag{6'}$$

$$m\ddot{x} + k\dot{x}^2 = -mg \quad \begin{matrix}\text{(movimento ascendente para} \\ \text{grandes velocidades)}\end{matrix} \tag{7'}$$

Para solucionar (5'), consideramos a mudança de variável $v = \dot{x}$ e obtemos

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -g \quad \text{(equação linear de primeira ordem)}$$

cuja solução é

$$v(t) = e^{-k/m\ t}\left[\int -g\, e^{k/m\ t}\, dt + c\right] = -\frac{m}{k} g + c\, e^{-k/m\ t}$$

Se $v(0) = v_0$, então

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{m}{k} g\right) e^{-k/m\ t} - \frac{m}{k} g$$

A *velocidade limite* v_∞ é dada por $v_\infty = \lim_{t \to \infty} |\, v(t)\,| = \frac{m}{k} g$.

Para se obter $x(t)$ basta integrar a expressão da velocidade

$$x(t) = -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{m}{k} g\right) e^{-k/m\ t} - \frac{m}{k} g\, t + c$$

considerando $x(0) = x_0$ e $v_\infty = \frac{m}{k} g$, temos

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{k}(v_0 + v_\infty)(1 - e^{-k/m\ t}) - v_\infty\, t \quad \text{(Verifique!)}$$

Para resolver (6') consideraremos ainda $v = \frac{dx}{dt}$. Desta forma, a equação (6') é transformada em

$$m\frac{dv}{dt} - kv^2 = -mg$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{k}\right) \quad \text{(equação com variáveis separadas)}$$

cuja integral é

$$\int \frac{dv}{\left(v-\sqrt{\frac{gm}{k}}\right)\left(v+\sqrt{\frac{gm}{k}}\right)} = \frac{k}{m}t + c$$

usando frações parciais na integração, obtemos

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{gm}{k}}} \ln \left| \frac{v-\sqrt{\frac{gm}{k}}}{v+\sqrt{\frac{gm}{k}}} \right| = \frac{k}{m}t + c \Rightarrow \frac{v-\sqrt{v_\infty}}{v+\sqrt{v_\infty}} = K e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} \quad (-v_0 \neq v_\infty)$$

Para $v(0) = v_0$, podemos calcular o valor de K e obter explicitamente v em função de t. (Verifique!)

A Lei de Gravitação é aplicada em diversas situações, como queda de corpos, sustentação no espaço, lançamento de foguetes etc. Damos a seguir alguns exemplos ilustrativos.

EXEMPLO 1 Movimento de um foguete

Um foguete, quando lançado verticalmente para o espaço, pode retornar, entrar em órbita ou escapar da força gravitacional da Terra. Cada uma destas hipóteses é satisfeita, dependendo da sua velocidade e altura no instante em que termina o combustível.

Na equação do movimento de um foguete devemos levar em consideração que a massa $m = m(t)$ é uma função do tempo, pois seu combustível diminui a cada instante.

Consideremos ainda as variáveis:

$x = x(t)$: sua altura (medida do centro da Terra);
$v = v(t)$: sua velocidade em cada instante;
$V = -u(t)$: a velocidade de descarga (dos gases em ignição).

Se $-\Delta m$ é a perda de massa do foguete num intervalo de tempo Δt

$$\Delta p = (v + \Delta v)(m + \Delta m) - mv - \Delta m (v - u)$$

dá a variação do momento no intervalo de tempo Δt. Portanto

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} + u\frac{\Delta m}{\Delta t} + \Delta v \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

é sua variação média e

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt}$$

é a variação instantânea do momento p.

Usando a Segunda Lei de Newton, escrevemos

$$m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = -mg$$

Levando em consideração a força do atrito do ar, teremos

$$m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = -mg - kv \qquad \text{(para pequenas velocidades)} \qquad (8)$$

EXEMPLO 2

Suponhamos que o combustível de um foguete seja consumido a uma taxa constante k (kg/s) no intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant T$. Suponhamos ainda que a velocidade de escape dos gases u seja constante. Calcule a velocidade do foguete no final da ignição. Qual a possibilidade de o foguete escapar do campo gravitacional da Terra?

Solução: Temos que $m_0 = m(0)$ é a massa do conjunto formado pelo foguete e combustível quando $t = 0$. Então, $m(t) = m_0 - kt$ fornece a massa do conjunto em cada instante. A Equação (8) nos dá:

$$(m_0 - kt)\frac{dv}{dt} - ku = (kt - m_0)g - kv$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_0 - kt}v = -g + \frac{ku}{m_0 - kt} \qquad \text{(linear de primeira ordem)}$$

Integrando, obtemos

$$v(t) = (m_0 - kt)\left[\int \frac{1}{m_0 - kt}\left(-g + \frac{ku}{m_0 - kt}\right)dt + c\right] = (m_0 - kt)\left[\frac{g}{k}\ln(m_0 - kt) + \frac{u}{m_0 - kt} + c\right] =$$

$$= \frac{g}{k}(m_0 - kt)\ln(m_0 - kt) + c(m_0 - kt) + u$$

Se para $t = 0$ tomarmos $v(0) = 0$, então $c = -\frac{u}{m_0} - \frac{g}{k}\ln m_0$ e

$$v(t) = \frac{gt}{k}\ln\left(\frac{m_0^k}{m_0 - kt}\right) + \frac{g}{k}m_0 \ln\left(\frac{m_0 - kt}{m_0}\right) + \frac{ktu}{m_0}$$

Se quisermos que o foguete escape do campo gravitacional da Terra, devemos ter para $t = T$, $v(t) = v_e$ (velocidade de escape), ou seja

$$\sqrt{2gR} = \frac{gT}{k}\ln\left(\frac{m_0^k}{m_0 - kt}\right) + \frac{g}{k}m_0 \ln\left(\frac{m_0 - kt}{m_0}\right) + \frac{kTu}{m_0}$$

■

EXERCÍCIOS

1. Se $u = 1.000$ m/s, $v(0) = 0$, $m(T) = 0{,}20\, m_0$, encontre o valor de $v(T)$.
2. Qual programa de combustão $m = m(t)$ deve ser idealizado para que o foguete suba com uma velocidade $v(t) = gt$?
3. Se $m(t) = m_0 - kt$, encontre a solução de $m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = -mg$ com $v(0) = 0$. Encontre $x(t)$, supondo $x(0) = 0$.
4. Um míssil é lançado e seu movimento obedece à Equação (8) durante 1 minuto, com aceleração constante $g/2$. Se $u = 1.000$ m/s, encontre a velocidade, altura e a massa quando acaba o combustível em $T = 1$ min. Use em seguida a equação de vôo livre $m(T)\frac{dv}{dt} = -m(T)g$ com $t \geqslant 60$ s para encontrar a altura máxima atingida.
5. Se o movimento de um foguete "obedece" à Equação (4), temos que sua velocidade é dada por

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x}$$

Mostre que se $v_0^2 < 2gR$, a altura máxima do foguete é dada por

$$x_m = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}$$

Discuta o caso da altura do foguete quando $v_0^2 = 2gR$.

Se $v_0^2 > 2gR$, o foguete escapa da gravidade terrestre; mostre que sua velocidade, neste caso, tende a $\sqrt{v_0^2 - 2gR}$.

6. Mostre que a solução da Equação (7') é dada por

$$v(t) = v_\infty \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{v_\infty} - \frac{kv_\infty}{m}t\right), \text{ onde } v_0 = v(0) \text{ e } v_\infty = \frac{m}{k}g^*$$

Consideremos agora a Segunda Lei de Newton para o movimento de uma partícula na forma vetorial dada por

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{f}$$

que, componente a componente, pode ser escrita como

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_1$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = F_2$$

$$m\frac{d^2x_3}{dt^2} = F_3$$

onde $x_i(t)$ são os componentes cartesianos da trajetória $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ com relação a um sistema inercial.

A Terceira Lei de Newton nos fornece uma expressão para a força de atração universal entre os corpos que, no caso de duas partículas pontuais de massas m_1 e m_2, localizadas em R_1 e R_2 no espaço (ver Figura 5.64), exercem uma sobre a outra uma força de igual intensidade atrativa

$$\frac{G\,m_1\,m_2}{\|\,\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\,\|^2}$$

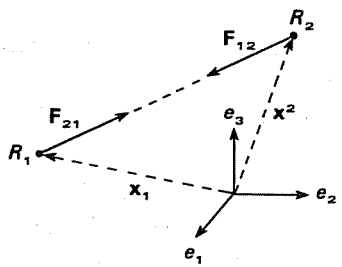


Figura 5.64

Vetorialmente poderíamos escrever que a força exercida por m_1 sobre m_2 é dada por

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{\|\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\,\|^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

onde

$$\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$$

* Para um desenvolvimento dos problemas tratados neste modelo veja POGORELOV, D.A. *Fundamentals of Orbital Mechanics*. San Francisco, Holden Day Inc., 1964.

Esta expressão é válida para partículas pontuais, uma idealização matemática. Se um corpo ocupa um volume V no espaço e tem densidade de massa $\rho(x_1, x_2, x_3)$, a atração que exercerá sobre uma partícula de massa unitária localizada em $\mathbf{x}^0$ será então dada pela integral (ver Figura 5.65).

$$\iiint_v \frac{\rho(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3}{\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \|^3} (x_i - x_i^0) = F_i$$

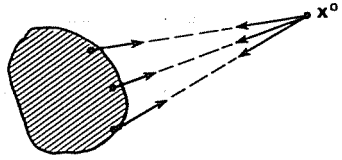


Figura 5.65

A invenção do Cálculo Integral está muito relacionada com esta fórmula e a do Cálculo Diferencial com a Segunda Lei.

Com base nesta expressão e usando coordenadas esféricas, Newton mostrou que a força de atração exercida por um corpo esférico de massa M, com densidade variando apenas radialmente, sobre uma massa m localizada em $\mathbf{x}^0$ é igual a

$$\frac{GMm\,(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)}{\| \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 \|^3}$$

onde $\mathbf{x}^1$ é o centro do corpo esférico, ou seja, este corpo atua como uma partícula de massa M localizada em seu centro.

Considerando os corpos celestes como aproximadamente esféricos e de densidade uniforme, Newton desenvolveu, então, a Mecânica Celeste como o estudo do movimento de partículas no espaço influenciadas apenas pelas suas atrações mútuas. É claro que a excentricidade do formato dos corpos e a não uniformidade da sua distribuição de massa exigirão correções nos resultados, mas mesmo com estas hipóteses simplificadoras as três Leis de Newton deixaram à Matemática a descrição da Dinâmica Celeste com uma surpreendente precisão. A simplicidade e elegância com que fenômenos tão complexos estão sinteticamente incorporados nestas expressões matemáticas e nas suas interpretações físicas é certamente um dos maiores triunfos que o intelecto humano poderia almejar.

Caminhemos um pouco nas pegadas destes gigantes do século XVII: Galileu, Newton, Kepler. Suponhamos que um corpo celeste de grande massa M esteja fixado na origem do sistema de coordenadas (ou vice-versa!) e estudemos o movimento de um outro corpo de pequena massa m, sob influência apenas da atração gravitacional do corpo maior. Dada a disparidade de massas, supomos que a influência do corpo menor sobre o maior seja negligenciável. Este é o caso no estudo do movimento de planetas ou cometas em torno do Sol, mas não da Lua em torno da Terra!

Dizemos então que a partícula de massa m se movimenta em um campo central de forças. A força exercida sobre este corpo depende apenas do ponto do espaço (x_1, x_2, x_3) que ocupa e a k-ésima componente desta força é dada pela expressão

$$F_k = \frac{-GMm\,\mathbf{x}_k}{\| \mathbf{x} \|^3}, \text{ ou, vetorialmente: } \mathbf{f} = \frac{-GMm}{\| \mathbf{x} \|^3}\mathbf{x}$$

Pela Segunda Lei de Newton, o seu movimento é regido pelo sistema de três equações diferenciais não lineares

$$m\frac{d^2\mathbf{x}_k}{dt^2} = -GMm\frac{\mathbf{x}_k}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}$$

ou, vetorialmente, pelo sistema

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -GM\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Multiplicando esta equação vetorialmente por $\mathbf{x}$ teremos

$$\mathbf{x}\times\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = 0$$

ou

$$\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \text{constante} = \mathbf{c}$$

Esta equação representa a conservação da quantidade de movimento angular. Este fato nos traz duas informações importantíssimas:

1. O vetor posição $\mathbf{x}(t)$ e o vetor velocidade $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ são sempre perpendiculares a um vetor fixo $\mathbf{c}$ e, portanto, o movimento neste caso é plano, isto é, se desenvolve no plano que passa pela origem perpendicular a $\mathbf{c}$.

2. $\left\|\mathbf{x}\times\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\| = 2\frac{dS}{dt}$, onde $S(t)$ é a área varrida pelo vetor posição $\mathbf{x}(t)$ no plano de movimento (Verifique!) (ver Figura 5.66).

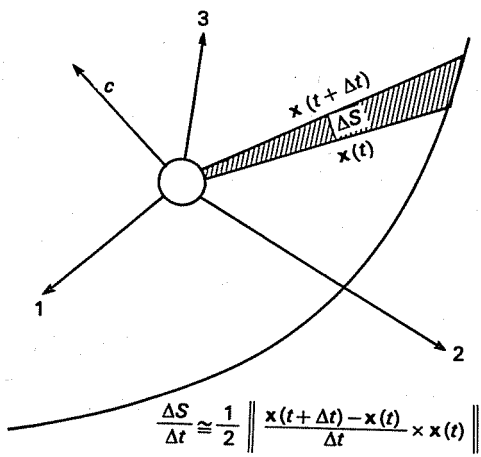


Figura 5.66

Esta é exatamente a Primeira Lei de Kepler: "Uma reta imaginária que vai de qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais".

Estudemos melhor estas duas equações

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{-GM}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x} \\ \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{x} = \mathbf{c} \end{cases}$$

Multiplicando (com o produto interno de vetores) a primeira equação por $\dot{\mathbf{x}}$ obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{-GM}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

que pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = -GM\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{d}{d\mathbf{x}}\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^3}\right) = GM\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right)$$

Integrando ambos os lados temos

$$\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - GM\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = K_1$$

Esta equação representa a conservação da energia mecânica do sistema.

Como o movimento se dá em um plano, tomemos

$$\mathbf{x} = R\,(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{c} = (0, 0, 1)$$

e portanto

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dR}{dt}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) + R\,(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(0, 0, R^2\frac{d\theta}{dt}\right) = (0, 0, K_2)$$

Portanto, no plano do movimento as duas equações se reduzem, na forma polar, a:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} - \dfrac{GM}{R} = K_1 \\ R^2\dfrac{d\theta}{dt} = K_2 \end{cases}$$

que é um sistema de equações diferenciais não lineares de primeira ordem, implícito, para as funções incógnitas $R(t)$ e $\theta(t)$ que descrevem a órbita da partícula no campo central. Surpreendentemente, apesar do seu aspecto, este sistema de equações pode ser integrado analiticamente, como mostraremos em seguida.

O traço geométrico da trajetória, isto é, a órbita, pode ser descrito por uma equação $R = R(\theta)$. Comecemos pela obtenção da órbita a partir das seguintes observações

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^{-1} = \dfrac{dR}{d\theta} \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{K_2}{R^2} \end{cases}$$

Substituindo estas relações na primeira equação e dividindo por

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{K_2^2}{R^4}$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}R^2 - \frac{GM}{R} = \frac{K_1}{\dfrac{K_2^2}{R^4}}$$

Desta forma, reduzimos o sistema de equações a uma equação de primeira ordem não linear que pode ser escrita como

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 = R^4\left(\frac{2K_1}{K_2^2} + \frac{GM}{RK_2^2} - \frac{1}{R^2}\right),$$

e como $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{R}\right) = -\dfrac{\dfrac{dR}{d\theta}}{R^2}$

$$\left(\frac{\dfrac{dR}{d\theta}}{R^4}\right) = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{R}\right)\right]^2$$

e a equação pode ser escrita em termos de $\rho = \dfrac{1}{R}$ na forma

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{2K_1}{K_2^2} + \frac{2GM}{K_2^2}\rho - \rho^2\right)$$

e integrada como

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\left(-\rho^2 + \dfrac{2GM}{K_2^2}\rho + \dfrac{2K_1}{K_2^2}\right)^{1/2}}$$

que é uma integral, podendo ser escrita explicitamente em forma de funções elementares.

Fazendo $\dfrac{1}{P} = \dfrac{GM}{K_2^2}$

$$E^2 = \frac{\dfrac{2K_1}{K_2^2} + \left(\dfrac{GM}{K_2^2}\right)^2}{\left(\dfrac{GM}{K_2^2}\right)} = 2\frac{K_1}{K_2^2}P^2 + 1$$

Podemos então escrever

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\left[\frac{E^2}{P^2} - \left(\rho - \frac{1}{P}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Tomando $z = \rho - \frac{1}{P}$, vem

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{E/P} \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\left[1 - \left(\frac{z}{E/P}\right)^2\right]^{1/2}} = \text{arc sen}\, \frac{z}{E/P} - \text{arc sen}\, \frac{z_0}{E/P}$$

Se $z = 0$ corresponde a $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ temos (Verifique!)

$$R = \frac{P}{1 - E\cos\theta}$$

Consulte agora o seu texto preferido de Geometria Analítica e comprove que esta equação é a forma polar para uma curva cônica no plano, ou seja, elipse, parábola ou hipérbole, conforme E^2 for menor, igual ou maior do que 1 respectivamente.

Como

$$E^2 = 1 + \frac{2\frac{K_1}{K_2^2}}{\left(\frac{GM}{K_2^2}\right)^2}$$

Verificamos que E é função de K_1 e K_2, $E(K_1, K_2)$, onde K_2 é a quantidade de movimento angular e $K_1 = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{r_0}$ representa a energia total do sistema, ambos conservados pelo movimento.

Observe que o sinal do segundo termo depende unicamente do sinal de K_1 e, portanto, um corpo celeste de massa m que está em um ponto à distância r do outro de massa M, será capturado em órbita limitada (elipse) por este se sua energia cinética for menor do que $\frac{GM}{r_0}$, independente da direção de sua velocidade.

Um exercício interessante consiste em calcular a origem e apogeu de órbitas planetárias em torno do Sol com os dados astronômicos disponíveis.

Calculemos agora o período de uma órbita elíptica, isto é, o tempo necessário para uma revolução completa.

Da equação das áreas $r^2 \frac{d\theta}{dt} = K_2$ (constante) obtemos

$$K_2 T = \int_0^T r^2 \frac{d\theta}{dt}\, dt = \int_{\theta}^{\theta + 2\pi} r^2 d\theta$$

onde T é o período e

$$\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

é a área total descrita pela órbita, isto é, a área da elipse que é $2\pi ab$, se a e b forem respectivamente seus semi-eixos maior e menor.

Portanto, $2\pi ab = K_2 T$ e seu quadrado será

$$4\pi^2 a^2 b^2 = K_2^2 T^2$$

Como $P = \dfrac{b^2}{a}$ e $\dfrac{1}{P} = \dfrac{GM}{K_2^2}$, temos

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\dfrac{b^2}{a}}{K_2^2} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Esta é, então, a Terceira Lei de Kepler: "Em uma órbita elíptica, a razão do quadrado do período sobre o cubo do seu semi-eixo maior é uma constante que não depende do planeta, mas apenas do campo central". Com isto concluímos a dedução das três leis que Kepler anunciou nos seus livros *Astronomia Nova* (as duas primeiras) em 1609, e *A Harmonia do Mundo*, em 1619, que Newton demonstrou, com base em sua teoria mecânica, no livro *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, em 1687.

É impossível deixar de se maravilhar com a fascinante história do nascimento da Ciência Moderna nos séculos XVII e XVIII através dos trabalhos de estudiosos como Newton, Kepler e Galileu. Sobre este aspecto existem alguns livros extraordinários*.

A resolução explícita e completa do problema acima, chamado problema dos dois corpos, foi um dos argumentos mais fortes para a comprovação da teoria de Newton e deu a impressão, na época, de que os problemas principais da Mecânica Celeste poderiam ser resolvidos explicitamente. Entretanto, como resultado dos esforços de matemáticos do século XVIII e XIX do porte de Newton, Euler, Laplace, Gauss, por exemplo, foi ficando cada vez mais claro que, a despeito da precisão da Mecânica Newtoniana (ou talvez por isto mesmo), as soluções explícitas eram raríssimas e o próprio problema geral dos três corpos não admitia solução explícita.

Com isto iniciou-se no final do século XIX e começo do século XX a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, principalmente pelos trabalhos de Henri Poincaré e A.A. Lyapunov. Esta teoria constitui uma das principais correntes da Matemática Contemporânea, para a qual matemáticos brasileiros têm contribuído significativamente.

---

* KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, Oxford University Press, 1972 (especialmente os Capítulos 11 a 18).

KOESTLER, A. *The Sleepwalkers, a History of Man's Changing Vision of the Universe*. New York, Grosset and Dunlap, 1963.

KUHN, T. *The Copernican Revolution: Planetary Astronomy in the Development of Western Thought*. Cambridge, Harvard University Press, 1957.

Capítulo 6

EQUAÇÕES NÃO LINEARES — ESTUDO ANALÍTICO

6.1 EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE: PROBLEMAS DE FRONTEIRA

6.1.1 Princípio de Fermat e a Lei de Snell

Considere um meio contínuo (em $\mathbb{R}^n$), dotado de um campo de velocidades escalares $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ que caracteriza este meio com relação a um determinado tipo de propagação de perturbação. Quando consideramos a luz como tal perturbação, o significado físico de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é o seguinte: um raio luminoso que passa pelo ponto x deve ter a velocidade escalar $v(x)$, independente de sua direção e sentido. Esta independência da direção é usualmente denominada **isotropia**. No caso geral, como por exemplo a propagação da luz através de cristais, a velocidade escalar depende da direção e tal dependência é explicitada por meio de uma função do tipo $v(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, onde $\mathbf{p}$ é um elemento de $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \| x \| = 1\}$. Tal função $v(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ é considerada estritamente positiva e continuamente diferenciável, a menos de descontinuidades de saltos (através de superfícies, se em $\mathbb{R}^3$, ou de linhas, se em $\mathbb{R}^2$), que representam interfaces entre dois meios distintos. Se v depende efetivamente de $\mathbf{p}$, o meio é chamado **anisotrópico** e a velocidade do raio luminoso em cada ponto depende da direção (mas não do sentido, pois em geral considera-se que $v(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = v(\mathbf{x}, -\mathbf{p})$).

Portanto, a propagação da luz em um caminho, representado pela curva γ que liga os pontos A e B, é feita em um intervalo de tempo que pode ser calculado pela integral de linha

$$\int_\gamma \frac{1}{v(\mathbf{x}, \mathbf{p})}\, ds = T(\gamma); \quad \left(dt = \frac{ds}{v(\mathbf{x}, \mathbf{p})}\right). \tag{1}$$

Se considerarmos agora o conjunto K de curvas continuamente diferenciáveis, isto é, parametrizáveis por funções continuamente diferenciáveis

$$x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$$

tais que $\frac{dx}{dt}(t) \neq 0$ para todo t, observamos que $T(\gamma)$ pode ser interpretado como um funcional sobre K, cujo valor é um número real.

A questão natural que se coloca agora é como caracterizar o caminho (ou caminhos) efetivamente percorridos pelo raio luminoso que sai de A e chega em B.

Consideremos três situações simples como exemplos:

1. Se o meio é homogêneo, isto é, se $v(\mathbf{x}, \mathbf{p}) =$ constante, a experiência nos mostra que a trajetória deve ser um segmento de reta ligando A e B. Este é o modelo concreto mais comum para o conceito abstrato (euclidiano) de reta no espaço.

2. Se o meio é limitado por uma superfície S não absorvente e $v(\mathbf{x}, \mathbf{p}) =$ constante, então os raios que partem de A e chegam a B são aqueles que: (*a*) percorrem o segmento de reta AB (se este não intercepta a fronteira); (*b*) partem de A, encontram a fronteira de S e são refletidos até B (ver Figura 6.1). Neste caso, a trajetória não é um elemento de K, mas satisfaz a lei experimental da reflexão: *ângulo de incidência = ângulo de reflexão.*

Esta lei elimina a possibilidade de muitos raios que partem de A chegarem até B. Se a superfície de reflexão S não for muito complicada, teremos apenas um número finito destes raios.

Muitos problemas interessantes são formulados a respeito da reflexão de raios luminosos e o leitor poderá encontrar vários deles nas referências citadas na nota de rodapé desta página.*

3. Suponha que o meio tenha uma descontinuidade de contato na superfície S (ver Figura 6.2), que provoca o conhecido fenômeno de *refração* do raio luminoso.

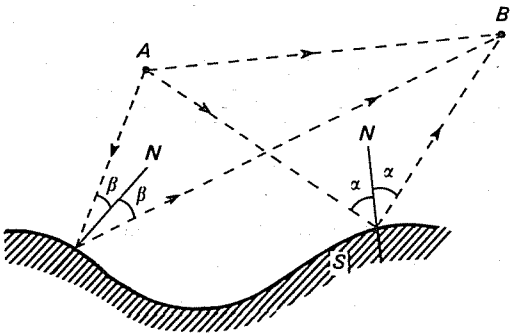


Figura 6.1

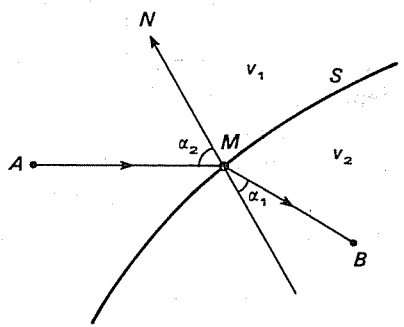


Figura 6.2

Neste caso, a Lei de Snell nos afirma que: "A trajetória do raio luminoso que vai de A a B atravessa a interface S entre os dois meios homogêneos no ponto M, de tal modo que os segmentos AM e MB formem ângulos α_1 e α_2 com a normal à superfície em M e

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{v_2} \tag{2}$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades respectivas dos raios luminosos em cada lado do meio separado por S.

Com estas três situações construímos a Teoria da Ótica Geométrica para meios homogêneos com fronteira refletora (espelhos) e superfícies de descontinuidade (lentes).

---

* BOLTIANSKI, V.G. & Gojberg, I.T. *División de Figuras en Partes Menores*. Moscou, Mir, 1973. KELLER, J.B. Parallel Reflection by Mirrors. *Quart. Appl. Math.*, *11*, 216-219, 1953.

Entretanto, quando estudamos a trajetória de um raio luminoso através de grandes distâncias na atmosfera e de pequenas distâncias nos cristais, é necessário considerar uma função $v(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ mais geral do que nos três exemplos anteriores. O efeito de cintilação que percebemos quando a fonte de luz está muito distante (uma estrela, por exemplo) é resultado direto da variação da função $v(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ através do espaço entre nossa vista e a fonte de luz causada pela turbulência atmosférica.

Consideremos agora o problema do meio não homogêneo anisotrópico em que a velocidade da luz em qualquer ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, na direção de $\mathbf{p} \in S^{n-1}$, é dada por uma função $n(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \dfrac{1}{v(\mathbf{x}, \mathbf{p})}$ é denominada *índice de refração*.

A questão continua a mesma: qual o caminho percorrido por um raio luminoso entre dois pontos A e B?

Nesta situação o método científico geralmente procede do seguinte modo: (*a*) estudam-se alguns casos simples em que se conhece perfeitamente o comportamento das soluções; (*b*) obtém-se uma caracterização suficientemente geral das soluções, isto é, que não dependa das peculiaridades dos exemplos estudados; (*c*) generaliza-se esta caracterização para situações mais abrangentes como uma espécie de conjecturas ou "leis"; (*d*) verifica-se a validade destas leis comparando-se as suas implicações com dados reais. Em suma, é o processo típico de modelagem que deve ser aplicado.

No que se segue, apresentaremos um desenvolvimento elementar da Teoria de P. Fermat (1601-1665) sobre a Ótica Geométrica, percorrendo as etapas descritas acima.

É interessante observar que inicialmente Fermat não aceitava a Lei de Snell e foi baseando-se apenas na propagação retilínea da luz em um meio constante e na Lei de Reflexão, que ele enunciou audaciosamente ($\sim$ 1658) o seguinte princípio: *a trajetória, de um raio luminoso entre dois pontos* A *e* B *de um meio infinito com a relação constitutiva* $v(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ *se faz através de caminhos que produzem um tempo mínimo de percurso.*

Aqui, o caráter de *mínimo* é local, no sentido que o tempo é mínimo para todos os caminhos disponíveis *próximos* do escolhido. Esta explicação é necessária, uma vez que desejamos incluir nesta caracterização também os raios refletidos quando o meio for homogêneo. Por meio de argumentos geométricos simples podemos observar que este raio refletido não é de fato um mínimo global, mas apenas local (ver Figura 6.3).

Heron de Alexandria, considerando estas mesmas observações experimentais, no segundo século a.C., generalizou na direção errada, afirmando que "a luz vai de um ponto a outro por um caminho de comprimento mínimo". O princípio de comprimento mínimo foi, então, substituído por Fermat pelo princípio de *tempo mínimo*.

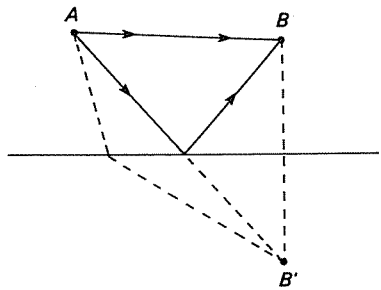


Figura 6.3

A concordância da sua teoria com a Lei de Snell (um exercício simples de cálculo) fez com que Fermat não só aceitasse esta lei, como se tornasse absolutamente convicto do princípio do tempo mínimo. (Alguns autores afirmam que a ordem dos acontecimentos foi inversa, isto é, que a Lei de Snell foi a real motivação de Fermat para o princípio de tempo mínimo!)*

Consideremos agora o caso de um meio estratificado plano onde cada faixa é homogênea, isotrópica e com índice de refração n_i. De acordo com a Lei de Snell a trajetória do raio é tal que em cada interface entre as faixas i e $i-1$ temos

$$\frac{\cos \gamma_i}{v_i} = \frac{\cos \gamma_{i-1}}{v_{i-1}} \quad \left(\text{ver Figura 6.4 onde } \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \tag{3}$$

ou seja, $\dfrac{\cos \gamma_i}{v_i} = n_i \cos \gamma_i = \text{constante}$. Esta constante depende do ângulo de incidência inicial do raio, isto é, de $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2} - \gamma_0$.

O modelo do meio estratificado é muito comum em Geofísica, quando se estuda a propagação de ondas através da atmosfera, do oceano e no interior da Terra.

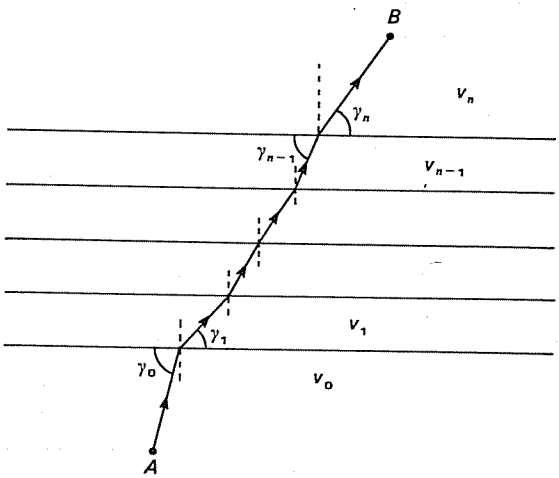


Figura 6.4

Suponha agora que o meio seja "estratificado continuamente", isto é, que o índice de refração n dependa apenas de uma das coordenadas, x_2 por exemplo. Esta hipótese é mais próxima da realidade para os exemplos geofísicos. Neste caso, é razoável esperar que a Lei de Snell possa também ser generalizada pela equação

$$\frac{\cos \gamma}{v} = \text{constante} \tag{4}$$

---

* KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, Oxford University Press, 1972.

Se $x(t)$ é a trajetória do raio temos $\| \dot{x} \| = v(x(t))$ e $\cos \gamma(x(t)) = \dfrac{\dot{x}_1}{\| \dot{x} \|}$ e a Lei de Snell fica sendo

$$\frac{\cos \gamma}{v} = \frac{\left(\dfrac{\dot{x}_1}{\| \dot{x} \|} \right)}{\| \dot{x} \|} = \frac{\dot{x}_1}{\| \dot{x} \|^2} = \text{constante}$$

Podemos obter uma equação diferencial de segunda ordem para esta trajetória se a considerarmos descrita como o gráfico de uma função $x_2 = f(x_1)$, pois neste caso a Lei de Snell toma a forma

$$\frac{\cos \text{ arc tg } f'(x_1)}{v(f(x_1))} = \text{constante} \tag{5}$$

ou

$$v^2(f(x_1)) \cdot (1 + f'^2(x_1)) = \text{constante} \tag{5'}$$

Derivando (5') obtemos uma equação diferencial ordinária não linear para $x_2 = f(x_1)$.

Portanto, a Lei de Snell nos fornece um meio de construir um conjunto de órbitas no plano que podem ser identificadas como trajetórias de um sistema dinâmico. Voltaremos a esta questão mais adiante.

EXERCÍCIO

1. Considere o meio ótico formado pelo semiplano $x^2 > 0$ com índices de refração dados por:

   a. $x^2 = n(x)$

   b. $\dfrac{1}{\sqrt{x_2}} = n(x)$

   e mostre por meio da Lei de Snell que as órbitas são, respectivamente:

   a. catenárias e,

   b. ciclóides.

   Faça um esboço gráfico de feixes de raios luminosos.

O princípio de Fermat é um exemplo clássico de princípios variacionais em que a solução de um problema é caracterizada não por uma equação explícita ou diferencial, mas pela *condição de minimizar o valor de um funcional.*

Neste caso, as soluções são curvas ligando A a B caracterizadas pela condição de que o tempo gasto para percorrê-las é um mínimo local, dada a distribuição de velocidades do meio $v(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Inúmeros outros problemas em Matemática e Física Matemática podem ser formulados por princípios variacionais. O objetivo desta secção é apresentar alguns destes problemas a partir do exemplo ótico de Fermat, cujas soluções podem ser analisadas

pelo chamado *método de Euler-Lagrange*. Este método caracteriza as soluções do problema variacional como soluções de determinadas equações diferenciais ordinárias (chamadas de Euler-Lagrange ou variacionais), acrescentadas de condições de fronteira.

No Capítulo 7 apresentaremos outros problemas cujas soluções são caracterizadas por equações diferenciais parciais.

Consideremos, então, a formulação analítica de princípios variacionais semelhantes ao princípio de Fermat.

Seja K o conjunto das curvas parametrizáveis em $\mathbb{R}^n$ que ligam os pontos A e B, $K = \{\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, continuamente diferenciáveis, com $\varphi(0) = A$ e $\varphi(1) = B$; $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$ para todo $\tau\}$. O problema geral anisotrópico consistirá em caracterizar as funções $\varphi \in K$ que minimizam o funcional

$$J(\varphi) = \int_0^1 \frac{\| \dot{\varphi} \| d\tau}{v\left(\varphi(\tau), \dfrac{\dot{\varphi}}{\| \dot{\varphi} \|}\right)} = \int_c n(\varphi, \mathbf{p}) ds \tag{6}$$

no sentido *local* do princípio de Fermat que será esclarecido mais a frente.

Generalizaremos este problema considerando funções continuamente diferenciáveis $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ e

$$J(\varphi) = \int_0^1 f(\varphi, \dot{\varphi}) d\tau; \qquad \varphi \in K \tag{7}$$

Vamos supor, então, que o mínimo seja atingido *localmente* para a função φ. Consideremos uma função continuamente diferencial $\eta : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, tal que $\eta(0) = \eta(1) = 0$. Com isto, $\varphi_\varepsilon(\tau) = \varphi(\tau) + \varepsilon\eta(\tau)$ para $\varepsilon \sim 0$ pode ser interpretada como uma "pequena variação" do caminho φ entre A e B (ainda em K). O funcional calculado nestas curvas próximas de φ é uma função real de variável real ε (diferenciável) que tem um mínimo em $\varepsilon = 0$. Um resultado elementar do cálculo de uma variável nos garante, então, o seguinte

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\varphi + \varepsilon\eta) = 0 \quad \text{para} \quad \varepsilon = 0$$

Efetuando as operações, temos

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\varphi + \varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} f(\varphi + \varepsilon\eta, \dot{\varphi} + \varepsilon\dot{\eta}) d\tau \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} (\varphi, \dot{\varphi})\eta + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} (\varphi, \dot{\varphi})\dot{\eta} \right) d\tau$$

Escrevendo o segundo termo do integrando como

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} (\varphi(\tau), \dot{\varphi}(\tau))\dot{\eta}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\eta\right) - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\varphi, \dot{\varphi})\right)\eta$$

verificamos que

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \dot{\eta} d\tau = \int_0^1 \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \eta\right) d\tau - \int_0^1 \eta \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right) d\tau =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \eta \Big|_{\tau=0}^{\tau=1} - \int_0^1 \eta \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right) d\tau =$$

$$= -\int_0^1 \eta \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right) d\tau, \text{ pois } \eta(0) = \eta(1) = 0$$

Portanto, concluímos que se J é um mínimo na função φ, então

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\varphi, \dot{\varphi}) - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\varphi, \dot{\varphi})\right)\right] \eta d\tau = 0 \tag{8}$$

para toda função $\eta : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ *continuamente diferenciável, tal que* $\eta(0) = \eta(1) = 0$.

Pela continuidade do integrando isto implica que devemos ter, necessariamente (verifique(*))

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\varphi, \dot{\varphi}) - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\varphi, \dot{\varphi})\right) = 0 \tag{9}$$

Escrevendo a Equação (9) componente a componente e desenvolvendo o segundo termo pela Regra da Cadeia, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_k}(\varphi, \dot{\varphi}) \ddot{\varphi}_j = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi, \dot{\varphi}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial p_k}(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{\varphi}_j;\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

que é um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem para $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)$.

A Equação (10) é chamada *equação de Euler-Lagrange* para o problema variacional proposto e caracteriza, junto com as condições de fronteira $\varphi(0) = A$ e $\varphi(1) = B$, os mínimos *locais* do funcional J em K.

Tal como no cálculo elementar, esta não é uma condição suficiente para o mínimo do funcional. O que podemos afirmar é que *se houver* um mínimo em K para o funcional J, este mínimo será necessariamente atingido nas soluções da Equação (10), satisfazendo as condições de fronteira propostas.

Ainda, em analogia ao cálculo elementar, dizemos que as soluções das equações de Euler-Lagrange são *funções estacionárias* para J.

O princípio de Fermat, assim como outros princípios variacionais, pode ser então enunciado de uma forma mais abrangente como princípio estacionário: *a trajetória do raio luminoso entre* A *e* B *se faz através de caminhos C que são estacionários para o funcional* $J(C) =$ *tempo de percurso.*

Isto significa basicamente que no caso em que $v(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ é continuamente diferenciável, as trajetórias são exatamente as soluções da equação de Euler-Lagrange.

---

* COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1969, 2v.

Para a caracterização do *mínimo local* é necessário não só fixar o conjunto K das curvas admissíveis para J, mas também estabelecer o significado de *local*, isto é, de "vizinhança de uma curva C".

No problema de Fermat utilizamos implicitamente o fato de que uma *vizinhança de* $\varphi(t)$ significa "proximidade uniforme dos valores de $\varphi(t)$ e dos valores de $\dot{\varphi}(t)$". Neste caso, dizemos que φ é um *mínimo fraco*.

(Se o conceito de vizinhança envolver apenas a proximidade uniforme dos valores de $\varphi(t)$ então dizemos que o mínimo é *forte*. Medite um instante sobre os conceitos de "fraco" e "forte".)

Para exemplificar este procedimento geral voltemos ao problema de Fermat para um meio isotrópico onde

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \| \mathbf{p} \| n(\mathbf{x}) \qquad \text{e} \qquad n(\mathbf{x}) = \frac{1}{v(\mathbf{x})} = \text{índice de refração}$$

Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \| \mathbf{p} \| \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\| \mathbf{p} \|} n(\mathbf{x}) \qquad \text{(Verifique!)*}$$

e, portanto, as equações de Euler-Lagrange são

$$\| \varphi \| = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{\varphi}}{\| \dot{\varphi} \|} n \right) = 0$$

ou

$$\frac{n}{\| \dot{\varphi} \|} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{n}{\| \dot{\varphi} \|} \frac{d}{d\tau} \varphi \right) = n \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} \tag{11}$$

Tomando a variável ξ de modo que $\frac{d}{d\xi} = \frac{n(\varphi(\tau))}{\| \dot{\varphi}(\tau) \|} \frac{d}{d\tau}$, isto é, $\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\| \varphi(\tau) \|}{n(\varphi(\tau))}$, então (11) pode ser escrita como

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \varphi = n \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} \tag{12}$$

A Equação (12), é vetorial, descreve para $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ as órbitas dos raios luminosos no meio isotrópico $\mathbb{R}^n$ com índice de refração $n(\mathbf{x}) = \frac{1}{v(\mathbf{x})}$. Observe que a variável *tempo* para este problema físico é

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\| \dot{\varphi} \| \, d\tau}{v} = \| \dot{\varphi} \| \, n(\varphi) \, d\tau = n^2 \, d\xi$$

---

* Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotamos por $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ o vetor $\nabla_{\mathbf{x}} f = \text{grad}_{\mathbf{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, então $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ denota a matriz $m \times n$ dada por $\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Assim, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ representa a derivada de f em cada caso.

Portanto, as trajetórias dos raios luminosos são tomadas sobre as órbitas definidas pela Equação (12) que pode ser escrita como um sistema dinâmico autônomo na forma conservativa

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -\operatorname{grad}\phi, \quad \text{onde} \quad \phi = -\frac{1}{2}n^2 \tag{13}$$

com velocidade: $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d\varphi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{d\varphi}{d\xi}\dfrac{1}{n^2}$.

A questão que surge naturalmente agora é a seguinte: é possível obter a Lei de Snell generalizada a partir das Equações (10) de Euler-Lagrange? A resposta é afirmativa e para verificá-la vamos considerar um meio continuamente estratificado na coordenada x_2, isto é, o índice de refração n depende apenas de x_2. Neste caso, temos $\nabla n = \dfrac{\partial n}{\partial x_2}\mathbf{e}_2$, e as trajetórias dos raios luminosos estão todas contidas num plano que passa pelo ponto de partida, contém $\mathbf{e}_2$ e a velocidade inicial. (Verifique!)

Agora, se nos restringirmos aos raios luminosos que iniciam com velocidade no plano x_1x_2, o meio contínuo poderá ser considerado como sendo o próprio plano. É fácil verificar, então, que a componente da velocidade do raio na direção $\mathbf{e}_1$ é sempre constante. (Verifique!) Desta forma, obtemos a Lei de Snell generalizada para meios estratificados planos.

A semelhança entre a equação das órbitas dos raios luminosos na forma potencial (13) e a equação que descreve o movimento de uma partícula (de massa unitária) em um campo conservativo nos leva a concluir que os traços dos raios luminosos em um meio contínuo $\mathbb{R}^n$ com índice de refração $n(\mathbf{x})$ são idênticos às órbitas das partículas sob ação de um campo conservativo de potencial $\phi = -\dfrac{1}{2}n^2$.

Por outro lado, podemos colocar o problema inverso, isto é, uma partícula de massa unitária se desloca sob ação de um campo conservativo cujo potencial é ϕ e suas trajetórias são descritas pela Segunda Lei de Newton

$$\ddot{x} = -\nabla_x\phi$$

Então, o problema ótico correspondente é obtido da seguinte maneira: a cada trajetória temos

$$\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + \phi(\mathbf{x}) = E \text{ de onde temos que } E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + 2(\phi - E)$$

é nulo sobre a trajetória de energia E (observe que $\phi - E \leqslant 0$ sobre esta trajetória).

Tomando $-n_E^2 = 2(\phi - E)$, verificamos que as trajetórias de energia E descrevem órbitas que são exatamente os traços dos raios luminosos no meio isotrópico $\mathbb{R}^n$ com índice de refração $n_E(\mathbf{x})$.

É importante observar, todavia, que a velocidade da partícula no sistema mecânico é $\dot{\mathbf{x}} = \sqrt{2(E-\phi)}$ e a velocidade do raio luminoso é

$$v = \frac{1}{n_E(\mathbf{x})} = \frac{1}{\sqrt{2(E-\phi)}}$$

Portanto, sob este aspecto, não há uma completa analogia entre os dois problemas físicos.

Se $t' = \xi$ é o parâmetro tempo mecânico e t o parâmetro tempo ótico, a mudança de parametrização é dada por

$$dt = n_E^2 dt' = 2(E - \phi)dt'$$

Observe que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2(E-\phi)}}; \quad \frac{ds}{dt'} = \sqrt{2(E-\phi)} \text{ e } \frac{dt}{dt'} = \frac{ds/dt'}{ds/dt}$$

A analogia entre problemas de origens físicas diversas, através de conceitos e formulações matemáticas comuns, tem se constituído freqüentemente em pontos de transição para o desenvolvimento de novas teorias matemáticas e físicas. A conexão entre a Ótica Geométrica e a Mecânica Newtoniana é um exemplo clássico deste fato, devendo-se em grande parte aos trabalhos do matemático irlandês W.R. Hamilton (~ 1834) que construiu, a partir desta analogia, uma teoria de notável estética formal e de grande importância teórica na Física.

Agora, como a Ótica Geométrica tem sua origem em um princípio variacional, podemos suspeitar que a Mecânica Newtoniana possa ser formulada também a partir de um princípio variacional. Esta conclusão foi explicitada claramente nos trabalhos de Euler e Lagrange (~ 1760) muito antes da Teoria de Hamilton e foi basicamente motivada pelo fato de que as equações gerais da Dinâmica Newtoniana, se habilmente manipuladas, podem ser interpretadas como equações diferenciais variacionais para um funcional denominado *ação*.

PROJETO 1 BRAQUISTÓCRONA

A semelhança entre a Ótica Geométrica e a Mecânica pode ser reforçada quando se analisa o problema clássico da *braquistócrona* que consiste em obter uma curva descendente ligando dois pontos A e B, de tal forma que uma partícula sob a ação apenas da gravidade possa ir de A até B no mínimo tempo através desta curva (ver Figura 6.5).

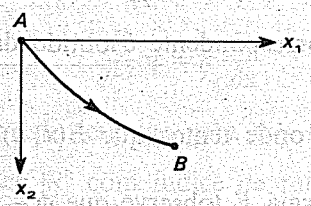


Figura 6.5

a. Observe que, qualquer que seja a curva percorrida, ligando A e B, a velocidade da partícula será dada, a cada altura x_2, por $v^2 = 2gx_2$.

b. Compare este problema com o de Fermat para um meio ótico com índice de refração $n(x) = \frac{c}{\sqrt{x_2}}$ e cujas trajetórias já foram obtidas anteriormente (ciclóides).

c. Obtenha as equações de Euler-Lagrange para este problema.

d. Faça um estudo do problema de se obter uma curva ligando os pontos A e B, tal que a superfície de revolução em torno do eixo x_1 tenha área mínima. Faça uma analogia desta questão de superfície mínima de revolução com o princípio de Fermat e a Lei de Snell para um meio ótico.

PROJETO 2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS

A descrição das trajetórias de raios luminosos pela Lei de Snell pode ser empregada no estudo de propagação de ondas acústicas, elásticas e outros tipos através do globo terrestre. O oceano e atmosfera podem ser considerados meios estratificados com relação ao índice de refração $n(x)$.

Suponha que o índice de refração $n(x_2)$ no oceano possa ser descrito por um gráfico na forma da Figura 6.6, o que é razoável devido às correntes internas de diferentes constituições.

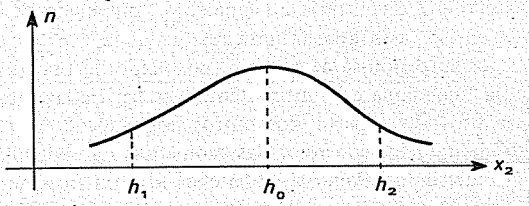


Figura 6.6

Mostre que entre as profundidades h_1 e h_2 forma-se uma espécie de canal para os raios de propagação, de acordo com a Lei de Snell (ver Figura 6.7). Este confinamento da energia das ondas certamente implicará em uma maior distância de alcance na detecção das ondas enviadas a partir de $(0, h_0)$!* Analise as trajetórias dos raios luminosos incidentes em uma esfera cujo índice de refração é função do raio.

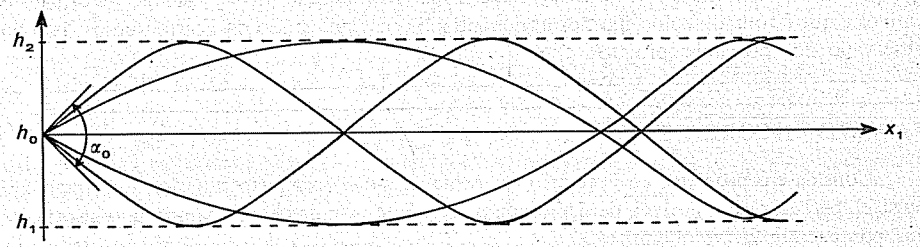


Figura 6.7

PROJETO 3 GEOMETRIA DE POINCARÉ-LOBATCHEVSKI

A aplicação da Lei de Snell tem conexões surpreendentes com outros ramos da própria Matemática. Nosso conceito geométrico de reta foi herdado dos "Elementos" de Euclides que é uma abstração da observação das trajetórias dos raios luminosos em um meio ótico constante.

Suponha, por exemplo, que vivêssemos em um meio $\mathbb{R}^3$, $x_3 > 0$, em que o índice de refração fosse dado por $n(\mathbf{x}) = \dfrac{k}{x_3}$. Mostre que os raios luminosos, neste caso, descrevem trajetórias semicirculares, centradas em $x_3 = 0$, e que no limite convergem a uma reta vertical.

Comprove que o tempo de percurso em uma destas trajetórias, de um ponto em $x_3 > 0$ até uma de suas intersecções com $x_3 = 0$, é infinito. Ainda, se A e B são pontos de $x_3 > 0$, então o raio luminoso que os úne é único.

É razoável conjeturar que o "inatingível" $x_3 = 0$ seja considerado como o "infinito". Assim, neste meio ambiente a geometria das retas com o modelo de raios luminosos deveria satisfazer as seguintes propriedades:

1. "Por dois pontos quaisquer passa uma única reta".

* ECKART, C. *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres*. Elmsford, Pergamon Press, 1960.

2. "Um segmento de reta que liga dois pontos A e B tem o menor "comprimento" dentre todos os caminhos que os ligam". (O habitante deste meio, baseado no "dogma" da velocidade constante de um raio luminoso, medirá a distância pelo tempo de percurso, o chamado *comprimento ótico*.) Aqui, a definição de *retas paralelas* é dada por: duas retas são paralelas se têm um só ponto em comum no infinito, $x_3 = 0$. Portanto, temos a terceira propriedade.

3. "Por um ponto não pertencente a uma reta R passam exatamente duas retas paralelas a R".

Observe que, ao contrário das duas propriedades anteriores que concordam perfeitamente com a Geometria Euclidiana, 3 é contrária ao famoso 5.º postulado de Euclides: "Por um ponto não pertencente a uma reta r passa apenas uma reta paralela a r".

Durante muitos anos suspeitou-se de que o 5º postulado de Euclides fosse dispensável para a construção da Geometria Euclidiana e inúmeras tentativas frustradas foram empreendidas por matemáticos famosos para prová-lo a partir dos outros postulados.

Com a descoberta de modelos concretos das geometrias não euclidianas, como a apresentada acima (denominada Geometria de Poincaré-Lobatchevski), verificou-se finalmente que Euclides tinha razão em colocar o 5º postulado como axioma, para que a teoria resultante fosse a Geometria Clássica!*

O método de Euler-Lagrange que apresentamos por meio da teoria de Fermat é aplicável a inúmeros outros problemas físicos que podem ser formulados por princípios variacionais ou que são originalmente problemas de mínimo (ou de máximo) para funcionais.

Ao lado do princípio de Fermat para a Ótica e de Hamilton para a Mecânica, podemos citar o importante princípio da *mínima energia* que caracteriza o equilíbrio de sistemas mecânicos conservativos e que é tomado como um dos argumentos básicos no estudo da Elastoestática. Isto pode ser observado nos próximos projetos.

PROJETO 4 CORDA SUSPENSA

Considere o problema da descrição da forma de uma corda suspensa, de comprimento ℓ, inextensível, perfeitamente flexível, de densidade ρ constante, sob a ação do campo gravitacional e presa nos pontos A e B (ver Figura 6.8).

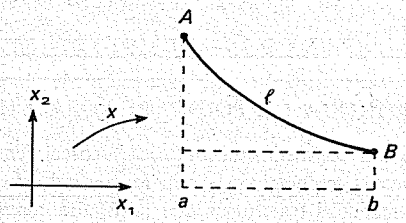


Figura 6.8 Corda suspensa

Considere todas as configurações que possam ser descritas por funções $\mathbf{x}: [0, 1] \to \mathbb{R}^2$; $\mathbf{x}(0) = A$ e $\mathbf{x}(1) = B$, continuamente diferenciáveis com $\mathbf{x}(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

A energia potencial de uma configuração é dada por

$$E(\mathbf{x}) = \int \rho x_2 \, ds$$

---

* KLINE, M. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. New York, Oxford University Press, 1972.

LYUSTERNIK, L.A. *Shortest Paths*. Elmsford, Pergamon Press, 1964 (existe uma tradução em espanhol pela Mir, Moscou).

SMOGORZHEVSKI, M. *Acerca de la Geometria de Lobatchevski*. Moscou, Mir, 1984.

Admitindo o princípio de energia mínima, a posição real da corda x_0 será um mínimo do funcional E.

Podemos identificar este problema variacional com o problema de Fermat para um meio ótico estratificado com índice de refração $n(\mathbf{x}) = \rho x_2$. Utilizando a Lei de Snell, comprove que as curvas são catenárias e podem ser descritas pelo gráfico de

$$x_2 = C_2 + C_3 \cosh\left(\frac{x_1 - C_1}{C^3}\right)$$

Obtenha as equações de Euler-Lagrange com as condições de fronteira para a curva descrita como o gráfico de uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$.

PROJETO 5 BARRAS ELÁSTICAS

Uma questão importante, tanto do ponto de vista físico quanto matemático, e que pode ser tratada pelo princípio da energia mínima, é o problema da estabilidade de barras elásticas sob a ação de forças axiais, chamado *problema de Euler*.

Considere uma barra perfeitamente elástica, presa em suas extremidades por pinos sem atrito (não há transmissão de torque pelos apoios), fixa em A e móvel em B, onde atua uma força axial de intensidade P (ver Figura 6.9).

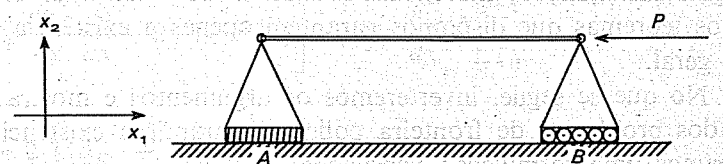


Figura 6.9

O efeito da gravidade pode ser desprezado, comparado às forças elásticas. Sabemos, por experiência, que para pequenos valores de P, o único efeito observado é um pequeno deslocamento de B na direção negativa de x_1; a barra se mantém na posição horizontal.

Entretanto, para um valor crítico P_0 da força axial, a posição horizontal torna-se instável e duas posições estáveis simétricas aparecem (ver Figura 6.10). Tal efeito é denominado *flambagem* da barra. Este tipo de problema matemático que apresenta um "salto" no número de soluções e transferência de estabilidade devido à variação de um parâmetro constitutivo é chamado de *bifurcação*. O que se observa, neste caso, é uma mudança qualitativa e brusca no quadro do sistema, pela passagem de um parâmetro regulador através de um valor crítico. Compare a semelhança deste exemplo com o da equação de Van der Pol no fenômeno de bifurcação de Hopf.

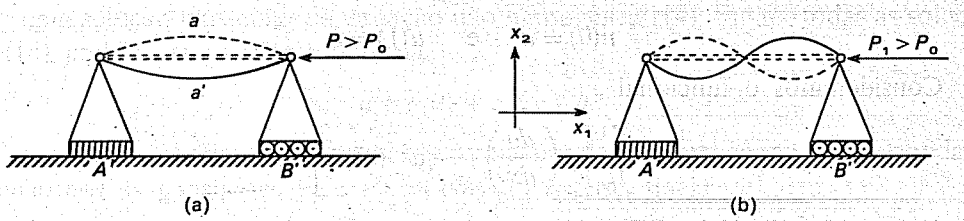


Figura 6.10

O estudo destes fenômenos tem grande importância em inúmeras aplicações, mas não pode ser tratado de forma razoável em um livro introdutório. O leitor interessado nestas questões deve consultar as obras citadas na nota de rodapé desta página*.

* REISS, E. Column Buckling — An Elementary Example of Bifurcation. In: Keller, J. B. & Antman, S. (ed.), *Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems*. New York, W. A. Benjamin, 1969, pp. 1-16.
STAKGOLD, I. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. New York, Wiley, 1979, cap. 9.

PROJETO 6 MOVIMENTO DE PARTÍCULAS

O princípio de Fermat e a Lei de Snell podem também ser utilizados no tratamento de fenômenos interessantes associados ao movimento de partículas carregadas em campos eletromagnéticos. Observe que o campo magnético introduz um fator anisotrópico no índice de refração. Este assunto está ligado à construção de microscópios eletrônicos, aceleradores de partículas e ao estudo do cinturão de radiação terrestre descoberto por J. Van Allen em 1958. Para o desenvolvimento de um projeto neste campo o leitor pode se beneficiar extraordinariamente do pequeno livro de L. A. Artsimovich e S. Yu. Lukyanov*.

6.1.2 Formulação Variacional

Com os exemplos e projetos dados, fica claro que o método de Euler-Lagrange nos leva a problemas de fronteira para equações diferenciais ordinárias. A existência de soluções para este tipo de problema não é uma questão trivial, pois exige que as soluções das equações diferenciais existam em todo um intervalo pré-fixado, enquanto que os teoremas que dispomos garantem apenas a existência de soluções locais, no caso geral.

No que se segue, inverteremos os argumentos e mostraremos que para determinados problemas de fronteira podemos garantir a existência de soluções quando utilizamos uma formulação variacional.

Trataremos apenas de equações lineares do tipo

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu=f \tag{14}$$

onde p, q e f são funções contínuas no intervalo $[0, 1]$, com $p(x)>0$ e $q(x)\leqslant 0$.

Sabemos que as soluções de (14) existem em todo intervalo $[0, 1]$ (conforme Teorema de Existência e Unicidade. Capítulo 4). A questão é obter uma solução que satisfaça as condições de fronteiras pré-fixadas

$$u(0)=a \quad \text{e} \quad u(1)=b \tag{14'}$$

Consideremos o funcional

$$J(u)=\int_0^1\left[p\left(\frac{du}{dx}\right)^2-qu^2+2fu\right]dx \tag{15}$$

Calculando a equação de Euler-Lagrange para J obtemos exatamente a Equação (14). Ou seja, se u_0 for mínimo para J então $J(u_0)=0$. (Verifique!)

Mostraremos agora que se u_0 for solução para o problema de fronteira (14) e (14'), então u_0 será um mínimo estrito global para J e, portanto, tal solução é única.

---

* ARTSIMOVICH, L. A. & Lukyanov, S. Yu. *Motion of Charged Particles in Electric and Magnetic Fields*. Moscou, Mir, 1980.

Suponha que $u = u_0 + \eta$ seja uma outra função satisfazendo (14) e (14'); então $\eta(0) = 0$ e $\eta(1) = 0$. Por outro lado

$$J(u_0+\eta) = \int_0^1 [p(u_0'+\eta')^2 - q(u_0+\eta)^2 + 2f(u_0+\eta)]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[p\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 - qu_0^2 + 2fu_0\right]dx + \tag{16}$$

$$+ \int_0^1 \left[2p\frac{du_0}{dx}\frac{d\eta}{dx} - 2qu_0\eta + 2f\eta\right]dx + \int_0^1 \left[p\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 - q\eta^2\right]dx$$

Observemos que a primeira parcela em (16) é igual a $J(u_0)$ e, portanto, se anula. Agora, como $\eta(0) = \eta(1) = 0$ e como $q \leqslant 0$ temos que o terceiro termo de $J(u_0+\eta)$ é *positivo* para toda função η não nula. (Verifique!) Finalmente, integrando por partes a segunda parcela de (16), obtemos

$$\int_0^1 \left[2p\frac{du_0}{dx}\frac{d\eta}{dx} - 2qu_0\eta + 2f\eta\right]dx = 2p\frac{du_0}{dx}\eta\Big|_{x=0}^{x=1} +$$

$$+ 2\int_0^1 \left[-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du_0}{dx}\right) - qu_0 + f\right]\eta dx = 0$$

Logo, $J(u) > J(u_0)$, para qualquer outra u satisfazendo o problema de fronteira, isto é, u_0 é *mínimo global* para J.

Mostraremos agora que sempre existe este mínimo.

Sejam u_1 e u_2 soluções linearmente independentes da equação

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = 0 \tag{17}$$

e u^* uma solução particular da equação não homogênea (14). Então, todas as soluções de (14) podem ser escritas na forma

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + u^*$$

A solução particular do problema, satisfazendo as condições (14'), é obtida ao calcularmos as constantes c_1 e c_2 através do sistema linear

$$\begin{cases} c_1u_1(0) + c_2u_2(0) = a - u^*(0) \\ c_1u_1(1) + c_2u_2(1) = b - u^*(1) \end{cases} \tag{18}$$

Mas, como já observamos, se existir uma solução ela será única. Como existe efetivamente uma solução $u(x)$ para uma escolha "a posteriori" de a e b e ela é única, então a matriz $\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}$ é necessariamente inversível. Mas isto implica que o Sistema (18) tem sempre solução (e única).

O leitor deve analisar com cuidado a argumentação anterior que apresenta dois aspectos interessantes:

1. A formulação variacional pode fornecer métodos de solução e informações sobre problemas de fronteira para equações diferenciais ordinárias.

2. A propriedade de unicidade implica na existência de uma solução!

A primeira observação é uma indicação sobre a eficiência dos chamados *métodos diretos* do cálculo variacional que fornecem uma ampla variedade de técnicas para a análise e solução numérica de problemas de fronteira para equações diferenciais ordinárias ou parciais. Consideraremos rapidamente um destes métodos: o *Método de Ritz-Rayleigh* para solução aproximada do problema do tipo (14) com as condições de fronteira (14') que, com mudanças lineares adequadas das variáveis, pode ser transformado em problema do tipo. (Verifique!)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{du}{dx}\right)+qu=f \\ u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases} \tag{19}$$

O Método de Ritz-Rayleigh transforma (19) no seguinte problema variacional: "Calcular u_0 tal que

$$J(u_0)=\min_{u\in K} J(u), \text{ onde } J(u)=\int_0^1 \left[p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - qu^2 + 2fu\right]dx$$

e $K=\{u:[0,1]\to\mathbb{R}$, continuamente diferenciável e $u(0)=u(1)=0\}$".

K é um espaço vetorial e, portanto, se considerarmos uma base infinita em K (isto é, uma família de funções $\varphi_n\in K$, linearmente independentes e tal que toda $\varphi\in K$ é um limite uniforme do tipo $\varphi=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} c_n\varphi_n$), podemos tentar obter as soluções deste problema variacional em subespaços $K_N=\left\{\varphi=\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n\right\}$ de dimensão finita. A expectativa razoável é que para $N\to\infty$, estas soluções se aproximem de u_0.

Para calcularmos a solução u_0^N de $\min_{\varphi\in K_N} J(\varphi)$, basta resolver o sistema

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J\left(\sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k\right)=0,\ k=1,2,\ldots,N \tag{20}$$

O Sistema (20) é linear em $\{c_k\}_{1\le k\le N}$ e sua solução se constitui essencialmente em um problema algébrico.

Observe que $J(u_0)\leqslant J(u_0^N)\leqslant J(u_0^{N-1})$.

Como exemplos de $\{\varphi_n\}$ podemos utilizar funções polinomiais do tipo $\varphi_n(x)=(1-x)x^n$, $n\geqslant 1$, ou funções trigonométricas $\varphi_n=\operatorname{sen} k\pi x$, $k\geqslant 1$, que formam bases

adequadas*. O leitor poderá utilizar as referências** indicadas a seguir para um tratamento mais aprofundado dos vários ramos da análise variacional.

EXERCÍCIOS

1. Obtenha a aproximação de Ritz-Rayleigh para o problema de fronteira da equação de Bessel

$$\begin{cases} x^2u'' + xu' + (x^2 - 1)u = 0 \\ u(1) = 1 \\ u(2) = 2 \end{cases}$$

em $K_1 = \{\varphi(x) = c_1x(1-x) + c_2x^2(1-x);\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

---

* COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1969, 2v.

**1. FEYNMAN, R. *The Character of the Physical Law*. Cambridge, MIT Press, 1967.
2. LYUSTERNIK, L.A. *Shortest Paths*. Elmsford, Pergamon Press, 1964 (existe uma tradução em espanhol pela Mir, Moscou).
3. TARASOV, L. V. & Tarasova, A. N. *Discussions on Refraction of Light*. Moscou, Mir, 1984.

As referências **1**, **2**, **3** são elementares (pré-cálculo), extremamente interessantes e substanciais no que diz respeito à apresentação dos conceitos fundamentais. Consulte também o excelente *Lectures on Physics*, de R. Feynman, New York, Addison-Wesley, v. 3.

4. LUNEBURG, R. *The Mathematical Theory of Optics*. Berkeley, The University of California Press, 1965.
5. LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. Toronto, Toronto University Press, 1949.

As referências **4** e **5** são trabalhos clássicos destinados especificamente à teoria hamiltoniana, a partir dos pontos de vista da Ótica e da Mecânica, respectivamente, e a conexão entre elas.

6. PERCIVAL, I. & Richards, D. *Introduction to Dynamics*. New York, Cambridge University Press, 1982.
7. GANTMACHER, F. *Lectures on Analytical Mechanics*. Moscou, Mir, 1970.
8. ARNOLD, V. I. *Metodi Matematici Della Meccanica Classica*. Moscou, Mir, 1979.

A referência **7** é clássica para o estudo de Mecânica Analítica, de um ponto de vista mais matemático. As referências **6** e **8** são textos matemáticos contemporâneos, a **6** mais elementar e a **8** mais sofisticada, escrita com maestria por um dos construtores da moderna teoria hamiltoniana.

9. COURANT, R. & Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York, Wiley, 1953, v. 1.
10. GELFAND, I. & Fomin, S. *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1963.

As referências **9** e **10** são excelentes clássicos para o estudo do cálculo de variações em nível avançado. Para uma introdução, consulte o Capítulo 7 de Courant, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2 v.

11. LUENBERGER, D. *An Introduction to Dynamic Systems*. New York, Wiley, 1979.
12. BELLMAN, R. *Mathematical Theory of Control Processes*. Academic Press, New York, 1972.

A referência **11** trata de forma interessante e introdutória da teoria do controle e da otimização que é uma área de grande importância pelas suas múltiplas aplicações tecnológicas e uma extensão do cálculo variacional.

2. Faça a mesma análise para os seguintes problemas:
   a. $(xu')' + u = x$ com $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, no espaço
   $K_2 = \{\varphi(x) = x + c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x);\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.
   b. $u'' + (1+x^2)u + 1 = 0$; $u(-1) = u(1) = 0$, no espaço
   $K_3 = \{\varphi(x) = c_1(1-x^2) + c_2(1-x^4) + c_3(1-x^6);\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$.
   c. $u'' + u + x = 0$; $u(0) = u(1) = 0$ em K_3.
   Compare com a solução exata.

6.2 MODELOS DISCRETOS: BIOMATEMÁTICA

Na constante busca do aperfeiçoamento de uma teoria e conceitos, a Matemática com suas generalizações pode tornar-se fria e insossa. Entre os estudantes desta ciência, muitas vezes ouvimos dizer, fazendo uma analogia com o ε da definição de limite, que "qualquer assunto de matemática pode ser tão complicado quanto se queira". Embora quase sempre os estudantes tenham razão, o inverso do ditado pode também ser verdadeiro. Modelos que utilizam equações diferenciais são acessíveis somente para aqueles que já tenham cursado Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Numérico, mas podem ser facilmente entendidos e analisados depois de um primeiro curso de Álgebra Elementar e Programação Numérica, se usarmos as equações de diferenças ou fórmulas de recorrência.

Este parágrafo é dedicado àqueles que preferem procedimentos mais simples e, embora esteja estrategicamente colocado no final deste capítulo, poderia muito bem estar no início.

O leitor que teve paciência suficiente para chegar até esta parte, provavelmente deve ter se motivado com os modelos em Ecologia e Epidemiologia. Estes mesmos modelos serão agora analisados com um instrumental menos sofisticado, podendo até mesmo ser usados como motivação ao estudo da própria matemática nos cursos elementares.

Não vamos aqui recorrer à teoria das equações de diferenças, mas simplesmente ao significado de uma relação de recorrência como

$$x_n = ax_{n-1} + b \tag{1}$$

que permite obter facilmente $x_1, x_2, \ldots$ desde que sejam dados os valores das constantes a e b e do ponto inicial x_0 (ver Secções 2.10 e 3.5).

Da mesma forma, um sistema de relações de recorrências

$$\begin{cases} x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 y_{n-1} + a_3 z_{n-1} + a_4 \\ y_n = b_1 x_{n-1} + b_2 y_{n-1} + b_3 z_{n-1} + b_4 \\ z_n = c_1 x_{n-1} + c_2 y_{n-1} + c_3 z_{n-1} + c_4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{X}_n = A\mathbf{X}_{n-1} + B \tag{2}$$

pode nos fornecer valores $(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{X}_1$, $(x_2, y_2, z_2) = \mathbf{X}_2$, ... desde que saibamos os valores das constantes $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ e a "condição inicial" $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{X}_0$.

Veremos agora como é possível utilizar estas ferramentas simples para tratar alguns modelos já analisados via equações diferenciais.

6.2.1 Crescimento de uma População

6.2.1.1 *Modelo de Malthus (os Nascimentos e Mortes em um Intervalo de Tempo Unitário são Proporcionais ao Tamanho da População no Início deste Intervalo)*

Se $P(t)$ é a população no instante t, podemos escrever

$$P(t+1) - P(t) = nP(t) - mP(t) \tag{3}$$

onde n é o coeficiente de natalidade e m o coeficiente de mortalidade.

A Equação (3) diz que a variação da população em um intervalo unitário de tempo é igual à quantidade de nascimentos menos a quantidade de mortes!

Podemos escrever (3) na forma de recorrência

$$P(t+1) = [1 + (n-m)]\, P(t) = (1+a)\, P(t) \tag{4}$$

Assim, dados n, m e $P(0)$ podemos encontrar $P(1) = (1+a)\ P(0)$, $P(2) = (1+a)^2\ P(0)$, $P(3) = (1+a)^3\ P(0)$, ..., $P(t) = (1+a)^t\ P(0)$. Por outro lado, se tivermos os valores de $P(t)$ e $P(t+1)$, podemos determinar o valor de a que é a taxa de crescimento de uma população.

Neste caso, podemos notar a correspondência entre o modelo contínuo (equação diferencial)

$$\frac{dP}{dt} = bP(t), \text{ com solução } P(t) = P(0)\, e^{bt}$$

e o modelo discreto (equação de diferenças)

$$P(t+1) - P(t) = aP(t), \text{ com solução } P(t) = P(0)\,(1+a)^t$$

As soluções são idênticas, se $e^b = 1 + a$.

6.2.1.2 *Modelo de Verhulst (População Inibida)*

Quando os recursos são limitados, o crescimento da população em um intervalo de tempo unitário é reduzido de uma quantidade proporcional ao quadrado da população existente no início do intervalo. De fato, se existe uma competição entre elementos de uma mesma espécie, o termo de inibição do crescimento populacional é proporcional ao produto destes elementos.

Na forma de recorrência, tal modelo é dado por

$$P(t+1) - P(t) = aP(t) - bP^2(t) = P(t)\,(a - bP(t)) \tag{5}$$

O ponto crítico ou de equilíbrio de (5) é obtido quando $P(t+1) = P(t)$ ou seja, quando $P(t) = \frac{a}{b}$.

A Equação (5) pode também ser dada na forma

$$P(t+1) = (1+a)\, P(t) \left[1 - \frac{b}{1+a} P(t)\right] \tag{6}$$

Tomando $1 + a = \alpha$ e $\beta P(t+1) = bP(t)$ (quando $t \to \infty$, $\beta = b$), a Equação (6) pode ser escrita por

$$P(t+1) = \alpha P(t)\left[1 - \frac{\beta}{\alpha} P(t+1)\right] \tag{7}$$

ou

$$P(t+1) = \frac{\alpha P(t)}{1 + \beta P(t)}$$

cujas curvas-soluções são semelhantes às obtidas da Equação (5).

O ponto crítico de (7), obtido quando $P(t+1) = P(t)$, é dado por

$$1 = \frac{\alpha}{1 + \beta P(t)} \quad \text{ou} \quad P(t) = \frac{\alpha - 1}{\beta} = \frac{a}{b}$$

A solução da equação de Verhulst (caso contínuo) $\frac{dp}{dt} = aP - bP^2$ é dada por

$$P(t) = \frac{aP(0)}{bP(0) + (a - P(0))e^{-bt}}$$

semelhante à obtida por recorrência de (7).

6.2.1.3 *Modelo Geral para Populações Inibidas (Ciclo Limite)*

Para estudar o comportamento de populações inibidas em geral podemos usar a equação

$$P_{t+1} = F(P_t) \tag{8}$$

fazendo algumas restrições naturais à função F e à população P:

(*i*) $P_t \geqslant 0$ (simplesmente por razões biológicas);
(*ii*) $F(P) \geqslant 0$ para todo P possível e $F(0) = 0$;
(*iii*) se P é pequeno a população cresce, isto é, na vizinhança de zero $F(P)$ é crescente;
(*iv*) recursos limitados (população inibida) impõem que $F(P) \to 0$ quando $P \to \infty$. Assim, F pode ser visualizada, da forma ilustrada pela Figura 6.11.

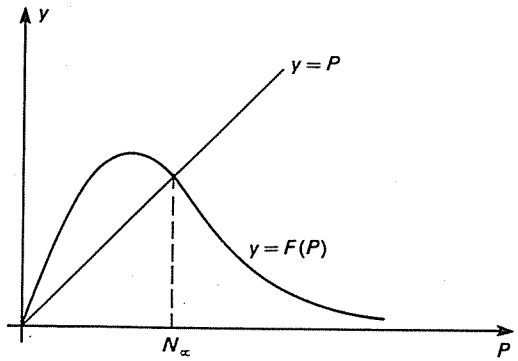


Figura 6.11

O ponto de equilíbrio P_∞ pode ser encontrado ao fazermos a intersecção da reta $y = P$ e $y = F(P)$. Isto significa que $P_t \equiv \text{constante} = P_\infty$ e, portanto, deve satisfazer $P_\infty = F(P_\infty)$.

Usando o *diagrama de Lamerey* podemos encontrar facilmente (quando existe) o ponto de equilíbrio (ver Figura 6.12).

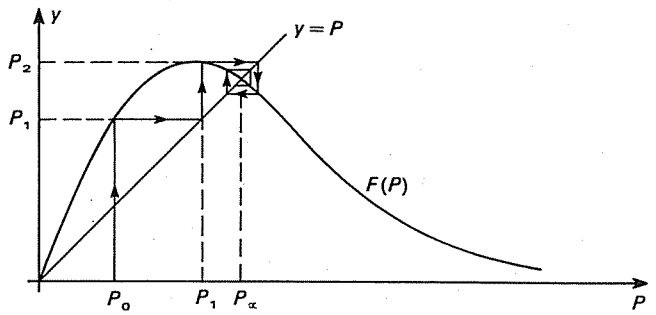


Figura 6.12 Diagrama de Lamerey

A solução $\{P_t\}$ da Equação (8) pode ser constituída de um número finito de valores, isto é, $P_t^* = P_{t+T}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ e $P_{t+j}^* \neq P_t^*$ para $j = 1, 2, \ldots, T-1$. Tal solução é chamada *ciclo limite* (ou ciclo de período T) (ver Figuras 6.13 e 6.14).

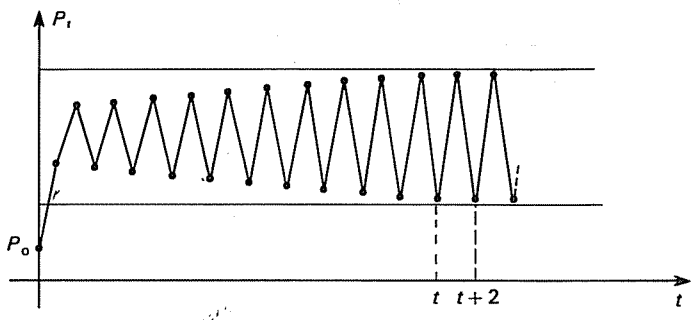


Figura 6.13 $P_t = P_{t+2} = P_{t+4} = \ldots (\geq 18)$

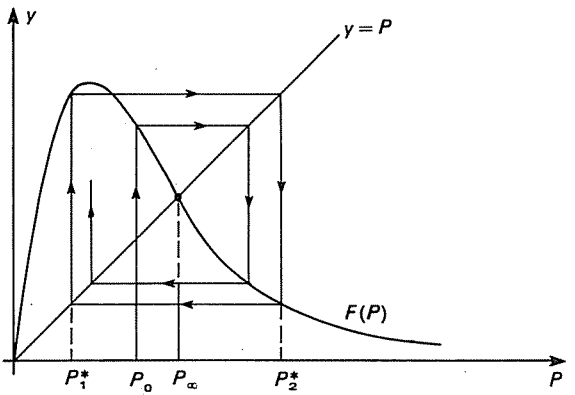


Figura 6.14 Ciclo limite: $T = 2$ $(P_2^* = F(P_1^*),\ F(P_2^*) = P_1^*)$

6.2.2 Presa-Predador (Caso Discreto)

Na ausência de predadores, o crescimento das presas é proporcional ao tamanho de sua população. Ao interagirem com os predadores seu crescimento é inibido (supomos que o decréscimo seja proporcional ao produto das duas populações).

Por outro lado, na ausência das presas, a população dos predadores decresce a uma taxa proporcional ao tamanho de sua população. Já com a interação entre as presas há um acréscimo proporcional ao produto das populações das duas espécies. Estas considerações nos dão:

$$\begin{cases} x(t+1) - x(t) = a_1\, x(t) - b_1\, x(t)\, y(t) \\ y(t+1) - y(t) = -a_2\, y(t) + b_2\, x(t)\, y(t) \end{cases} \tag{9}$$

onde $x(t)$ é a população das presas e $y(t)$ é a população dos predadores.

Dados a_1, a_2, b_1, b_2 e os valores iniciais $x(0)$ e $y(0)$, podemos calcular passo a passo as populações em cada valor de t, onde t é tomado como um múltiplo do intervalo de tempo unitário. Vejamos um exemplo.

EXEMPLO 1

Sejam $x(0) = 30$, $y(0) = 5$, $a_1 = 0{,}01$, $a_2 = 0{,}025$, $b_1 = 0{,}003$ e $b_2 = 0{,}001$. Então, a primeira interação nos fornece

$$x(1) = 30 + 0{,}01 \cdot 30 - 0{,}003 \cdot 30 \cdot 5 = 29{,}85$$
$$y(1) = 5 - 0{,}025 \cdot 5 + 0{,}001 \cdot 30 \cdot 5 = 5{,}025$$

Analogamente, calculamos $x(2)$ e $y(2)$ e assim sucessivamente

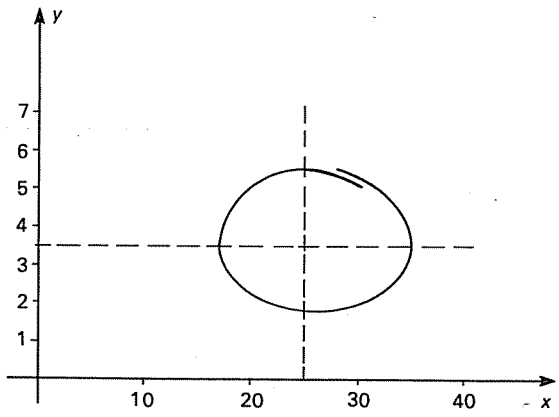


Figura 6.15 Ciclo ecológico "discreto"

O ponto de equilíbrio é dado quando $x(t+1) = x(t)$ e $y(t+1) = y(t)$, ou seja, quando $x(t) = x_e = \frac{a_2}{b_2} = 25$ e $y(t) = y_e = \frac{a_1}{b_1} = 3{,}33$ (ver Figura 6.15).

Note que no caso discreto a solução no plano de fase não é uma curva fechada. Explique o porquê!

6.2.3 Competição entre Espécies

6.2.3.1 *Competição entre Duas Espécies*

Neste caso, a população de cada espécie cresce na ausência da outra espécie e diminui quando interagem, numa taxa proporcional ao produto das populações

$$\begin{cases} x(t+1) - x(t) = a_1\, x(t) - b_1\, x(t)\, y(t) \\ y(t+1) - y(t) = a_2\, y(t) - b_2\, x(t)\, y(t) \end{cases} \tag{10}$$

O ponto de equilíbrio é dado por

$$x_e = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{e} \quad y_e = \frac{a_1}{b_1}$$

Neste caso, a sobrevivência de cada espécie depende essencialmente dos valores de suas populações iniciais.

6.2.3.2 *Competição entre Três Espécies*

Cada espécie sofre de maneira diferente quando se dá a interação em cada uma das duas outras restantes

$$\begin{cases} x(t+1) - x(t) = a_1 x(t) - b_1 x(t) y(t) - c_1 x(t) z(t) \\ y(t+1) - y(t) = a_2 y(t) - b_2 y(t) x(t) - c_2 y(t) z(t) \\ z(t+1) - z(t) = a_3 z(t) - b_3 z(t) x(t) - c_3 z(t) y(t) \end{cases} \tag{11}$$

Obtemos o ponto de equilíbrio ao resolvermos o sistema algébrico

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 y - c_1 z &= 0 \\ a_2 - b_2 x - c_2 z &= 0 \\ a_3 - b_3 x - c_3 y &= 0 \end{aligned}$$

ou seja

$$x_e = \frac{c_2(b_1 a_3 - c_3 a_1) + c_1 a_2 c_3}{b_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 c_3}$$

$$y_e = \frac{c_1(b_2 a_3 - b_3 a_2) + a_1 c_2 b_3}{b_1 c_2 b_3 + c_1 b_2 c_3}$$

$$z_e = \frac{b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_1 b_2 c_3}{b_1 c_2 b_3 + c_1 b_2 c_3}$$

6.2.4 Epidemia (Modelo Discreto)

6.2.4.1 *Sem Renovação*

Se $x(t)$ denota o número de elementos suscetíveis e $y(t)$ o número de elementos transmissores em uma população fechada, x decresce a uma taxa α quando em contacto com y que cresce na mesma taxa

$$\begin{cases} x(t+1) - x(t) = -\alpha x(t)\, y(t) \\ y(t+1) - y(t) = \alpha x(t)\, y(t) \end{cases} \tag{12}$$

Se $x(0) = N - M$ e $y(0) = M$ (N é a população total).
Temos $x(t+1) + y(t+1) = x(t) + y(t) = x(t-1) + y(t+1) = \ldots = x(0) + y(0) = N$.
Usando este resultado na primeira equação do Sistema (12), obtemos

$$x(t+1) - x(t) = -\alpha x(t)\,(N - x(t))$$

ou

$$x(t+1) = x(t)\,[1 - \alpha N] + \alpha x^2(t) \tag{13}$$

6.2.4.2 *Modelo SIS*

Neste caso o indivíduo, quando sara, pode ter uma recaída. O modelo discreto é dado por

$$\begin{cases} x(t+1) - x(t) = -\alpha x(t) y(t) + \beta y(t) \\ y(t+1) - y(t) = \alpha x(t) y(t) - \beta y(t) \end{cases} \tag{14}$$

onde $x(t)$ denota o número de elementos suscetíveis e $y(t)$ os transmissores, em cada instante (discreto) t, de uma população fechada. Temos que $x(t) + y(t) = N$ para todo t, onde N é o tamanho da população. Desta forma, podemos considerar $x(0) = N - M$ e $y_0 = M$, M é o número de transmissores no instante inicial $t = 0$.

Tomando $y(t) = x(t) - N$ na primeira equação do Sistema (14) obtemos

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) - \alpha x(t)\,[N - x(t)] + \beta[N - x(t)] = \\ &= \alpha x^2(t) + x(t)\,[1 - \alpha N - \beta] + \beta N \end{aligned}$$

que é uma fórmula de recorrência para obtermos $x(t+1)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$.

EXERCÍCIOS

1. Faça o gráfico da solução do sistema discreto (10) usando $a_1 = 0{,}2$, $b_1 = 0{,}001$, $a_2 = 0{,}3$ e $b^2 = 0{,}0001$ e tomando
   a. $x(0) = 100$, $y(0) = 20$;
   b. $x(0) = 50$, $y(0) = 50$.
   Faça também os gráficos no plano de fase.

2. Para o modelo de competição entre três espécies, Equação (11), use os valores:

   $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = 0{,}02$, $a_3 = 0{,}1$; $b_1 = 0{,}01$, $b_2 = 0{,}01$, $b_3 = 0{,}03$; $c_1 = c_2 = c_3 = 0{,}001$; $x(0) = 5$, $y(0) = 10$ e $z(0) = 15$, e

   a. trace os gráficos de $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$;
   b. mude os parâmetros e construa outros gráficos;
   c. faça os gráficos relacionando as variáveis x, y e z duas a duas;
   d. comente a validade do modelo estabelecido pela Equação (11).

3. No *Modelo Discreto de Epidemia* (Sistema (12)), use os parâmetros $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}02$ e $\alpha = 0{,}003$ com $N = 1.000$ e $M = 5$ e resolva o sistema (numericamente). Faça os gráficos das soluções e compare-os com os do modelo contínuo.

4. Resolva o Sistema (14) do *Modelo de Epidemia SIS* usando $N = 1.000$, $M = 5$, $\alpha = 0{,}1$ e $\beta = 0{,}02$ e faça um gráfico da solução.
5. Analise o *Modelo Estratégia de Armamentos* da Secção 5.3 para o caso discreto.
6. Encontre a solução geral do sistema de equações de diferenças lineares homogêneo

$$\begin{cases} x(t+1) - x(t) = ax(t) + by(t) \\ y(t+1) - y(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

com $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.
Faça uma analogia com o sistema de equações diferenciais lineares homogêneo.

6.3 MÉTODOS RECURSIVOS — TEOREMAS DE EXISTÊNCIA

6.3.1 Introdução

As equações de diferenças finitas não lineares podem surgir, como já vimos, da discretização de equações diferenciais ordinárias. Neste caso, a execução dos processos iterativos ou recursivos nas equações de diferenças finitas nos fornece o retrato aproximado de uma determinada solução da equação diferencial correspondente. Quando tais processos são utilizados em análise matemática na construção de soluções de equações de diversos tipos, o objetivo é obter a solução exata destas equações. Por exemplo, se a equação é numérica, a seqüência de números produzidos recursivamente deve convergir para a solução. Se a equação é funcional, a seqüência de funções deve convergir, por algum critério pré-estabelecido, para a solução exata.

Eventualmente, como vimos na Secção 6.2, as equações recursivas podem ser o próprio modelo matemático do fenômeno a ser estudado e não uma "aproximação" discreta. Nesta secção estudaremos os processos recursivos como métodos de resolução de equações.

Iniciaremos pelas equações numéricas mais simples e mostraremos em seguida como os mesmos argumentos, modificados apenas conceitualmente, podem ser utilizados para a construção de soluções de equações funcionais, e em particular equações diferenciais.

Consideremos o problema elementar da resolução da equação quadrática $x^2 + x + c = 0$, cuja solução explícita $\mathbf{x}_{\pm}(c) = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ será utilizada para que possamos acompanhar os argumentos gerais.

Para cada valor de c dispomos de dois valores para $x(c)$, isto é, as raízes da equação definem duas funções $x_+(c)$ e $x_-(c)$ que serão denominadas *ramos da solução*.

Tal como em vários problemas, as raízes da equação podem ser calculadas mais facilmente para determinados valores do parâmetro c; neste caso, por exemplo, para $c = 0$, temos $x_+(0) = 0$ e $x_-(0) = -1$ (ver Figura 6.16).

A questão que se propõe nestas situações é como estender, ainda que aproximadamente, os ramos das soluções a partir de $c = 0$, isto é, para valores de c numa vizinhança da origem, onde o cálculo explícito destes ramos não é tão simples.

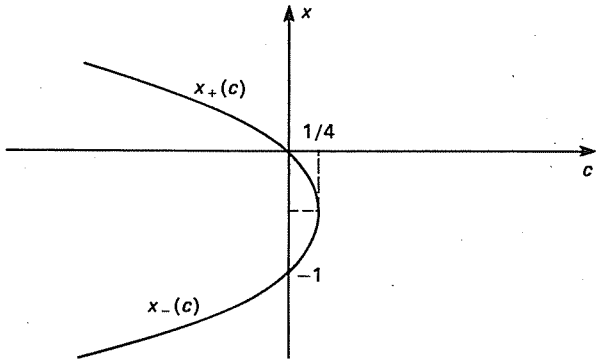


Figura 6.16

Nosso objetivo é, então, desenvolver um método para analisar e construir iterativamente os ramos da solução $x(c)$ da equação $f(x, c) = 0$ que passa por $x = x_0$ quando $c = c_0$, isto é, $f(x_0, c_0) = 0$.

Por simplicidade de notação tomemos $x_0 = 0$ e $c_0 = 0$.

Se existir realmente um ramo $x(c)$ contínuo, podemos tomar sua primeira aproximação $x_1(c)$ como sendo a solução do problema linearizado, isto é, aproveitando apenas a parte linear da equação de Taylor em x.

$$0 = f(x(c), c) = f(0, c) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, c)x(c) + R(x(c))$$

de onde, lembrando que $R(x) = o(x)$, temos

$$x(c) \cong -\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, c)\right]^{-1} f(0, c) = x_1(c), \quad (c \cong 0)$$

Supondo que $x(c) \cong x_1(c)$, podemos repetir o argumento e obter uma segunda aproximação

$$x_2(c) = x_1(c) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_1(c), c)\right]^{-1} f(x_1(c), c)$$

e assim por diante.

Desta forma obtemos um processo iterativo

$$x_{N+1} = \phi(x_N, c), \quad x_0 = 0$$

onde cada x_N é uma função de c (ver Figura 6.17).

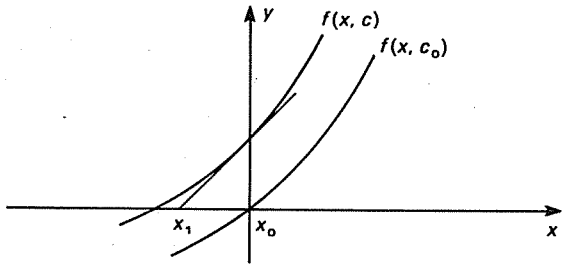


Figura 6.17

O processo proposto nada mais é do que o já bem conhecido método de Newton.

A solução $x(c)$ do problema será um *ponto fixo* de ϕ, $\phi(x, c) = x$, e portanto satisfazendo $f(x, c) = 0$. Esperamos, sob condições razoáveis, que $x(c) = \lim_{N \to \infty} x_N(c)$.

Assim, o problema de determinar as raízes de $f(x, c)$ é transformado pelo método de Newton em um processo iterativo $x_{N+1} = \phi(x_N, c)$ cuja solução é necessariamente um ponto fixo de ϕ.

O fundamento desta idéia é simples e já foi utilizado nos diagramas de Lamerey (ver Figuras 6.12 e 6.14). O método gráfico para obtenção do ponto fixo para uma função real $\phi(x)$, isto é, a intersecção de $y = \phi(x)$ com $y = x$, deixa claro que quanto mais próxima a inclinação do gráfico de $\phi(x)$ está da horizontal ($\phi'(x) \cong 0$), mais rápida se dá a convergência e, neste caso, o ponto fixo é denominado *atrator*. Por outro lado, a convergência se torna impossível se a inclinação deste gráfico na vizinhança da solução for maior em valor absoluto do que a reta $y = x$, ou seja, quando $|\phi'(x)| > 1$. Neste caso, dizemos que o ponto fixo é *repulsor* da iteração $x_{N+1} = \phi(x_N)$.

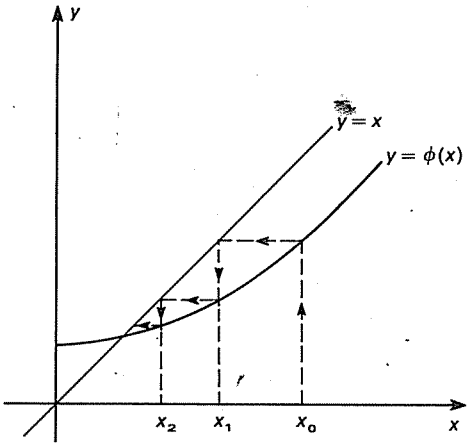


Figura 6.18 Atrator

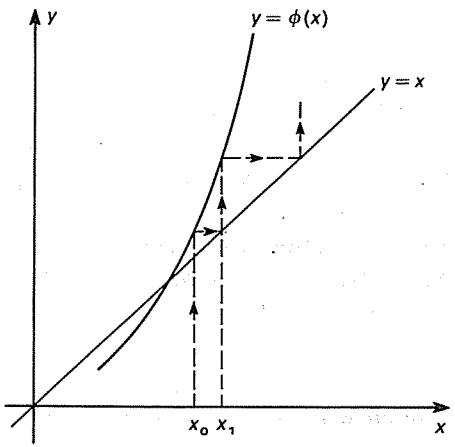


Figura 6.19 Repulsor

É interessante observar a região da atração de um ponto fixo. Faça uma análise dos pontos fixos de $\phi(x, \lambda) = 0$ para $\phi(x, \lambda) = -x^2 + 2x - \lambda$, com $\lambda \cong 1/4$.

Os mesmos argumentos podem ser utilizados quando $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ e $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável. Todavia, neste caso, é necessário calcular a inversa de uma matriz $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_N(c)\ c)$ em cada etapa N e isto não é trivial, do ponto de vista prático. Entretanto, da convergência de $\mathbf{x}_N(c) \to x(c)$ e da continuidade de $\mathbf{x}(c)$, esperamos que os $\mathbf{x}_N(c)$ estejam próximos de 0 e, portanto, é razoável substituir a matriz inicial por $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, 0)$ e o processo iterativo é utilizado com a função

$$\phi(\mathbf{x}, c) = \mathbf{x} - \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, 0)\right]^{-1} f(\mathbf{x}, c)$$

que é o método de Newton modificado. (Interprete graficamente esta versão!)

O problema do cálculo de raízes de $f(\mathbf{x}, c) = 0$ nas vizinhanças de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ pode ser modificado de diversas maneiras. Por exemplo, se $A(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ for inversível em uma vizinhança de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, então é equivalente considerar a equação

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{c}) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

que por sua vez é equivalente à equação do ponto fixo

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{c}) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}) + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

O método de Newton generalizado toma $A(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ de tal forma que seja possível garantir a existência de solução pelo método iterativo.

Sugerimos ao leitor que faça uma revisão da interpretação gráfica dos métodos iterativos para resolução de equações numéricas e dos conceitos de convergência para séries numéricas e funcionais*.

6.3.2 Teorema de Banach

Analisaremos neste parágrafo um teorema sobre a existência de pontos fixos para uma determinada classe de funções ϕ, chamadas *contrações*. O teorema, que sintetiza uma das idéias mais importantes da análise, será demonstrado para funções reais, mas o leitor poderá verificar sua validade sem muito esforço, no caso de funções de muitas variáveis, bastando tomar a mesma notação interpretada adequadamente.

Os mesmos argumentos podem ser generalizados para equações funcionais e o nosso objetivo final será tratar dos procedimentos envolvidos na obtenção de soluções para equações diferenciais ordinárias por este método.

Teorema Suponhamos que $\phi(x, \lambda)$ seja uma função contínua em (x, λ), definida numa vizinhança U de x_0 e V de λ_0, e que seja uma *contração* em x, uniforme relativamente a λ, isto é

$$|\phi(x, \lambda) - \phi(y, \lambda)| \leqslant k |x - y|, \; x, y \in U \text{ e } \lambda \in V$$

onde $0 \leqslant k < 1$ independente de x, y e λ.

Então:

1. Se x^0 é solução de $x = \phi(x, \lambda^0)$, isto é, x^0 é um ponto fixo de ϕ para $\lambda = \lambda^0$, temos:

a. a iteração $x_{N+1}(\lambda) = \phi(x_N, \lambda)$ com $x_0 = x^0$ é realizável para λ em uma vizinhança restrita V_1 de λ^0;

b. para cada $\lambda \in V_1$, $x_N(\lambda)$ converge para um único ponto fixo $x(\lambda)$ de ϕ;

c. $x(\lambda)$ é uma função contínua;

---

* COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Globo, Porto Alegre, 1965, 2 v.
ISAACSON, E. & Keller, H. B. *Analysis of Numerical Methods*. New York, Wiley, 1966.
VILENKIN, N. Ya. *Method of Successive Approximations*. Moscou, Mir, 1979.

d. se ϕ tem derivadas contínuas de ordem $N \geqslant 1$ em x e λ, então o mesmo acontecerá com $x(\lambda)$ e

$$\frac{dx}{d\lambda} = \left(1 - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$$

2. Basta que x^0 seja um "ponto quase fixo", no sentido de que $|\phi(x^0, \lambda^0) - x^0| < (1-k)r$ (r é o raio de uma vizinhança de x^0 em que ϕ está definida) para que (*a*), (*b*), (*c*) e (*d*) sejam verificados.

Observação:

A primeira parte do teorema garante que uma solução particular x^0 da equação $x = \phi(x, \lambda)$ para $\lambda = \lambda^0$, possa ser estendida e de forma única para $\lambda \sim \lambda^0$.

A segunda parte garante que basta a constatação de uma "quase" solução do problema para que possamos construir uma família $x(\lambda)$ de soluções nas proximidades de (x^0, λ^0).

Demonstração do Teorema:

1.ª *Parte*

a. A preocupação com a possibilidade de construirmos a iteração é legítima, pois $x_1 = \phi(x^0, \lambda)$ poderia não estar no domínio de definição de ϕ, o que tornaria impossível o cálculo de x_2! Entretanto, observe que

$$|\phi(x, \lambda) - x^0| = |\phi(x, \lambda) - \phi(x^0, \lambda^0)| \leqslant |\phi(x, \lambda) - \phi(x, \lambda^0)| +$$
$$+ |\phi(x, \lambda^0) - \phi(x^0, \lambda^0)| \leqslant |\phi(x, \lambda) - \phi(x, \lambda^0)| + k|x - x^0|$$

Tomemos agora uma vizinhança de x^0, $\bar{U}_r(x^0) = \{x : |x - x^0| \leqslant r\}$ de tal forma que $x \in \bar{U}_r(x^0)$ e $\lambda \cong \lambda^0$ pertencem ao domínio de definição de $\phi(x, \lambda)$. Restringindo λ a uma vizinhança V de λ^0 suficientemente pequena, podemos garantir (pela continuidade de $\phi(x, \lambda)$) que

$$|\phi(x, \lambda) - \phi(x, \lambda^0)| < (1-k)r$$

para todo $x \in \bar{U}_r(x_0)$ e, portanto

$$|\phi(x, \lambda) - x^0| < (1-k)r + k|x - x^0| < r$$

ou seja, ϕ é uma função de $U_r(x_0)$ em $U_r(x_0)$ para $\lambda \in V$ e a iteração é realizável.

b. Observe que a seqüência $x_{N+1} = \phi(x_N, \lambda)$, $x_0 = x^0$ satisfaz

$$|x_{N+1} - x_N| = |\phi(x_N, \lambda) - \phi(x_{N-1}, \lambda)| \leqslant k|x_N - x_{N-1}| \leqslant \ldots \leqslant k^N |x_1 - x_0|$$

e, portanto, pelo teste de comparação, a série

$$x_N = x_0 + \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1})$$

converge uniformemente com relação a $\lambda \in V$.

Se $x(\lambda) = \lim_{N\to\infty} x_N(\lambda)$, como $x_{N+1} = \phi(x_N, \lambda)$, então

$$x(\lambda) = \phi(x(\lambda), \lambda)$$

Suponhamos agora que $\bar{x}$ seja um outro ponto fixo de ϕ para λ, então

$$| x(\lambda) - \bar{x}(\lambda) | = | \phi(x(\lambda), \lambda) - \phi(\bar{x}(\lambda), \lambda) | \leqslant k | x(\lambda) - \bar{x}(\lambda) |$$

e como $k < 1$ segue que $x(\lambda) = \bar{x}(\lambda)$.

c. Como $x(\lambda)$ é o único ponto fixo de $\phi(x, \lambda)$ e a seqüência de funções contínuas $x_N(\lambda)$ converge uniformemente, concluímos que $x(\lambda)$ é contínua.

d. Se ϕ é continuamente diferenciável em x e λ, escrevemos

$$x_1 = \phi(x_1, \lambda_1) \qquad x_2 = \phi(x_2, \lambda_2)$$

$$x(\lambda_1) - x(\lambda_2) = \phi(x_1, \lambda_1) - \phi(x_2, \lambda_2) =$$

$$= \phi(x_1, \lambda_1) - \phi(x_2, \lambda_2) + \phi(x_2, \lambda_1) - \phi(x_1, \lambda_2) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_2 + \tau(x_1 - x_2), \lambda_2)\, d\tau\, (x_1 - x_2) +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(x_2, \lambda_2 + s(\lambda_1 - \lambda_2))\, ds\, (\lambda_1 - \lambda_2)$$

Logo

$$\left[1 - \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_2 + \tau(x_1 - x_2), \lambda_2)\, d\tau\right] \frac{x(\lambda_1) - x(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}[x_2, \lambda_2 + s(\lambda_1 - \lambda_2)]\, ds$$

Tomando $\lambda_1 \to \lambda_2$ e lembrando que $\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right| \leqslant k < 1$ (Verifique!), temos

$$\frac{dx}{d\lambda} = \left(1 - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$$

Se ϕ tem derivadas de ordem superior, basta derivarmos a igualdade acima para concluir indutivamente sobre a diferenciabilidade de $x(\lambda)$.

2.ª *Parte*

Para demonstrar a 2.ª parte basta verificarmos que a iteração pode ser realizada a partir de um ponto "quase" fixo; os outros argumentos são análogos.

Observemos inicialmente que, pela continuidade de $\phi(x, \lambda)$ podemos obter uma vizinhança de λ^0 onde

$$| \phi(x^0, \lambda) - x^0 | < (1 - k)r$$

Isto garante que $x_1(\lambda)=\phi(x^0,\lambda)$ pertence a $U_r(x_0)$. Podemos assim calcular $x_2(\lambda)=\phi(x_1,\lambda)$ e

$$|x_2-x^0|\leqslant|x_2-x_1|+|x_1-x^0|\leqslant k|x_1-x^0|+$$
$$+|x_1-x^0|\leqslant(1+k)(1-k)r=(1-k^2)r<r$$

e, portanto, $x_2(\lambda)\in U_r$.

Deixamos ao leitor verificar que se $x_N\in U_r$, então

$$|x_{N+1}-x^0|=|\phi(x_N,\lambda)-x^0|\leqslant(1+\ldots+k^N)|x_1-x^0|<\left(\sum_{j=0}^{\infty}k^j\right)|x_1-x^0|=$$

$$=\frac{1}{1-k}|x_1-x^0|<r$$

e, portanto, a iteração é possível.

Por esta estimativa fica clara a razão pela qual $\phi(x^0,\lambda^0)$ deva estar numa vizinhança de raio $(1-k)r$ de x^0! ■

Mostremos agora como os argumentos deste teorema podem ser aplicados para a resolução de equações numéricas e funcionais.

Consideremos inicialmente a equação $f(x,\lambda)=0$ em uma vizinhança de (x^0,λ^0), onde $f(x^0,\lambda^0)=0$ e onde $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\lambda)$ é contínua.

A transformação desta equação em um problema de ponto fixo poderá ser feita na forma

$$\phi(x,\lambda)=Af(x,\lambda)+x=x$$

pela escolha de A inversível e de modo a tornar $\phi(x,\lambda)$ uma contração uniforme em x nas vizinhanças de (x^0,λ^0).

Para que isto seja conseguido analisemos o termo $|\phi(x,\lambda)-\phi(y,\lambda)|$ via Teorema Fundamental do Cálculo

$$|\phi(x,\lambda)-\phi(y,\lambda)|=|A(f(x,\lambda)-f(y,\lambda))+(x-y)|=$$
$$=\left|A\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(y+\tau(x-y),\lambda)\,d\tau(x-y)+(x-y)\right|=$$
$$=\left|\int_0^1\left[1+A\frac{\partial f}{\partial x}(y+\tau(x-y),\lambda)\right]d\tau\,(x-y)\right|$$

e observemos que o termo $B(x,y,\lambda)=\displaystyle\int_0^1\left[1+A\frac{\partial f}{\partial x}(y+\tau(x-y),\lambda)\right]d\tau$ deve ser limitado, uniformemente em (x,y,λ), por $|B(x,y,\lambda)|\leqslant k$ com $0\leqslant k<1$ para o nosso objetivo.

Para que isto aconteça, basta que $\left[1+A\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0,\lambda^0)\right]\cong 0$ e que tenhamos x, y e λ suficientemente próximos de (x^0,λ^0).

O método de Newton modificado escolhe $A = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)\right)^{-1}$ quando isto for possível, isto é, quando $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)$ for inversível. Na prática tomamos $A \cong -\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)\right]^{-1}$.

Neste caso temos o famoso Teorema da Função Implícita Inversa, enunciado a seguir.

Teorema da Função Implícita Inversa Dada $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ é continuamente diferenciável em uma vizinhança de $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$, $f(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) = \mathbf{0}$ e $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ é inversível, então existe um único ramo de soluções $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ da equação $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ nas vizinhanças de $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$, continuamente diferenciável e que pode ser obtido iterativamente por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}_{N+1} = \mathbf{x}_N + A f(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \lim\limits_{N \to \infty} \mathbf{x}_N \end{cases}$$

onde

$$\left| 1 + A \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \right| \leqslant k < 1$$

Se $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = g(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}$, então $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ é a função inversa de $\boldsymbol{\lambda} = g(\mathbf{x})$, e o método iterativo fica sendo

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}_{N+1} = \mathbf{x}_N + A(g(\mathbf{x}_N) - \boldsymbol{\lambda})$$

O método de Newton e suas variações constituem um instrumento poderoso da Análise, e pode ser grandemente generalizado, inclusive para o tratamento de equações diferenciais ordinárias, o que será desenvolvido a seguir.

Observe ainda que do argumento apresentado acima podemos extrair os seguintes resultados de caráter geral sobre as contrações e que podem ser úteis em muitas situações. (Verifique!)

(*i*) Se ϕ_0 é uma contração e ψ Lipchitziana ($|\phi(x) - \psi(y)| < L\,|x - y|$), então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\phi_\varepsilon = \phi_0 + \varepsilon\psi$ é uma contração para $\varepsilon < \varepsilon_0$.

(*ii*) Se ϕ é continuamente diferenciável em uma vizinhança de x^0 e $\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(x^0)\right| \leqslant k < 1$, então ϕ é uma contração em uma vizinhança restrita de x^0 (Teorema Fundamental do Cálculo).

6.3.3 Método de Perturbações

Antes de generalizar estes teoremas, apresentaremos um outro método de grande importância na construção recursiva de soluções de equações numéricas e funcionais, chamado *Método de Perturbações*.

O que caracteriza este método é a escolha *a priori* da maneira de representação da solução que é procurada como uma combinação linear de famílias ordenadas de funções $\{\phi_k\}$, isto é, $x(\lambda) \cong \Sigma a_k \phi_k(\lambda)$.

A variedade dos métodos e teorias de perturbação provém não só da escolha desta família de funções, bem como da forma de representação da solução, isto é, do tipo de convergência a ser utilizado.

As funções comumente empregadas são quase-polinômios e a convergência é uniforme ou assintótica.

Uma vez escolhidas as funções e a convergência, o método consiste basicamente em um processo recursivo para o cálculo dos coeficientes $\{a_k\}$.

Observe que no Capítulo 3 este procedimento já foi utilizado, ao estudarmos o método de Euler e Frobenius para a construção de soluções de equações diferenciais analíticas por séries de potências e séries de Frobenius.

Analisaremos a seguir apenas o chamado método de perturbação regular, em que a aproximação se faz uniformemente e por séries de potências.

Os métodos de perturbação constituem a principal técnica analítica para o estudo de inúmeros problemas da Matemática Aplicada e o leitor interessado dispõe de uma excelente introdução ao assunto no livro de Bender e Orszag*.

Para apresentar os argumentos do método de perturbação regular faremos alguns comentários exemplificados pela famosa equação de Kepler

$$x = a + \lambda \operatorname{sen} x$$

cujo objetivo é calcular x em função de $\lambda \cong 0$.

Observe que $\phi(x, \lambda) = a + \lambda \operatorname{sen} x$ tem um ponto fixo $x^0 = a$ para $\lambda = 0$, e que é uma contração para

$$|\lambda| \leqslant k < 1;\ |\phi(x, \lambda) - \phi(y, \lambda)| = |\lambda|\ |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant k\,|x - y|$$

Verifique esta desigualdade pelo Teorema do Valor Médio

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{sen}\,(y + \tau(x - y))\,d\tau = \left(\int_0^1 \cos\,(y + \tau(x - y))\,d\tau \right)(x - y)$$

Pelo Teorema de Banach concluímos que $x(\lambda)$ é solução única definida em $|\lambda| < 1$ com $x(0) = a$, e infinitamente diferenciável (o leitor familiarizado com a Teoria das Funções Analíticas pode concluir facilmente que $x(\lambda)$ é, na verdade, analítica).

---

* BENDER, C. & Orszag, S. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York, McGraw-Hill, 1978.

Portanto, podemos escrever

$$x(\lambda) = C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \ldots + C_N\lambda^N + R(\lambda^N)$$

para todo $N > 1$, onde $\dfrac{R(\lambda^N)}{\lambda^N} \to 0$ quando $\lambda \to 0$, isto é, $R(\lambda^N) = o(\lambda^N)$.

Para o cálculo dos coeficientes, existem basicamente dois métodos:

1. *Substituição*

Escrevendo

$$o(C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \ldots + C_N\lambda^N + o(\lambda^N)) = a + \lambda \operatorname{sen} [C_0 + C_1\lambda + \ldots + C_N\lambda^N + o(\lambda^N)]$$

desenvolvendo sen x em séries de potências e igualando os coeficientes de cada potência podemos (tal como no método de Euler e Frobenius) calcular os coeficientes recursivamente.

2. *Derivação*

a. Tomando $\lambda = 0$ na equação $x = a + \lambda \operatorname{sen} \dot{x}$, temos $x(0) = a = C_0$.

b. Derivando a equação com relação a λ e tomando, em seguida, $\lambda = 0$ temos $(1 - \lambda \cos x)\dot{x} - \operatorname{sen} x\,|_{\lambda=0} = 0$ e, portanto, $\dot{x}(0) = \operatorname{sen} a$, ou seja, $C_1 = \operatorname{sen} a$.

c. Derivando duas vezes a equação com relação a λ e tomando em seguida $\lambda = 0$ temos

$$(1 - \lambda \cos x)\ddot{x} - \dot{x} \operatorname{sen} x - \dot{x} \cos x - \lambda \frac{d}{d\lambda} (\dot{x} \cos x)\,|_{\lambda=0} = 0$$

$$\ddot{x}(0) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

e portanto

$$C_2 = \frac{1}{2}\ddot{x}(0) = \operatorname{sen} a \cos a$$

Portanto, a aproximação quadrática de $x(\lambda)$ é

$$x(\lambda) = a + \lambda \operatorname{sen} a + \lambda^2 (\operatorname{sen} a \cos a) + o(\lambda^2)$$

No caso geral, para resolver o problema $\begin{cases} f(x, \lambda) = 0 \\ f(x^0, \lambda^0) = 0 \end{cases}$ por perturbação regular, construímos o seguinte processo recursivo:

(*i*) $x_0 = x^0$.

(*ii*) Derivando $f(x(\lambda), \lambda) = 0$ e tomando $\lambda = \lambda^0$ temos uma *equação linear* a ser resolvida para o cálculo de $\dot{x}(\lambda^0)$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}\bigg|_{\lambda=\lambda^0} = 0$$

Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)$ for inversível, obtemos a única solução possível

$$\dot{x}(\lambda^0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x^0, \lambda^0) = C_1$$

(*iii*) Derivando $f(x(\lambda), \lambda) = 0$ duas vezes e tomando $\lambda = \lambda^0$ temos uma *equação linear* a ser resolvida para o cálculo de $\ddot{x}(\lambda^0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)\ddot{x}(\lambda^0) + \frac{\partial}{\partial \lambda}[f(x(\lambda), \lambda)\dot{x}(\lambda^0)]\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0$$

Observe que esta equação é idêntica à anterior modificando-se apenas o termo não homogêneo. A esta altura é fácil concluir que o cálculo de $x^{(N)}(\lambda^0) = N!C_N$ será sempre obtido, bastando resolvermos a nova equação linear para termos homogêneos diferentes que são obtidos recursivamente dos métodos anteriores pela fórmula

$$x^{(N)}(\lambda^0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)\right)^{-1} \left[\frac{\partial^N}{\partial \lambda^N} f(x(\lambda), \lambda)\right]\Big|_{\lambda=\lambda^0} + x^{(N)}(\lambda^0)$$

(Observe que no termo à direita desenvolvido, *não* ocorre $x^{(N)}(\lambda^0)$ e, portanto, o processo é realmente recursivo.)

A existência e unicidade de solução de todas estas equações é garantida pela invertibilidade de $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)$, que é uma condição necessária também para a construção do método iterativo de Newton.

Sob condições análogas às do Teorema da Função Implícita, podemos garantir então que o método de perturbação regular será um processo *recursivo* que produzirá uma aproximação

$$x(\lambda) \cong \Sigma \frac{x^{(k)}(\lambda^0)}{k!}(\lambda - \lambda^0)^k$$

até a ordem de diferenciabilidade de f

$$x(\lambda) = C_0 + C_1\lambda + \ldots + C_N\lambda^N + \alpha(\lambda^N)$$

Um aspecto prático importante do método de perturbação consiste na substituição de um problema *não linear* por uma seqüência de problemas *lineares* que, na verdade, constituem apenas um único problema linear $\left(\text{a inversão de } \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)\right)$ com dados recursivos.

Observação:

Se a matriz $L = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)$ é *não inversível*, a equação $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, \lambda^0)\alpha = \beta$ só pode ser resolvida se β satisfizer condições de compatibilidade (isto é, se $L^*\beta = 0$) e, neste caso, a solução não é única. Obteremos então mais de um ramo da solução a partir de (x^0, λ^0), o que caracteriza o fenômeno de bifurcação.

Para maiores detalhes sobre o método de perturbação regular consulte Bender Orszag e Grebenikov-Ryabov e, para o fenômeno de bifurcação, Keller*.

EXERCÍCIOS

Em cada uma das equações abaixo:

a. analise a existência e unicidade do ramo de solução a partir dos pontos iniciais indicados;
b. escreva um método iterativo;
c. obtenha uma aproximação quadrática pelo método de perturbação regular.

1. $f(x, \lambda) = \lambda x^2 - x + a = 0$, $x^0 = a$ e $\lambda^0 = 0$.
2. $f(x, \lambda) = x^3 - x^2 + \lambda = 0$, $x^0 = 1$ e $\lambda^0 = 0$.
3. $f(x, \lambda) = x^3 + \lambda x^2 - x = 0$, $x^0 = 0$ e $\lambda^0 = 0$.
4. $f(x, \lambda) = a + \lambda e^{bx} - x = 0$, $x^0 = a$ e $\lambda^0 = 0$ (Equação de Ramanujan).
5. $f(x, y, \lambda) = y - x + \lambda \operatorname{sen} 2y = 0$, $y = x$ e $\lambda \neq 0$, obtenha $y = c_0(x) + c_1(x)\lambda + c_2(x)\lambda^2 + o(\lambda^2)$.
6. Considere a equação geral $x = a + \lambda g(x)$ nas vizinhanças de $x^0 = a$, $\lambda^0 = 0$. Suponha que $g(x) = g_0 + g_1(x - a) + g_2(x - a)^2 + o((x - a)^2)$.
7. Analise o problema de Kepler $x = a + \lambda \operatorname{sen} x$, para x como função de λ e a, com $x(0, 0) = 0$.
8. $f(x, \lambda) = x^3 - 3\lambda - \lambda = 0$, $x^0 = 0$ e $\lambda^0 = 0$.
9. $f(x, \lambda) = \operatorname{tg} x - Cx = 0$; $(\lambda = 1/c)$, $\lambda^0 = 0$ (Observe que existe uma solução para cada intervalo $\left[n\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.)

   Sugestão: Uma vez fixado n, obtenha a solução em potências de λ. Transforme o problema $a = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $x = a + z$; $(a + z)\operatorname{tg} z = -\frac{1}{c} = -\lambda$; $z = -\frac{1}{a}\lambda - \frac{1}{a^3}\lambda^2 - \frac{6 - a^2}{3a^5}\lambda^3 + o(\lambda^4)$.
10. $f(z) = \sum_{k \geq 2}^{\infty} a_k z^k$, $a_2 \neq 0$. Obtenha em potência de λ as duas soluções de $f(z) = \lambda(1 + \alpha\lambda)$.

Existem ainda vários outros métodos relacionados a processos recursivos e equações diferenciais ordinárias (que é de certa forma um processo iterativo contínuo!) tais como o método de imersão, o método de Davidenko ou método de continuação por trajetórias, o método de homotopia etc.

A idéia básica destes métodos consiste em ligar um problema cuja solução é conhecida e relativamente fácil aos problemas de interesse por meio de uma deformação paramétrica cujo percurso é feito por meio da solução numérica de uma equação diferencial ordinária.

Como exemplo, procuremos obter a inversa de uma matriz C_1 que possa ser conectada a uma matriz C_0 (cuja inversa é conhecida) pela deformação linear $C(\alpha) = \alpha C_1 + (1 - \alpha)C_0$, onde $\det C(\alpha) \neq 0$ para $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Se $X(\alpha)$ for a inversa de $C(\alpha)$, devemos ter $X(\alpha)C(\alpha) = I$ que derivando nos dá $\frac{dX}{d\alpha} C + X \frac{dC}{d\alpha} = 0$ ou $\frac{dX}{d\alpha} = -X \frac{dX}{d\alpha} X$

---

* BENDER, C. & Orszag, S. *Advance Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York, McGraw-Hill, 1978.

GREBENIKOV, E.A. & Ryabov, Yu. A. *Constructive Methods in the Analysis of Nonlinear Systems*. Moscou, Mir, 1983.

KELLER, H. B. *Notas de Curso da Escola de Matemática Aplicada*, 1985. Rio de Janeiro, Laboratório Nacional de Computação Científica, 1985.

a qual é uma equação diferencial ordinária quadrática para X ou um sistema de n^2 equações diferenciais ordinárias quadráticas.

Acrescentando a esta equação a condição inicial $X(0) = C_0^{-1}$, a solução do problema, isto é, o cálculo de C_1^{-1}, é obtida com $X(1) = C_1^{-1}$.

Em geral, se desejamos calcular as soluções de $f(x, \lambda) = 0$ dado $f(x_0, \lambda_0) = 0$, podemos buscar uma parametrização das soluções na forma $(x(s), \lambda(s))$ que, colocada na equação e derivando nos dá $\frac{d}{ds} f(x(s), \lambda(s)) = 0$, ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(s), \lambda(s))\dot{x}(s) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x(s), \lambda(s))\,\dot{\lambda}(s) = 0$$

Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ for inversível ao longo da trajetória, obtemos uma equação diferencial para $x(s)$ (chamada equação de Davidenko)

$$\dot{x}(s) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(s), \lambda(s))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x(s), \lambda(s))\,\dot{\lambda}(s)$$

com condições iniciais $x(0) = x_0$, desde que a deformação $\lambda(s)$ seja especificada de antemão. E esta é uma liberdade que pode ser utilizada com grandes vantagens, principalmente no caso em que houver bifurcações de ramos das soluções.

Estes métodos são de grande utilidade no estudo dos pontos de equilíbrio para uma função escalar $\phi(\mathbf{x}, \lambda)$, isto é, soluções da equação $\nabla\phi(\mathbf{x}, \lambda) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e no estudo de problemas de bifurcação. Sobre o assunto, consulte Garcia-Zangwill e Keller*.

6.3.4 Métodos Iterativos para Equações Funcionais

Passemos agora a analisar equações funcionais, isto é, equações em que as incógnitas são funções e as operações envolvidas são as que usualmente se efetuam sobre elas: produto por escalar, soma, produto, composição, inversão, derivação e integração.

O nosso objetivo principal agora será estudar as soluções continuamente diferenciáveis da equação funcional que caracterizam o problema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{1}$$

onde f é um campo contínuo definido em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$ e dependente do parâmetro $\lambda \cong 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}^k$). A solução será procurada como uma função contínua $\mathbf{x}(t)$ definida em uma vizinhança da origem $(-\alpha, \alpha)$, e que resolve a seguinte equação

---

* GARCIA, C. B. & Zangwill, W. *Pathways to Solutions, Fixed Points and Equilibria*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1981.

KELLER, H. B. *Notas de Curso da Escola de Matemática Aplicada*, 1985. Rio de Janeiro, Laboratório Nacional de Computação Científica, 1985.

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t f(\mathbf{x},(s), \lambda) ds \tag{2}$$

que é equivalente ao problema de Cauchy (1). (Verifique!) Observe que nesta formulação podemos representar simbolicamente o problema como uma equação do tipo

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}, \lambda)$$

idêntica às equações numéricas estudadas anteriormente. Consideraremos Φ como um funcional que transforma uma função (contínua, definida em uma vizinhança de $t = 0$, com valores em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n$) em outra função $\mathbf{z}$ do mesmo tipo através da operação

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(\mathbf{x}, \lambda)\ (t) = \int_0^t f(\mathbf{x}(s), \lambda) ds$$

É natural, portanto, tentar construir a solução do problema (2) iterativamente a partir do "ponto" $\mathbf{x} \equiv 0$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0(t) \equiv 0 \\ \mathbf{x}_{n+1}(t) = \Phi(\mathbf{x}_n, \lambda).(t) \end{cases} \tag{3}$$

Entretanto, para que a analogia possa ser levada adiante é necessário estabelecer uma definição de "distância" entre as incógnitas, de modo que sejam caracterizados os conceitos de *contração* e *limite da seqüência*.

Em nosso caso a seqüência $\{\mathbf{x}_n(t, \lambda)\}$ é formada por funções contínuas em t e a solução procurada também é contínua, o que nos indica que o conceito de distância a ser empregado implica automaticamente a manutenção da propriedade de continuidade no limite. Lembrando do Teorema de Convergência Uniforme*, somos levados a considerar um conceito de distância em que a proximidade entre duas funções seja equivalente à proximidade uniforme.

Com este objetivo definiremos então a distância entre as *funções* $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, definidas em uma mesma vizinhança de $t = 0$, por $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \sup_t \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) \|$ e, portanto, $| \mathbf{x} - \mathbf{y} | \leqslant \varepsilon$ é equivalente a $\| \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) \| \leqslant \varepsilon$ para *todo* t.

Para sermos mais explícitos, consideraremos apenas as funções que, grosso modo, nos interessam como candidatas à solução do problema.

$$E_\alpha = \{\text{funções contínuas, definidas no intervalo } [-\alpha, \alpha] \text{ com valores em } \mathbb{R}^n, \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}\}$$

Não é difícil concluir que E_α é um espaço vetorial com as operações usuais definidas ponto a ponto. (Verifique!)

Observe que o número $\| \mathbf{x} \|$ é definido para todo elemento de E_α, é denominado de *norma* de $\mathbf{x}$ e desempenha um papel semelhante aos conceitos análogos do $\mathbb{R}^n$.

---

* COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1969, 2v.

As propriedades que caracterizam o conceito de norma em um espaço vetorial em geral são as seguintes:

(*i*) $\| \mathbf{x} \|_0 \geqslant 0$
(*ii*) $\| \mathbf{x} \|_0 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
(*iii*) $\| c\mathbf{x} \|_0 = | c | \ \| \mathbf{x} \|_0$ (c é um escalar qualquer real e $| c |$ = módulo de c)
(*iv*) $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|_0 \leqslant \| \mathbf{x} \|_0 + \| \mathbf{y} \|_0$ (desigualdade triangular)

Tais propriedades são cumpridas pelo nosso exemplo. (Verifique!)

Podemos então definir *vizinhança* em E_α: uma bola de centro $\mathbf{x}^0 \in E_\alpha$ e raio r é o conjunto dos $\mathbf{x} \in E_\alpha$, tais que $\| \mathbf{x} - x_0 \| = \sup_{|t| < \alpha} \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0(t) \| < r$, e escrevemos $B_r(\mathbf{x}_0)$. Segue-se a definição de *convergência*: $\{\mathbf{x}_n\}$ será convergente para $\mathbf{x}$ se a seqüência numérica das distâncias $\| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| = d_n$ convergir para 0 quando $n \to \infty$.

Alguns teoremas clássicos de convergência uniforme para seqüências e séries de funções podem ser facilmente formulados nesta linguagem e assim identificados com os seus análogos numéricos:

(*i*) O limite de uma seqüência, se existir, é único. Esta propriedade, aparentemente óbvia, é indispensável para a construção de uma solução como limite.

(*ii*) Se $\{\mathbf{x}_n\}$ é uma seqüência de Cauchy (isto é, $\lim_{n,\, m \to \infty} \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m \| = 0$), então $\mathbf{x}_n$ converge para alguma função $\mathbf{x} \in E_\alpha$.

(*iii*) Se $\{\mathbf{y}_k\}$ é tal que $\| \mathbf{y}_k \| < q^k$ $(0 \leqslant q < 1)$, então a série $\mathbf{x}_n = \sum_{k \geq 0}^{n} \mathbf{y}_k$ é convergente (Teste da Comparação de Weierstrass).

(*iv*) Se $\{\mathbf{x}_n\}$ e $\{\mathbf{x}'_n\}$ são seqüências de E_α convergentes, então o limite de $\mathbf{x}_n$ tem derivada que pertence a E_α e $\frac{d}{dt}(\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{d\mathbf{x}_n}{dt}$. (Intercâmbio entre operações de limite e derivada).

(*v*) Se $\{\mathbf{x}_n\}$ converge para x em E_α e f é uma função contínua definida em $\mathbb{R}^n$, então $\mathbf{z}_n(t) = \int_0^t f(\mathbf{x}_n(s))\, ds \in E_\alpha$ e $\mathbf{z}_n$ converge (em E_α) para $\mathbf{z}(t) = \int_0^t f(\mathbf{x}(s))\, ds$, que é um elemento de E_α.

A esta altura estamos, então, diante de um problema completamente análogo ao problema numérico. A sua solução poderá ser obtida por argumentos semelhantes e que constituirá o resultado fundamental da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias.

Teorema de Existência, Unicidade e Dependência Contínua de Parâmetros para Soluções do Problema de Cauchy Seja $f(\mathbf{x}, \lambda)$ um campo vetorial no $\mathbb{R}^n$ dependente de um parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}^k$

(*i*) contínuo em uma vizinhança de $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, e
(*ii*) lipchitziano em $\mathbf{x}$, isto é

$$\| f(\mathbf{x}_1, \lambda) - f(\mathbf{x}_2, \lambda) \| \leqslant L \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|$$

para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \lambda$ nesta vizinhança, sendo L uma constante. Então, existe uma função $\mathbf{x}(t, \lambda)$ definida em uma vizinhança de $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ contínua, diferenciável em t e que satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{4}$$

(*iii*) se f for continuamente diferenciável com relação a (t, λ), então o mesmo se sucederá com $\mathbf{x}(t, \lambda)$.

Demonstração: Suponha que $\overline{U}_r(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \| \mathbf{x} \| \leqslant r\}$ e $\overline{V}_\delta(0) = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \| \lambda \| \leqslant \delta\}$ estejam contidas no domínio de definição de f e considere no espaço $E_\alpha = \{$funções $x : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}^n$, contínuas, e $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}\}$, a vizinhança da origem $B_r(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in E_\alpha : \|\mathbf{x}\| < r\}$ e α a ser especificado.

O funcional $\Phi(\mathbf{x}, \lambda)$ dado por $\Phi(\mathbf{x}, \lambda)(t) = \int_0^t f(\mathbf{x}(s), \lambda)\, ds$ é bem definido em $B_r(\mathbf{0})$, e se $M = \max_{\substack{\mathbf{x} \in U_R \\ \lambda \in V_\delta}} \| f(\mathbf{x}, \lambda) \|$, concluímos que $\Phi(\mathbf{x}, \lambda) \in B_{\alpha M}(0)$ pois

$$\left\| \int_0^t f(\mathbf{x}(s), \lambda) ds \right\| \leqslant \int_0^t \| f(\mathbf{x}(s), \lambda) \|\, ds \leqslant \alpha M$$

(e analogamente para $-\alpha < t \leqslant 0$).

Observe que, se fizermos agora a primeira restrição a α com $\alpha < \dfrac{r}{M}$, teremos o funcional Φ transformando funções de $B_r(0)$ em outras funções no *mesmo* conjunto.

Verifiquemos agora as condições para que Φ seja uma contração.

Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{0})$, $0 \leqslant t < \alpha$, $\lambda \in V_\delta$; então

$$\left\| \int_0^t f(\mathbf{x}(s), \lambda) ds - \int_0^t f(\mathbf{y}(s), \lambda) ds \right\| \leqslant \int_0^t \| f(\mathbf{x}(s), \lambda) - f(\mathbf{y}(s), \lambda) \|\, ds \leqslant \alpha L$$

(e analogamente para $-\alpha < t \leqslant 0$), de onde concluímos que $\Phi(\mathbf{x}, \lambda) - \Phi(\mathbf{y}, \lambda) \leqslant \alpha L$ e para que tenhamos uma contração basta fazermos $\alpha L < 1$ $(q = \alpha L)$.

A solução será, então, obtida pelo processo iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = 0 \\ \mathbf{x}_{n+1} = \Phi(\mathbf{x}_n, \lambda) \end{cases}$$

Como

$$\mathbf{x}_{n+1}(t, \lambda) = \sum_{k \geq 0}^{n+1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)$$

e, sabendo que

$$\| \mathbf{x}_{k+1}(t, \lambda) - \mathbf{x}_k(t, \lambda) \| \leqslant q \| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1} \|_0 \leqslant \ldots \leqslant q^k \| \mathbf{x}_1 \|_0$$

como $\| \mathbf{x}_1 \|_0 = \| \Phi(\mathbf{0}, \lambda) \|_0 < r$, verificamos que a série funcional acima é majorada uniformemente em (t, λ) por uma série numérica geométrica $\sum_{k \geq 0} mq^k$ $(0 \leqslant q < 1)$ e, portanto, converge uniformemente para uma função $\mathbf{x}(t, \lambda)$ contínua em (t, λ).

Mas então $\Phi(\mathbf{x}_n, \lambda)(t) = \int_0^t f(\mathbf{x}_n(s, \lambda), \lambda)\, ds = \mathbf{x}_{n+1}(t, \lambda)$, converge para $\Phi(\mathbf{x}, \lambda)(t)$ uniformemente em (t, λ) e, portanto, $\Phi(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}$, ou seja, $\mathbf{x}$ é a solução do problema.

A unicidade provém de argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração do Teorema de Banach. (Verifique!)

Suponha agora que f seja continuamente diferenciável com relação a $\mathbf{x}$ e λ em $\overline{U}_r \times \overline{V}_\delta$. Então f é lipchitziana pois (pelo Teorema Fundamental do Cálculo e Regra da Cadeia) temos

$$f(\mathbf{x}, \lambda) - f(\mathbf{y}, \lambda) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} (f(\mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \lambda))\, d\tau =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \lambda)\, d\tau \right) (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

e $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são limitadas em $\overline{U}_r \times \overline{V}_\delta$!

Para provar a diferenciabilidade de $\mathbf{x}(t, \lambda)$ com relação a λ suponha que $\lambda \in \mathbb{R}$ $(k = 1)$ para simplificar a notação (ou repita os argumentos para cada derivada parcial). Observe então que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}(t, \lambda + h) - \mathbf{x}(t, \lambda)) = f(\mathbf{x}(t, \lambda + h), \lambda + h) - f(\mathbf{x}(t, \lambda), \lambda)$$

Chamando $\Delta\mathbf{x}(t, h) = \mathbf{x}(t, \lambda + h) - \mathbf{x}(t, \lambda)$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \Delta\mathbf{x} = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} (f(\mathbf{x} + \tau\Delta\mathbf{x}, \lambda + \tau h))\, d\tau =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} + \tau\Delta\mathbf{x}, \lambda + \tau h)\, d\tau \right) \Delta\mathbf{x} + \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\mathbf{x} + \tau\Delta\mathbf{x}, \lambda + \tau h)\, d\tau \right) h$$

de onde concluímos que $\dfrac{\Delta\mathbf{x}(t, h)}{h}$ é a solução do problema de Cauchy $(h \neq 0)$

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = A(t, h, \lambda)\zeta + B(t, h, \lambda) \\ \zeta(0) = 0 \end{cases}$$

onde $A(t, h, \lambda)$ e $B(t, h, \lambda)$ são contínuas em (t, h) para $t \in (-\alpha, \alpha)$, h em uma vizinhança da origem, inclusive para $h = 0$ e $\lambda \cong 0$.

Pela primeira parte do teorema concluimos então que a solução $\zeta(t, h, \lambda)$ (*única*) é contínua em (t, h, λ) em uma vizinhança de $(0, 0, \mathbf{0})$ e, portanto, existe $\lim_{h \to 0} \zeta(t, h, \lambda)$ uniformemente em (t, λ), ou seja, existe $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ e é contínua em (t, λ).

Observações:

a. As afirmações sobre continuidade e continuidade uniforme feitas na demonstração do teorema devem ser analisadas com cuidado pelo leitor.

b. A demonstração foi feita de forma a realçar a semelhança dos argumentos com os utilizados no caso numérico (Teorema de Banach). Na verdade, se introduzirmos a noção de diferenciabilidade de um funcional (definido em um espaço vetorial normado), a demonstração do teorema é exatamente a mesma*.

c. Princípio de Continuação da Solução: suponha que exista uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}\end{cases}$$

no intervalo $[0, \beta)$ e que exista o limite $\lim_{t \uparrow \beta} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\alpha$.

Considerando agora o problema

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \lambda) \\ \mathbf{z}(\beta) = \mathbf{x}_\beta\end{cases}$$

que tem solução única em uma vizinhança $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ de β, podemos então estender a solução para o intervalo $[0, \beta + \varepsilon)$ definido

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases}\mathbf{x}(t) & t \leqslant \beta \\ \mathbf{z}(t) & t \geqslant \beta\end{cases}$$

Para verificar que y é realmente uma solução, basta observar que é contínua, e satisfaz a equação $\mathbf{y}(t) = \int_0^t f(\mathbf{y}(s), \lambda)\, ds$. Como já ressaltamos anteriormente, a impossibilidade de estender uma solução para todo $t > 0$ é essencialmente devida ao fato de que esta solução $\mathbf{x}(t)$ pode se aproximar, em tempo finito, da fronteira da região de definição do campo. (A fronteira pode ser finita, como para $\dot{x} = -1/x$, ou infinita, como para $\dot{x} = 1 + x^2$.)

Se agora, por meio de um argumento qualquer (tal como o fornecido por funções de Lyapunov), podemos garantir que a solução $\mathbf{x}(t)$, enquanto existir, permanece em uma região fechada limitada R contida no domínio de definição de $f(\mathbf{x})$, é razoável esperar que $\mathbf{x}(t)$ exista para todo $t > 0$ (ver Figura 6.20).

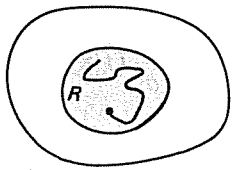


Figura 6.20

Para provarmos isto, suponha que $\mathbf{x}(t)$ seja definida em um intervalo $[0, \beta)$, $\beta < \infty$. Então

$$|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{x}(s), s)\, ds \right| \leqslant M(t_2 - t_1)$$

onde $M = \max_{\substack{\mathbf{x} \in R \\ 0 \leq S \leq \beta}} |f(\mathbf{x}, s)|$ para $0 \leqslant t_1 < t_2 < \beta$.

Pelo critério de Cauchy fica clara a existência do limite $\lim_{t \uparrow \beta} \mathbf{x}(t)$ e, portanto, a solução $\mathbf{x}(t)$ poderá ser estendida a um intervalo $[0, \beta + \varepsilon)$. Isto implica que $\gamma = \max \{\beta;\ x(t) \text{ está definida em } [0, \beta)\}$ *não pode ser finito* e que $\mathbf{x}(t)$ está definida para todo $t > 0$.

d. Um outro caso especial e importante deste teorema que nos permite algumas conclusões extras é fornecido quando a equação é linear de coeficientes variáveis apenas contínuos em t

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = A(t, \lambda)\mathbf{x} + B(t, \lambda) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}\end{cases}$$

no intervalo $[-T_1, T_2]$.

---

* KOLMOGOROV, A. N. & Fomin, S. V. *Elementos da Teoria de Funções e Análise Funcional*. Moscou, Mir, 1982.

Neste caso, a solução $\mathbf{x}(t, \lambda)$ existe e tem derivada contínua em t para todo o intervalo $[-T_1, T_2]$ e a sua dependência de λ é a mesma que é comum aos coeficientes A e B.

Suponha que A e B sejam contínuos como funções de (t, λ) em $[-T_1, T_2]\overline{V}_\delta$. Tal como antes, o problema pode ser reduzido à equação de ponto fixo $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}, \lambda)$, onde Φ é um funcional definido em todo o espaço $E = \{\mathbf{x} : [-T_1, T_2] \to \mathbb{R}^n$, contínuas com $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}\}$ e $\Phi(\mathbf{x}, \lambda) \in E$, para cada λ

$$\Phi(\mathbf{x}, \lambda)\,(t) = \int_0^t (A(s, \lambda)\mathbf{x}(s) + B(s, \lambda))\,ds$$

Observe que não há necessidade de restrições no módulo de $\mathbf{x}(t)$, uma vez que o campo está definido em todo o $\mathbb{R}^n$! A questão, portanto, resume-se em obter um ponto fixo de Φ em E; mas, em geral, com a norma utilizada anteriormente, este funcional não é uma contração.

Se reduzirmos suficientemente o intervalo de definição das funções de E, podemos repetir a argumentação do teorema geral e concluir pela existência de solução local do problema. Entretanto, isto é pouco para uma equação tão especial como esta. Utilizando o princípio de continuação podemos concluir que a solução existirá em todo o intervalo $[-T_1, T_2]$. Mas não insistiremos neste procedimento uma vez que este caso já foi especialmente tratado pelo teorema de existência para equações lineares do Capítulo 4.

A título de motivação para o estudo do cálculo operacional e para a generalização de métodos elementares, analisemos agora a resolução de uma equação funcional diferencial ordinária através de uma generalização do método de Newton. A apresentação será puramente formal, embora a sua justificação seja apenas uma questão técnica que pode ser encontrada em Kolmogorov-Fomin*.

Considere então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

cuja solução procuraremos no espaço vetorial

$$E_\alpha = \{x : (-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R}^n, \text{continuamente diferenciáveis}, x(0) = 0\}$$

que inclui a condição inicial automaticamente. Portanto, nos interessa resolver a equação funcional

$$\Phi(\mathbf{x}) = (D - \varphi)\,(\mathbf{x}) = 0$$

onde D é o operador linear $\dfrac{d}{dt}$, φ o operador (em geral, não linear) de composição com f.

Se $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ fosse uma equação com variáveis numéricas, o método de Newton poderia ser apresentado na forma recursiva

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}\,(\mathbf{x}_n)\right]^{-1} \Phi(\mathbf{x}_n) \end{cases}$$

A única dificuldade na generalização deste método está na identificação da operação linear inversa de $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\,(x_n)$ a ser aplicada em $\Phi(x_n)$.

---

* KOLMOGOROV A. N. & Fomin, S. V. *Elementos da Teoria de Funções e Análise Funcional*. Moscou, Mir, 1982.

Mas isto pode ser facilmente resolvido se lembrarmos que no caso escalar $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_n)h$ é uma derivada direcional $\frac{d}{d\varepsilon}\Phi(x_n+\varepsilon h)\,|_{\varepsilon=0}$.

Fazendo o mesmo para o funcional Φ verificamos que

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\dot{x}_n+\varepsilon\dot{h}-\boldsymbol{\varphi}(x_n+\varepsilon h)]\,|_{\varepsilon=0}=\mathbf{L}_n h$$

onde

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_n)h=\mathbf{L}_n h=\dot{h}-\frac{\partial f}{\partial x}(x_n)h$$

e, portanto, o funcional linear $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x_n)$ é o operador linear $\mathbf{L}_n$ cuja inversão (em E)

$$h=\mathbf{L}_n^{-1}\,g$$

é simplesmente a solução da equação linear $\mathbf{L}_n h=g$ sob condições iniciais de Cauchy.

Portanto, o método de Newton pode ser generalizado da seguinte forma

$$\begin{cases}x_{n+1}=x_n-(\text{solução do problema de Cauchy } L_n h=\dot{x}_n-f(x_n),\ h(0)=0)\\ x_0=0\end{cases}$$

EXERCÍCIO

1. Considere o problema de fronteira escalar

$$\begin{cases}\ddot{x}=f(x,t)\\ x(0)=x_0;\quad x(1)=x_1\end{cases}$$

e descreva formalmente o método de Newton para este caso. Considere o espaço de funções

$$E=\{z:[0,1]\to\mathbb{R},\ z \text{ duas vezes continuamente diferenciável e } z(0)=z(1)=0\}$$

e modifique o problema para $z(t)=x(t)-[tx_1+(1-t)x_0]$, obtendo

$$\begin{cases}\ddot{z}=\ddot{x}=f(z(t)+tx_1+(1-t)x_0,\,t)=\bar{f}(z,t)\\ z(0)=z(1)=0\end{cases}$$

Como sabemos, o método de Newton em geral substitui um problema não linear por uma seqüência de problemas lineares recursivos. Ao utilizarmos o método modificado, a equação linear a ser resolvida é de coeficientes constantes, o que nos leva freqüentemente às soluções explícitas.

Capítulo 7

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Magia é a capacidade de multiplicar com artes, cálculos e símbolos o nosso domínio sobre o mundo.

Giordano Bruno
(Século XVI)

7.1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais parciais têm por incógnitas funções de muitas variáveis, sobre as quais se efetuam as operações funcionais usuais e as operações de derivação parcial.

A variedade de equações deste tipo que se pode escrever é assustadora e a simples taxionomia delas já seria uma tarefa impossível. Entretanto, nem toda equação que se escreve tem alguma importância e neste caso, como em vários outros, o bom senso para a escolha dos problemas realmente importantes da teoria depende decisivamente da origem não matemática e das inúmeras aplicações que fazemos destas equações.

A origem, os objetivos e os métodos matemáticos das equações diferenciais parciais estão ligados tradicionalmente de maneira indissolúvel (mas harmoniosa!) a problemas da Física Matemática e o seu estudo não pode deixar de enfatizar e tirar o devido proveito deste fato. *Não* é necessário, todavia, recorrer a teorias físicas muito sofisticadas e exóticas para obtermos os exemplos mais representativos das equações diferenciais parciais. A Elasticidade e a Dinâmica dos Fluidos, que tratam de fenômenos concretos e familiares, tiveram o seu desenvolvimento em comum com uma grande e boa parte da teoria matemática destas equações. Além disto, as mesmas equações que estudamos em Elasticidade e Dinâmica dos Fluidos reaparecem seguidas vezes, nas mais variadas áreas da Física e da Matemática Aplicada em geral, demonstrando assim o poder de síntese e a admirável eficiência da Matemática no estudo dos fenômenos da natureza. Com isto, vários problemas matemáticos abstratos e de significado às vezes obscuro na sua concepção física original, adquirem uma interpretação concreta e familiar quando focalizados do ponto de vista da Mecânica.

Nas últimas décadas os conceitos e os métodos matemáticos utilizados no estudo da Elasticidade e Dinâmica dos Fluidos tiveram sua área de aplicações consideravelmente expandida, dando origem ao que tem sido denominado genericamente por Mecânica do Meio Contínuo. Sob este título tratam-se, a partir de pontos de vista matemáticos comuns, problemas tão variados como os provenientes da Aerodinâmi-

ca, teoria da combustão, Geofísica (Meteorologia, Oceanografia, Sismologia), Astrofísica (dinâmica de galáxias), Física de Plasmas (Magneto-hidrodinâmica), Ecologia (dinâmica de populações), Biodinâmica (Hemodinâmica, respiração etc.), Microbiologia (quimiotaxia, termotaxia etc.), Morfogênese etc.

A solução de inúmeros problemas de importância prática e científica em Mecânica do Meio Contínuo depende decisivamente do desenvolvimento da teoria das equações diferenciais parciais que, por sua vez, é inevitavelmente influenciada nesta interação.

Consideramos, portanto, recomendável que uma introdução às equações diferenciais parciais seja feita simultaneamente com uma interpretação matemática, ainda que elementar, de alguns problemas e conceitos básicos da Mecânica do Meio Contínuo. Com tal objetivo iniciaremos então este capítulo apresentando os métodos de Euler e Lagrange para a descrição do meio contínuo e nos restringiremos inicialmente ao caso de uma dimensão onde as idéias essenciais estão presentes sem a necessidade de teoremas de cálculo vetorial. Mostraremos que grande parte das equações diferenciais parciais pode ser obtida a partir de duas classes de princípios básicos da Mecânica do Meio Contínuo: Princípios de Conservação e Princípios Variacionais, cuja formulação matemática freqüentemente nos fornece não só as equações, como também as técnicas para seu estudo.

O desenvolvimento da teoria matemática será feito de maneira paralela e próxima, tanto quanto possível, das suas diversas interpretações mecânicas.

A apresentação, mesmo introdutória, da teoria e aplicações das equações diferenciais parciais exige, em geral, um preparo analítico muito maior do que para o estudo das equações ordinárias. A variedade de técnicas e métodos utilizados é vastíssima e para enquadrarmos este capítulo dentro do assunto principal do livro trataremos apenas de alguns métodos que dependem essencialmente da teoria de equações diferenciais ordinárias, ainda assim com severas restrições.

Após a introdução dos principais tipos de equações diferenciais parciais e algumas de suas interpretações em Mecânica do Meio Contínuo, apresentaremos uma classificação geral destas equações com base nos problemas que as originaram. Em seguida, desenvolveremos um método de solução para equações diferenciais parciais de primeira ordem. Tais equações, apesar de descreverem importantes problemas contemporâneos da Física Matemática e da Biomatemática, não são convenientemente tratadas nos cursos tradicionais de métodos de Matemática Aplicada ou em textos clássicos.

7.2 PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO E A ORIGEM DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS CLÁSSICAS

Quaisquer que sejam as sutilezas e complexidades dos sistemas ecológicos, podemos estar certos de uma coisa: as populações obedecem a uma lei de conservação da seguinte forma

$$\frac{dN}{dt} = \textit{nascimentos} - \textit{mortes} \pm \textit{migrações}$$

Portanto, somos forçados a iniciar o nosso estudo de Biologia das populações procurando entender as conseqüências desta lei básica. E isto não é tão fácil quanto pode parecer. Na verdade, toda a Dinâmica de Fluidos se reduz, em última análise, à dedução de conseqüências destas leis para massa, quantidade de movimento e energia, sob várias condições; uma tarefa reconhecidamente em nada trivial.*

7.2.1 Descrição de um Meio Contínuo

O estudo da Mecânica de um Meio Contínuo teve início com a teoria da Elasticidade e da Hidrodinâmica e sua formulação matemática só foi satisfatoriamente conseguida com os trabalhos de Euler, Lagrange, Cauchy, Navier, Poisson e outros, na primeira metade do século XIX. Isto significa que se passaram aproximadamente 150 anos da formulação da Mecânica Newtoniana! Portanto, não é de se esperar que esta teoria seja algo simples, apesar das reformulações e aperfeiçoamentos sucessivos no modo de sua apresentação.

Existem basicamente duas maneiras complementares de descrevermos um meio contínuo:

1. através da formulação de Euler, que fixa as coordenadas $\mathbf{x}$ (no espaço $\mathbb{R}^n$) e o instante t, e observa então cada propriedade pontual e instantânea do meio em $(\mathbf{x}, t)$; isto é, a descrição é feita através de funções das variáveis $(\mathbf{x}, t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, e

2. através da formulação de Lagrange, em que o observador acompanha um ponto a partir de sua posição inicial, em sua trajetória que segue o fluxo do meio contínuo. A descrição, neste caso, é feita através de funções das variáveis $(\mathbf{A}, t)$, onde $\mathbf{A}$ é a coordenada da posição inicial do ponto; poderíamos dizer que $\mathbf{A}$ é o nome da "partícula" observada. Neste caso, o termo "partícula" está mais próximo do conceito de ponto geométrico e *não* é uma tentativa de representar uma partícula de matéria propriamente dita.

Considere então a função $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$: *posição* no instante t da "partícula" que, no instante $t = 0$ ocupava a coordenada $\mathbf{A}$. Assim, fixado $\mathbf{A}$ e variando t temos $t \to \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$: *trajetória* da "partícula" $\mathbf{A}$. Fixando t e variando $\mathbf{A}$ temos $\mathbf{A} \to \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$: *mapeamento* da posição ocupada pelo meio contínuo no instante t, em função da região ocupada inicialmente (ver Figura 7.1).

As hipóteses físicas que faremos inicialmente são:

(*i*) a existência da função $\mathbf{A} \to \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ continuamente diferenciável em $\mathbf{A}$ e t;
(*ii*) a possibilidade de invertê-la como $\mathbf{x} \to \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$; e
(*iii*) a sua diferenciabilidade com respeito a $\mathbf{x}$ e t.

$$\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ e } t; \quad \mathbf{x}(\mathbf{A}, 0) = \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t) = \mathbf{A} \quad \text{para todo } \mathbf{A} \text{ e } t; \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$$

---

* OSTER, G. Lectures in Population Dynamics. In: Di Prima, R.C. (ed.). *Lectures in Applied Mathematics*. USA, AMS, 1977, v. 16.

Estas hipóteses caracterizam, de certa forma, o conceito de contínuo como o próprio $\mathbb{R}^n$, onde cada ponto mantém a sua individualidade no processo dinâmico, sem fusão e sem fissão.

Tais hipóteses poderão ser modificadas, e encontraremos um exemplo mais adiante (Secção 7.5.3) em que isto é absolutamente necessário.

Observamos que $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ é uma função da descrição de Euler e $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ da descrição de Lagrange, e ambas servem para fazermos a transposição de uma descrição para a outra e vice-versa.

A função $\mathbf{V}(\mathbf{A}, t) = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{A}, t)$ é a *velocidade* da "partícula" $\mathbf{A}$ no instante t, e como esta representa a velocidade do meio contínuo, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t = \mathbf{V}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t))$ é o *campo de velocidades* pela descrição de Euler.

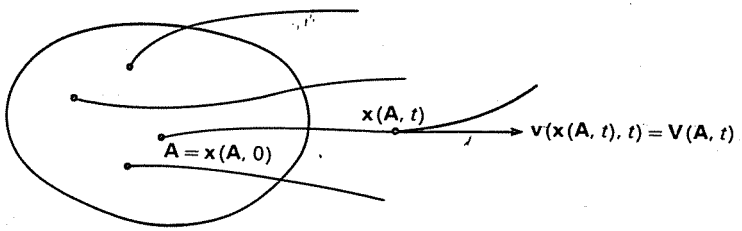


Figura 7.1

A descrição cinemática do meio contínuo se faz essencialmente através do campo de velocidades, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ou $\mathbf{V}(\mathbf{A}, t)$, e da função de fluxo, $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ ou $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. A função de fluxo pode ser obtida (teoricamente), ao integrarmos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \end{cases}$$

Desta forma, observamos que a descrição cinemática do meio contínuo e a interpretação geométrica do problema de Cauchy para as equações diferenciais ordinárias estão intimamente relacionadas. Entretanto, do ponto de vista físico os problemas são bem distintos, uma vez que em Mecânica do Meio Contínuo o campo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ *não* é um dado do problema, mas sim uma função incógnita a ser determinada a partir de equações diferenciais parciais, que a relacionam com outras propriedades do meio.

EXERCÍCIO

1. Mostre que a se a função de fluxo $\mathbf{x}(t, \mathbf{A})$ existe para todo $t > 0$ então temos

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(s, \mathbf{A})) = \mathbf{x}(t + s, \mathbf{A})$$

Utilize argumentos físicos e o Teorema de Existência e Unicidade para o problema de Cauchy. Todo campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ pode ser, por sua vez, interpretado como um campo de velocidades do meio contínuo.

A descrição completa de um meio contínuo exige a introdução de outras funções que caracterizem propriedades materiais como densidades de massas dos diversos componentes, densidade de energia térmica, densidade de carga elétrica, temperatura, campos vetoriais (velocidade, forças, campo elétrico etc.) e campos tensoriais (de deformação, de tensão, magnético, de difusão etc.).

Para o estudo de cada problema específico são escolhidas certas funções que representam matematicamente as informações essenciais para a descrição do fenômeno e, a partir de hipóteses físicas (biológicas, etc.) básicas, obtemos as equações que servirão para caracterizar matematicamente estas funções.

Um princípio elementar e útil na formulação matemática destes problemas é, a grosso modo, que o número de incógnitas seja igual ao número de equações.

Apresentamos a seguir os argumentos matemáticos para a formulação de uma ampla classe de equações diferenciais parciais que provêm dos chamados princípios de conservação. Tais princípios são de extrema importância no estudo de fenômenos físicos e biológicos, servindo como pontos de referência e balizas na descrição de processos de grande complexidade.

7.2.2 Equação de Conservação — Fórmula de Massa

Abordaremos apenas o caso *unidimensional* e. para fixarmos as idéias. começamos tratando da função $\rho(x, t)$ que representará matematicamente o conceito físico de densidade de massa por unidade de volume. O modelo unidimensional é utilizado no estudo de processos cujas características variam apenas em uma direção e se mantêm constantes em cada secção, ou então tomamos o valor médio em cada secção e obtemos apenas a variação na direção restante.

Consideremos o intervalo $[A_1, A_2]$, $A_1 < A_2$, carregado pelo fluxo do meio contínuo. Desta forma

$$x_1(t) = x(A_1, t) < x_2(t) = x(A_2, t)$$

para todo t, e se $A_1 \leqslant \bar{A} \leqslant A_2$, então $x(A_1, t) \leqslant x(\bar{A}, t) \leqslant x(A_2, t)$ e vice-versa, se $x_1 \leqslant \bar{x} \leqslant x_2$, então existe um único $\bar{A}$ no intervalo $[A_1, A_2]$, tal que $x(\bar{A}, t) = \bar{x}$ (Por quê?)

O total de massa existente neste intervalo em qualquer instante é dado por

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)dx = M(t)$$

A taxa de variação desta massa total que se encontra entre os pontos $x_1(t) = x(A_1, t)$ e $x_2(t) = x(A_2, t)$ é

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} \int_{x(A_1, t)}^{x(A_2, t)} \rho(x, t)dx$$

Para calcular esta derivada podemos usar a Regra da Cadeia com

$$F(x_1, x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)dx \quad \text{(Verifique!)}$$

ou então fazemos uma mudança de variáveis para fixar a região de integração, deixando apenas o integrando como função de t. Para isto, tomamos então a variável A e $x(A, t) = x$, para obter

$$M(t) = \int_{A_1}^{A_2} \rho(x(A, t), t) \frac{\partial x(a, t)}{\partial A} dA$$

(Utilizaremos este caminho porque sua adaptação ao caso multidimensional é direta.)

Derivando, vem

$$\frac{dM}{dt} = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x(A, t), t) \frac{\partial x}{\partial A}(A, t)\right) dA =$$

$$= \int_{A_1}^{A_2} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \frac{\partial x}{\partial A} + \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial A}\right] dA$$

Observando que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = V(A, t) \text{ e } \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial A} = \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial A} V(A, t) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial A}$$

temos

$$\frac{dM}{dt} = \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} V(A, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{\partial A} dA =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v + \rho \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\right] dx$$

A fórmula

$$\frac{d}{dt} \int_{x(A_1, t)}^{x(A_2, t)} \rho(x, t) dx = \int_{x(A_1, t)}^{x(A_2, t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\right] dx \tag{1}$$

é denominada *fórmula de Reynolds* (unidimensional).

O operador diferencial que se aplica a $\rho(x, t)$ depende do campo $v(x, t)$, ou seja,

$$L\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v)$$

Neste ponto, uma hipótese física do problema é necessária para que tenhamos *não* uma fórmula matemática válida em geral, mas uma *equação* que, conseqüentemente, dará significado físico às funções envolvidas. A hipótese física aqui utilizada pode ser expressa pela afirmação de que "a massa total contida em *qualquer* intervalo $[x(A_1, t), x(A_2, t)]$ permanece constante com o tempo", ou seja, a massa em uma região transportada pelo fluxo permanece constante. Esta afirmação, em termos matemáticos, pode ser traduzida inicialmente através de formulação original:

$$\int_{x(A_1, t)}^{x(A_2, t)} \rho(x, t) dx = \int_{x(A_1, s)}^{x(A_2, s)} \rho(x, s) ds \tag{2}$$

para todos $A_1 < A_2$ e todos t e s. A Equação (2) não é uma equação diferencial e, apesar de ser muito extensa e complicada, tem a vantagem de não exigir que a função $\rho(x, t)$ seja diferenciável, o que pode ser relevante em algumas situações.

Se a função $\rho(x, t)$ tem derivadas parciais integráveis, então podemos utilizar a fórmula de Reynolds (1) e a afirmação física pode ser traduzida por

$$\int_{x(A_1,\,t)}^{x(A_2,\,t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) \right) dx = 0 \tag{3}$$

para $A_1 < A_2$ e todo t.

Esta Equação (3) *não é uma fórmula puramente matemática*, mas uma afirmação sobre a inter-relação que existe entre as funções $v(x, t)$ e $\rho(x, t)$ (continuamente deriváveis), obtida das interpretações e hipóteses físicas dadas. Se ρ e v têm derivadas parciais contínuas, a afirmação de que, fixado t, a Integral (3) efetuada em *qualquer* intervalo $[A_1, A_2]$ é nula, é equivalente à afirmação de que o integrando é uma função nula de x para todo t fixado. A Equação (3), escrita então na forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{3'}$$

é denominada *equação diferencial parcial para a conservação da massa* (em meio contínuo com fluxo causado pelo campo de velocidades $v(x, t)$ e densidade de massa $\rho(x, t)$).

A conservação de massa e, portanto, a equação diferencial correspondente, é uma hipótese que pode ou não ser adequada para o problema a ser analisado. Se $\rho(x, t)$ se refere a uma substância componente do meio contínuo que reage quimicamente ou decai, transformando-se em outra substância, a hipótese de conservação de massa (para esta substância) pode não ser válida. Neste caso, se $f(x, t)$ é a função produção da nova substância por unidade de volume e tempo, a equação de conservação de massa deve ser substituída por

$$\int_{x(A_1,\,t)}^{x(A_2,\,t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, t)\, dx \tag{4}$$

para todo t e $x_1 < x_2 (A_1 < A_2)$.

O segundo membro da Equação (4) fornece a taxa de produção (perda) de massa por unidade de tempo em todo intervalo $[x_1, x_2]$.

A Equação (4) pode também ser escrita na forma de uma equação diferencial parcial se os integrandos forem contínuos, o que nos dará

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = f \tag{5}$$

para todo x e t.

Se temos informações independentes para a taxa de produção (nascimento)

$$n(x, t) = \frac{|f(x, t)| + f(x, t)}{2}$$

e a taxa de perda (morte)

$$m(x, t) = \frac{|f(x, t)| - f(x, t)}{2}$$

a Equação (5) toma a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}(\rho v) = n - m \tag{6}$$

Agora, analisemos esta equação sob o ponto de vista de Euler.

Retornando à equação original de conservação de massa (3), podemos escrever

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}\, dx = -\rho v \Big|_{x_1}^{x_2}$$

e, portanto

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx = \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t) \tag{7}$$

A mesma Fórmula (7) pode ser obtida através de argumentos físicos.

Fixados os extremos x_1 e x_2 de um intervalo, a taxa de variação da massa total incluída neste intervalo é dada por

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx$$

Em geral esta massa não é constante, uma vez que, sendo x_1 e x_2 fixados, há fluxo de massa através destes pontos, modificando a quantidade de massa total incluída em $[x_1, x_2]$. Observando inicialmente o ponto x_1, verificamos que a taxa de massa por unidade de tempo que "penetra" $[x_1, x_2]$ vinda da região $x < x_1$ é dada por $\rho(x_1, t)v(x_1, t)$ (lembrando que se $v(x, t)$ for positivo, o fluxo de massa é positivo em x_1). No ponto x_2 a taxa de massa por unidade de tempo que "penetra" $[x_1, x_2]$ vindo da região $x > x_2$ é dada por

$$\rho(x_2, t)\,(-v(x_2, t)) = -\rho(x_2, t)v(x_2, t)$$

(sendo $v(x, t)$ positivo, o fluxo de massa é negativo em x_2, isto é, a massa está sendo retirada de $[x_1, x_2]$ em x_2) (ver Figura 7.2).

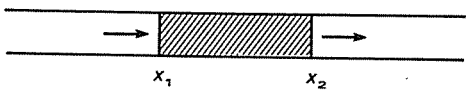


Figura 7.2

Impondo a hipótese de conservação de massa, isto é, de que não há produção e nem perda de massa no meio contínuo, mas apenas transporte dela, a tradução matemática deste fato será

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t)\, dx = \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t)$$

que é a Equação (7) obtida anteriormente!

O termo $\rho(x, t)v(x, t) = \rho v$ adquire então um significado físico importante: é a quantidade de massa que atravessa x na direção positiva por unidade de tempo, também chamado *fluxo de massa*.

Resumindo, a Lei de Conservação de Massa, analisada do ponto de vista de Euler, é constituída de uma equação diferencial parcial que relaciona a densidade de massa à função que fornece o fluxo de massa em cada ponto, sendo uma forma conveniente e bastante geral de leis de conservação.

Uma *lei geral de conservação* é constituída dos seguintes ingredientes:

(*i*) $\rho(x, t) \equiv$ densidade volumétrica da propriedade a ser analisada,
(*ii*) $\phi(x, t) \equiv$ fluxo desta propriedade através do ponto x na direção positiva.
(*iii*) $f(x, t) = n(x, t) - m(x, t) \equiv$ fonte desta propriedade, onde $n(x, t) \equiv$ taxa de produção por unidade de tempo e volume, $m(x, t) \equiv$ taxa de perda por unidade de tempo e volume.

Com tais ingredientes podemos escrever uma lei geral de conservação na seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)\, dx = \phi(x_1, t) - \phi(x_2, t) + \int_{x_1}^{x_2} (n(x, t) - m(x, t))\, dx$$

para todo $x_1 < x_2$ e $t \geqslant 0$.

Supondo que as funções envolvidas tenham derivadas parciais contínuas, podemos escrever

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (n(x, t) - m(x, t))\, dx$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + (n - m) \tag{8}$$

para todo x e t.

Observações:

Na Lei de Conservação de Massa o conhecimento do campo de velocidades só é necessário para se obter a expressão da função fluxo. Em uma lei geral de conservação a função fluxo desempenha um papel fundamental, como veremos a seguir.

7.2.3 Equação de Conservação da Quantidade de Movimento para um Meio Unidimensional

A descrição do estado de um meio contínuo unidimensional exige, como já vimos, pelo menos duas funções $\rho(x, t)$ e $v(x, t)$ e até o momento temos apenas uma Equação (3′) (Lei da Conservação de Massa) que relaciona estas duas incógnitas. Podemos obter uma segunda equação analisando o processo dinâmico por meio de hipó-

teses extrapoladas da Segunda Lei de Newton: "a taxa de variação da quantidade de movimento mv de uma partícula é igual à resultante das forças aplicadas sobre esta partícula".

É razoável considerar a quantidade de movimento total de um segmento $[x_1, x_2]$ do meio contínuo como sendo dada por

$$P(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho v \, dx = \int_{x_1}^{x_2} v \, dm$$

ou seja, ρv é a densidade da quantidade de movimento. Vamos supor então que o segmento $[x_1, x_2]$ seja destacado do meio contínuo para observação e continue mantendo sua identidade material no processo, isto é, $x_1 = x(A_1, t)$ e $x_2 = x(A_2, t)$ e o segmento se movimenta como um corpo unidimensional interagindo em x_1 e x_2 com o restante do meio.

Sabemos da Fórmula de Reynolds (1) para ρv que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x(A_1, t)}^{x(A_2, t)} (\rho v) \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial(\rho v)}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) v \right) dx$$

A expressão para as forças que atuam sobre $[x_1, x_2]$ pode ser separada inicialmente em dois tipos: forças de "volume" que agem sobre todo o segmento (como a gravidade) e forças de contato que agem apenas na fronteira do segmento; neste caso, através de x_1 e x_2.

Supondo que g_1 seja a componente longitudinal na direção positiva da aceleração da gravidade, a única força de volume a ser considerada será

$$\int_{x_1}^{g_1} g_1 \rho \, dx$$

A caracterização das forças de contato é um pouco mais delicada e este talvez tenha sido o maior obstáculo para a formulação da Mecânica do Meio Contínuo a partir da Mecânica Newtoniana. No caso unidimensional a geometria do problema é simples, não apresentando maiores dificuldades. Seja x_0 um ponto do meio contínuo e $x < x_0$ e $x > x_0$ suas duas partes contíguas. Chamamos de $T(x_0, t)$ a força por unidade de área que a parte $x > x_0$ exerce sobre a parte $x < x_0$ (observe a ordem convencionada) (ver Figura 7.3). Esta função $T(x_0, t)$ é chamada *tensão*. Fazendo a hipótese física de que a Lei de Ação e Reação seja válida, concluímos que a força que a parte $x < x_0$ exerce sobre $x > x_0$ deve ser $-T(x_0, t)$. Desta forma, a força que

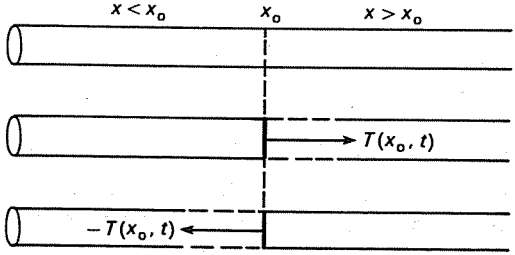


Figura 7.3

$x > x_2$ exerce sobre $[x_1, x_2]$ é $T(x_2, t)$, e a força que $x < x_1$ exerce sobre $(x_1, x_2]$ é $-T(x_1, t)$; logo a força de contacto será

$$T(x_2, t) - T(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

A equação dinâmica toma, então, a forma

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v v}{\partial x} = \rho g_1 + \frac{\partial T}{\partial x} \tag{9}$$

Supondo válida a equação de conservação de massa, podemos escrever (Verifique!)

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho g_1 + \frac{\partial T}{\partial x} \tag{9'}$$

que é chamada *equação diferencial de Cauchy* para a Dinâmica do Meio Contínuo unidimensional.

Analisando a Equação (9) podemos escrevê-la como

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho v v - T) + \rho g_1$$

A expressão $(\rho v v - T)$ desempenha o papel de fluxo de Q.M. (quantidade de movimento); o termo $\rho v v$ representa o fluxo de Q.M. transportado pela massa e $-T$ o fluxo de Q.M. causado pelas forças de contacto. O termo ρg_1 aparece como função de produção de Q.M. interna. Portanto, (9') é uma equação de conservação da forma geral (ver Equação (8)), denominada *equação de conservação da quantidade de movimento*.

Observe que agora temos duas equações diferenciais parciais, ou seja, a Equação (3') da Secção 7.2.2 e a Equação (9) desta Secção, relacionando as incógnitas $\rho(x, t)$ e $v(x, t)$. Mas, como introduzimos uma terceira incógnita, $T(x, t)$, necessitaremos de uma outra equação. Assim, a dificuldade permanece, uma vez que corremos o risco de introduzir novas funções para a descrição do processo físico na formulação de uma terceira equação. Esta dificuldade é típica quando elaboramos um modelo matemático e deve ser analisada com argumentos matemáticos e físicos (ou biológicos) inerentes ao próprio problema específico em questão. Uma nova equação deverá, pois, fornecer o comportamento das tensões internas do meio como função apenas da densidade e da velocidade, se quisermos fechar o sistema. Como esta equação dependerá essencialmente do tipo de material do qual o meio contínuo é constituído, ela é denominada *relação constitutiva*.

Existem dois tipos de situações importantes que abordaremos rapidamente a seguir:

1. *Fluido Barotrópico Ideal*: fluido ideal é aquele em que duas parte contíguas só podem interagir na direção normal à superfície de contacto, por meio de pressões. No caso unidimensional isto quer dizer que $T(x_0, t)$ é sempre negativa (ver Figura 7.4).

I. M. E. C. C.
BIBLIOTECA

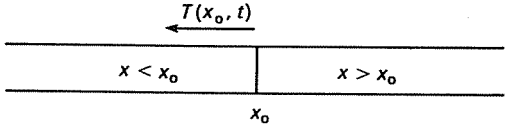


Figura 7.4

Um fluido barotrópico é aquele no qual a pressão em cada ponto depende apenas da densidade do fluido. Para maiores informações sobre este assunto consulte um bom livro de Termodinâmica*.

Portanto, para um fluido ideal barotrópico temos,

$$T(x, t) = -P(\rho(x, t))$$

onde a função $P(\rho)$ é uma relação constitutiva característica do fluido, sendo pois um dado do problema. Assim, o sistema de equações diferenciais parciais que modela o fluxo unidimensional de um fluido barotrópico ideal pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad \text{(equação de conservação de massa)} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial x}P(\rho) + g_1 \quad \text{(equação de conservação de Q.M.)} \end{cases} \tag{10}$$

ou então

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}v^2 + H(\rho) + g_1 x\right) \end{cases} \tag{11}$$

onde $H(\rho) = \displaystyle\int^{\rho} \frac{1}{r} P(r)\, dr$. (Verifique!)

Para gases ditos politrópicos temos $P(\rho) = A\rho^{\gamma}$ e, portanto, $H(\rho) = \dfrac{A}{\gamma}\rho^{\gamma}$. Observe que o Sistema (11) está na forma de uma Lei de Conservação Vetorial

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} G(\mathbf{u}) = \mathbf{n}$$

onde

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} \rho(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix}, \quad G(\rho, v) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \dfrac{1}{2}v^2 + H(\rho) \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{n}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 x \end{pmatrix}$$

---

* FERMI, E. *Thermodynamics*. New York, Dover, 1956.
SEDOV, L. *Mecanique de Millieux Continus*. Moscou, Mir, 1975, v. 1.

No caso do fluxo de gases, as forças de pressão são muito maiores do que a força gravitacional, que pode ser então eliminada de (11). Neste caso, obtemos as famosas equações de Euler para o fluxo unidimensional de gases barotrópicos ideais

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v \\ \dfrac{1}{2} v^2 + H(\rho) \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

O estudo da propagação de ondas sonoras é baseado nestas equações.

Em grande parte dos casos, todavia, não há necessidade de considerarmos o sistema completo, pois a propagação sonora tem certas características físicas que permitem algumas simplificações.

Vamos analisar, por exemplo, a propagação de som através de um gás cuja velocidade de fluxo seja negligenciável, comparada à velocidade de propagação do som.

Observamos no processo físico que a passagem da onda sonora provoca uma variação rápida, mas pequena na posição das partículas e na densidade (e, portanto, na pressão) do gás.

O efeito físico que caracteriza sensorialmente o som é exatamente esta variação de pressão advinda da variação da densidade. Portanto, devemos estudar a densidade do gás na forma

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \Delta(x, t)$$

onde $\rho_0(x)$ é a densidade do gás em "repouso" e $\Delta(x, t)$ a variação, suposta pequena.

Consideraremos nas equações apenas os termos de primeira ordem em $\Delta(x, t)$ e $v(x, t)$.

Então, da equação de conservação da massa vem que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - v \frac{\partial \Delta}{\partial x} - (\rho_0 + \Delta) \frac{\partial v}{\partial x}$$

de onde obteremos a aproximação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial (\rho_0 v)}{\partial x} \tag{*}$$

Se agora na equação dinâmica

$$(\rho_0 + \Delta) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -P'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

consideramos a seguinte aproximação

$$P'(\rho) = P'(\rho_0 + \Delta) = P'(\rho_0) + \Delta P''(\rho_0) + \frac{\Delta^2}{2} P'''(\rho_0) + \ldots \simeq P'(\rho_0)$$

obteremos

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -P'(\rho_0) \frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{**}$$

Derivando (*) com relação a t e (**) com relação a x, obtemos

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 (\rho_0 v)}{\partial x \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 (\rho_0 v)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P'(\rho_0)\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$$

Comparando estas duas equações, temos finalmente

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(P'(\rho_0)\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \tag{13}$$

que é denominada *equação de propagação do som* da Acústica Linear.

Se ρ_0 é constante, então

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = C^2(\rho_0)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},\ C^2(\rho_0) = P'(\rho_0) > 0 \tag{14}$$

$C(\rho_0)$ será identificada como a velocidade de propagação do som, por motivos que ficarão claros mais adiante.

2. *Meio Unidimensional Elástico*: nesta situação vamos nos restringir ao caso em que os deslocamentos de cada ponto do meio, a partir de uma posição de repouso, são muito pequenos. Pretendemos assim estudar a dinâmica das pequenas deformações longitudinais de uma barra elástica.

O conhecimento do comportamento material do meio contínuo nos induz *a priori* a certas hipóteses naturais sobre a solução do problema a ser estudado. Isto pode parecer contraditório, uma vez que nosso objetivo é exatamente obter esta solução ainda desconhecida. (Em muitas aplicações os argumentos extramatemáticos simplificadores são tão convincentes quanto necessários. Entretanto, em muitos outros casos é a própria necessidade deles que nos convence a utilizá-los. Se *a posteriori* a solução encontrada não corresponder às hipóteses iniciais, é óbvio que estamos diante de um modelo contraditório e que deve ser modificado).

Vamos analisar nosso problema levando em consideração a formulação de Lagrange. Verificamos que um pequeno segmento $[A, A+\delta]$ deformado em $[x(A,t), x(A+\delta,t)]$ sofre uma variação relativa de

$$\frac{[x(A+\delta,t)-x(A,t)]-[(A+\delta)-A]}{[(A+\delta)-A]}$$

que no limite pontual nos dá $\dfrac{\partial x}{\partial A} - 1$; $U(A,t) = x(A,t) - A$ é o deslocamento do ponto A e

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \frac{\partial x}{\partial A} - 1$$

é a *deformação pontual.*

A hipótese clássica de Hooke é que a "tensão necessária para se efetuar uma deformação em uma mola perfeitamente elástica é proporcional a esta deformação"

$$T(A,t) = k\frac{\partial U}{\partial A}$$

onde k é o módulo de Young.

Em geral a tensão é uma função não linear da deformação e de outras características ou estado do material, como sua temperatura. Supondo, entretanto, a temperatura constante e a deformação muito pequena, do fato de $T(A,t)=f\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)$, onde $f(0)=0$, é razoável utilizar a aproximação

$$f(\varepsilon)\cong f(0)+f'(0)\varepsilon=f'(0)\varepsilon$$

que é a hipótese de Hooke para $k=f'(0)$.

Em geral a constante $k=f'(0)$ tem um valor muito grande (da ordem de 10^{12} dinas/cm^2 para o aço) e, portanto, pequenas deformações dão origem a grandes tensões, e vice-versa.

Vamos analisar agora o movimento longitudinal de um meio elástico unidimensional em que a relação constitutiva é dada por $T(A,t)=f\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)$. Utilizamos neste caso a formulação lagrangeana, uma vez que existe uma configuração inicial de referência que é o estado não deformado do meio.

A equação dinâmica

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial T}{\partial x}+\rho g_1$$

pode ser colocada na forma lagrangeana se observarmos que

$$V(A,t)=v(x(A,t),t) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}$$

também

$$V(A,t)=\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial A}\ \frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial A}\ \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial A}}$$

Assim, com estas modificações, a equação dinâmica pode ser escrita por

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial A}f\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial A}\right)^{-1}+\rho g_1$$

ou

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=f'\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial A^2}\left(\frac{\partial x}{\partial A}\right)^{-1}+\rho g_1$$

A Lei de Conservação de Massa na formulação lagrangeana nos dá

$$\rho(A,t)\frac{\partial x}{\partial A}=\rho_0(A)=\rho(A,0) \qquad \text{(Verifique!)}$$

que substituída na equação acima resulta na seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{f'\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)}{\rho_0(A)}\ \frac{\partial^2 U}{\partial A^2}+g_1 \tag{15}$$

onde a incógnita $U(A, t)$ representa a deformação lagrangeana e $\rho_0(A)$ e g_1 são dados do problema.

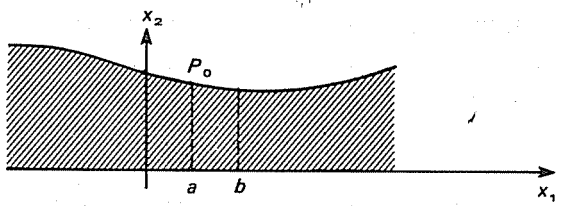
No caso linear, (15) vem dada por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho_0(A)} \frac{\partial^2 U}{\partial A^2} + g_1 \tag{16}$$

As Equações (15) e (16) são chamadas *equações para propagação de onda*; neste caso, ondas elásticas longitudinais.

EXERCÍCIOS

1. Obtida $U(A, t)$ como solução da equação acima, calcule $\rho(A, t)$.
2. Ondas gravitacionais de superfícies em hidrodinâmica ideal.



Perfil do canal

Suponha que a pressão atmosférica seja constante P_0 acima do nível da água e consideremos como incógnitas do problema:

a. $h(x_1, t) =$ altura do nível da água para cada secção x_1 do canal e instante t;
b. $u(x_1, t) =$ velocidade média horizontal do fluido.

A quantidade de massa por unidade de comprimento x_1 é

$$\frac{dm}{dx_1} = L\rho h(x_1, t) \qquad \begin{array}{l} \rho = \text{densidade constante do fluido} \\ L = \text{largura do canal} \end{array}$$

Obtenha a Lei de Conservação de Massa, observando que o fluxo é $\phi = L\rho uh$.

Considere a pressão como sendo hidrostática (ondas rasas) dada, portanto, pela expressão $P(x_1, x_2, t) = P_0 + \rho g(h(x_1, t) - x_2)$.

Obtenha a equação de conservação para a quantidade de movimento e complete o sistema de equações para $\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$*.

7.2.4 Lei de Conservação de Energia — Equação de Difusão

A relação constitutiva que nos fornece a tensão em termos da característica e do estado do material depende, em alguns casos, de forma considerável da temperatura do meio $\theta(x, t)$, que não pode ser obtida das outras incógnitas. Isto pressupõe que devamos ter uma quarta equação para fechar o sistema. Esta nova equação é geralmente obtida da hipótese de *conservação de energia*, sendo consideradas a energia mecânica e a energia térmica. Neste caso devemos introduzir uma nova função $\varepsilon(x, t)$:

* STOKER, J.J. *Water Waves*. New York, Wiley, 1957.

densidade de energia térmica por unidade de massa, o que nos leva a buscar uma quinta equação de estado que relacione ε, ρ e θ.

Observe que em todos os casos o sistema só é fechado com uma relação constitutiva que escapa às considerações puramente da Mecânica do Meio Contínuo e provém do conhecimento da microestrutura da matéria.

Para simplificar a questão consideramos aqui a equação de conservação da energia apenas no caso em que o sistema mecânico está em repouso e há apenas modificações na energia interna do meio.

A energia térmica total no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$E(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)\varepsilon(x, t)\, dx$$

A modificação desta energia só poderá ocorrer pelos seguintes motivos:

1. Produção ou perda de energia térmica internamente, causadas pela passagem de uma corrente elétrica, por uma reação química, por absorção ou emissão de radiação, ou por fluxo de calor através da fronteira longitudinal da barra.

Seja $f(x, t)$ a função fonte que representa a produção ou perda de energia térmica por unidade de massa e tempo.

2. Fluxo de energia térmica através das extremidades x_1 ou x_2. Para descrever este fluxo definimos a função $\phi(x_0, t)$: energia térmica por unidade de tempo que passa de $x < x_0$ para $x > x_0$.

Com isto a equação de conservação de energia fica

$$\frac{dE}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\rho)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho f dx + \phi(x_1, t) - \phi(x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\rho f - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx$$

para todo $x_1 < x_2$.

Supondo que as funções envolvidas nesta equação tenham derivadas contínuas, podemos escrever

$$\frac{\partial(\varepsilon\rho)}{\partial t} = \rho f - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Se não consideramos fluxo de massa, podemos supor que ρ seja constante com o tempo e escrevemos ε e ϕ por meio de relações constitutivas em função da temperatura $\theta(x, t)$, que será assim a única incógnita do problema.

Tomemos inicialmente $\varepsilon = c\theta$ onde $c(x)$ é uma constante de calor específico que pode variar com a composição do material ao longo de x.

Para escrever $\phi(x, t)$ em termos de $\theta(x, t)$ utilizamos a Lei de Newton-Fourier

$$\phi(x, t) = -k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

significando que o fluxo de calor é proporcional à variação da temperatura e se dá no sentido contrário ao do gradiente desta (da região de maior temperatura para a região de menor temperatura).

O coeficiente k, chamado *condutividade térmica*, depende em geral do ponto e da temperatura.

Desta forma, a Lei de Conservação de Energia Térmica vem escrita como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(\theta, x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + f \tag{17}$$

Tal expressão é denominada *equação de difusão de calor* (para um meio contínuo unidimensional estacionário).

Se k, ρ, c são constantes e não há produção ou perda interna temos a equação clássica da difusão do calor

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{18}$$

7.2.5 Lei de Conservação de Massa com Difusão

Obtivemos na Secção 7.2.2 a equação de conservação de massa para um meio contínuo em que a única forma de transporte de massa considerada era devida ao movimento macroscópico do meio: *a convecção*.

Consideraremos agora um meio contínuo unidimensional em que se encontra diluída uma outra substância de densidade $\delta(x, t)$. Podemos assim considerar duas equações de conservação de massa separadamente para cada substância. Suponhamos que o meio contínuo de fundo tenha densidade $\rho(x, t)$ e velocidade $v(x, t)$ e, portanto, satisfaça

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

Consideremos agora a substância diluída que pode ser transportada pelo movimento macroscópico mecânico do meio, dado por $v(x, t)$, e que pode também ser transportada por um processo de difusão. O fluxo desta substância através do ponto x_0, que é igual à quantidade de massa por unidade de tempo que atravessa x_0, no sentido de $x < x_0$ para $x > x_0$, é constituído de dois termos. O primeiro deles é o fluxo macroscópico, dado por

$$\delta(x_0, t)v(x_0, t) = \phi_1(x_0, t),$$

também chamado convecção, e o segundo, o fluxo microscópico causado pela difusão que descreveremos pela Lei de Fick

$$\phi_2(x_0, t) = -k\frac{\partial \delta}{\partial x}$$

semelhante à Lei de Newton-Fourier para a difusão do calor.

Assim, supondo não haver produção ou perda interna, a Lei de Conservação de Massa para esta substância será

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\delta(x,t)\,dx=\phi_1(x_1,t)-\phi_1(x_2,t)+\phi_2(x_1,t)-\phi_2(x_2,t)=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}-\frac{\partial}{\partial x}(\delta v)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)dx$$

para todo $x_1<x_2$, de onde tiramos

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\delta v)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\delta}{\partial x}\right) \tag{19}$$

Considerando o meio contínuo estacionário (macroscopicamente), temos

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\delta}{\partial x}\right) \tag{20}$$

onde k depende, em geral, da concentração δ. Em alguns casos k pode ser considerado constante e, portanto, a equação de difusão fica sendo

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}=k\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} \tag{21}$$

Observe que as equações desta Secção e da Secção 7.2.4 são formalmente idênticas e denominadas *equações de difusão*.

Os processos de difusão, vistos como transportes microscópicos de massa, são geralmente muito mais lentos que os processos macroscópicos (também chamados *convecção*) e estes problemas são caracterizados por difusão lenta e convecção rápida.

EXERCÍCIO

1. Obtenha a equação de transporte de energia térmica considerando a difusão microscópica e a convecção macroscópica. Use argumentos semelhantes aos empregados anteriormente.

Um dos grandes sucessos da aplicação da matemática à Biologia foi a teoria desenvolvida por A. L. Hodgkin e A. F. Huxley que consiste basicamente em um modelo matemático para a propagação de impulsos elétricos através de células nervosas. (Por este trabalho receberam o Prêmio Nobel de Fisiologia e Medicina em 1963, juntamente com J.C. Eccles.)

O modelo é construído a partir de uma Lei de Conservação para a densidade $\rho(x,t)$ de carga elétrica: $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial J}{\partial k}+f$, onde J é o fluxo e f a fonte.

Se c é a capacidade elétrica por unidade de comprimento então $\rho=cV$, onde V é a diferença de potencial elétrico para o estado de equilíbrio e a relação constitutiva para o fluxo J é tomada linear (Lei de Ohm): $J=\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial x}$, r constante.

O ponto principal do modelo é a obtenção de f em função de V, o que resultou de experimentos e de argumentos extremamente engenhosos envolvendo a permeabilidade e troca de íons de sódio e potássio através de membranas celulares. A equação final é da forma

$$c\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+I(V)$$

chamada equação de Hodgkin-Huxley, que é uma equação de difusão com fonte*.

Uma outra famosa equação do tipo difusão

$$\frac{\partial V}{\partial t}=k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+F(V)$$

foi introduzida e estudada por A. N. Kolmogorov, I. Petrovski e N. Piskunov para um modelo de propagação de genes em uma população, e que difere da equação de Hodgkin-Huxley apenas pelo termo correspondente à fonte $F(V)$.

7.2.6 Leis de Conservação em Dinâmica Populacional

Nos modelos de dinâmica populacional discutidos em capítulos anteriores a variação da população era considerada unicamente como função do tempo, o que nos fornecia equações diferenciais ordinárias.

Vamos agora analisar a dinâmica de uma população considerando não apenas o número total de indivíduos, mas também a sua *distribuição* (em densidade) nas diversas faixas etárias, por meio de uma função $\rho(x, t)$.

Com a função $\rho(x, t)$ queremos expressar o número de indivíduos (por faixa de idade) na idade x, no instante t. Em outras palavras, se $N(x, t)$ indica o número de indivíduos de idade $0 \leqslant i \leqslant x$ no instante t, então

$$\rho(x,t)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\begin{pmatrix}\text{n.º de indivíduos entre as idades}\\ x \text{ e } x+\Delta, \text{ no instante } t\end{pmatrix}}{\Delta}$$

Observe que ao considerarmos $\rho(x, t)$ (e $N(x, t)$) uma função contínua e diferenciável em x e t, adotamos o mesmo ponto de vista que trata um gás como um meio contínuo, e não como uma coleção de átomos. É claro que isto só é razoável se a população for muito "grande"!

Consideremos agora um intervalo $[x_1, x_2]$ $(x_1 \geqslant 0)$ e

$$P(t)=\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t)\,dx=\begin{Bmatrix}\text{n.º de indivíduos com idade}\\ \text{entre } x_1 \text{ e } x_2 \text{ no instante } t\end{Bmatrix}$$

---

* SEGEL, L. (ed.). *Mathematical Models in Molecular and Cellular Biology*. New York, Cambridge University Press, 1980. Nesta obra o leitor encontrará várias referências a respeito do assunto de que estamos tratando.

Vamos analisar a taxa de variação desta quantidade e algumas hipóteses sobre as causas desta variação.

Verificamos inicialmente que a variação de $P(t)$ se deve a dois fatores primordiais:

1. Mortalidade nesta faixa etária. Por hipótese consideramos que a taxa de mortalidade $m(x, t)$ para cada idade x e instante t, isto é

$$m(x, t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\begin{pmatrix}\text{n.º de indivíduos mortos com idade} \\ \text{entre } x \text{ e } x+\Delta, \text{ no instante } t\end{pmatrix}}{\Delta}$$

é proporcional à distribuição de indivíduos por idade $\rho(x, t)$. Isto nos fornece

$$m(x, t) = \mu(x, t)\rho(x, t)$$

onde $\mu(x, t)$ é chamado coeficiente específico de mortalidade.

2. Fluxo de indivíduos de idades $x < x_1$ que entram na faixa $[x_1, x_2]$ e de indivíduos desta faixa que saem para as idades $x > x_2$. Analisamos este fluxo em x_1. No intervalo de tempo $(t, t+\Delta t)$, supondo $\Delta t > 0$ pequeno, os indivíduos que penetram na faixa $[x_1, x_2]$ são aqueles que estão na faixa $[x_1 - \Delta t, x_1]$, em número aproximadamente igual a $\rho(x_1, t)\Delta t$ e, portanto, temos

$$\frac{\rho(x_1, t)\Delta t}{\Delta t} \to \rho(x_1, t) \text{ quando } \Delta t \to 0$$

por unidade de tempo. O fluxo em x_1 é positivo enquanto que em x_2 é negativo e, pelos mesmos argumentos, deve valer $-\rho(x_2, t)$.

Neste caso, a Lei de Conservação nos dá

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx = \rho(x_1, t) - \rho(x_2, t) - \int_{x_1}^{x_2} \mu(x, t)\rho(x, t)\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial \rho}{\partial x}\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \mu(x, t)\rho(x, t)\, dx$$

para todo $0 \leqslant x_1 < x_2$, de onde tiramos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = \mu(x, t)\rho(x, t) \tag{22}$$

Esta equação diferencial parcial de primeira ordem em ρ é chamada *equação de McKendrick-von Foerster*.

Observe que se soubermos a estrutura por idade da população no instante $t = 0$, isto é, se nos for dado $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$, a Equação (22) só poderá dar informações sobre a estrutura daquela parte da população com idade $x > t$, para cada instante t, uma vez que não foi fornecido o fluxo de indivíduos na extremidade de $x = 0$: taxa de nascimento. Portanto, no instante t não sabemos ainda como a população de idade $x < t$ foi gerada desde o momento inicial. Esta taxa de nascimento depende, naturalmente, da distribuição por idades da população em cada instante, pois a fertilidade dos indivíduos varia com a idade.

É razoável, pois, supor que, para uma dada situação, a taxa de nascimento em cada instante (isto é, o fluxo de indivíduos em $x = 0$ que é dado por $\rho(0, t)$) é uma média ponderada da distribuição por idade da população naquele instante, ou seja

$$\rho(0, t) = \int_0^\infty \lambda(x, t)\rho(x, t)\, dx$$

onde $\lambda(x, t)$ é chamada fertilidade específica da idade e pode ser considerada como um dado do problema que depende da microestrutura da população.

No estudo de organismos vivos a integral anterior é, na verdade, calculada em um intervalo finito, pois em geral $\lambda(x, t) = 0$ se $x > C_2$ e $0 \leqslant x < C_1$, para certas idades críticas C_1 e C_2*.

7.2.7 Leis de Conservação Multidimensional

Para desenvolver os argumentos comuns a problemas multidimensionais iniciaremos pela discussão de um exemplo concreto fornecido pelo estudo da dinâmica populacional.

No parágrafo anterior analisamos a evolução da estrutura de uma população com respeito apenas à idade dos indivíduos, o que nos conduziu a um problema unidimensional. Se considerarmos, além da idade, outros caracteres biológicos, físicos ou econômicos, estaremos diante de um problema multidimensional. Designaremos as medidas destes caracteres ordenadamente por $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ como um ponto no espaço vetorial $\mathbb{R}^m$ que será denominado de *espaço de configuração* por analogia a certos problemas físicos que serão abordados posteriormente.

Um ponto neste espaço caracteriza completamente o *estado* de um indivíduo de acordo com a descrição adotada, isto é, o ponto no espaço de configuração é uma maneira de representar, por meio de uma entidade matemática, todas as informações de um indivíduo que julgamos importantes para nosso estudo.

O objetivo do problema é analisar a distribuição da população no espaço de configuração e a evolução com o tempo desta distribuição.

Se a caracterização de cada indivíduo for marcada por um "ponto escuro" em um espaço de configuração, de dimensão 3 por exemplo, poderemos descrever o processo visualmente como a dinâmica de uma nuvem de pontos em que regiões mais escuras denotam uma maior concentração de caracteres (ver Figura 7.5).

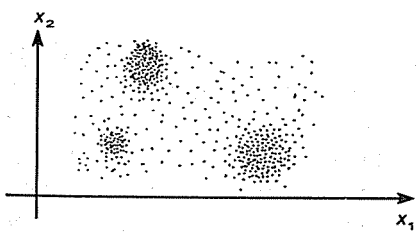


Figura 7.5

* Um tratamento detalhado deste assunto pode ser encontrado em HOPPENSTEADT, F. *Mathematical Methods of Population Biology*. New York, Cambridge University Press, 1982.

Digamos que o problema a ser estudado seja a estrutura da população brasileira relativamente à idade, localização geográfica (latitude e longitude) e situação sócio-econômica (medida, por exemplo, pelo consumo anual de proteínas). Teríamos neste caso uma população de aproximadamente 10^8 indivíduos e um espaço de configuração em $\mathbb{R}^4$, onde os caracteres analisados seriam $x_1 =$ idade, $x_2 =$ latitude, $x_3 =$ longitude e $x_4 =$ consumo anual de proteínas.

Por outro lado, se a população for constituída de um mol de determinado gás e os caracteres escolhidos forem, por exemplo, a posição no espaço tridimensional e a quantidade de movimento linear e angular, teríamos um espaço de configuração de 9 dimensões e $3{,}3 \cdot 10^{27}$ "indivíduos" (número de Avogadro).

Os conceitos desenvolvidos no estudo da dinâmica populacional podem ser usados nas mais variadas questões tais como evolução de galáxias ($\sim 10^{10}$ estrelas), culturas de microorganismos, Ecologia (macroorganismos), dinâmica de plasmas (partículas carregadas) e mesmo de populações abstratas (freqüências de oscilações de um determinado sistema).

Os modelos matemáticos para o estudo da dinâmica de grandes populações devem sua origem ao trabalho do extraordinário físico matemático Ludwig Boltzmann (1844-1906) sobre a Teoria Cinética dos Gases que objetiva estabelecer conexões entre teorias microscópicas (Mecânica Clássica para Moléculas) e teorias macroscópicas ou fenomenológicas (Termodinâmica, Elasticidade etc.).

Esta conexão entre o microcomportamento dos indivíduos e a macroestrutura da população não é somente um objetivo, mas uma necessidade imperativa no estudo de grandes populações.

O censo completo e contínuo da população brasileira com relação à idade, localização geográfica e situação sócio-econômica seria composto de $4 \cdot 10^8$ números! Estaríamos assim diante de um excesso de informações que não teríamos como utilizar e muito menos como obter.

No entanto, esta conclusão não impede que se trate a questão do ponto de vista teórico. Na verdade, é exatamente isto que faremos com o objetivo de desenvolver um modelo que descreva o processo por meio de informações que possamos obter e também analisar.

Voltemos então à visualização geométrica da estrutura de uma população como uma nuvem de pontos no espaço, de configuração que iremos supor de dimensão 2. (Este caso já apresenta todas as dificuldades conceituais das situações de dimensão superior.)

Do ponto de vista macroscópico, o que se observa a cada instante é um sombreamento do plano com regiões mais ou menos escuras, dependendo da maior ou menor concentração de pontos.

Para a construção digital de imagens (em preto e branco) é utilizado o mesmo processo, em que a coloração não é dada pela variação da intensidade da cor de ponto para ponto, mas sim pela distribuição de apenas duas cores (branca ou preta) entre os pequenos quadrados resultantes de um esquadrinhamento cartesiano do plano.

O sucesso do método provém do fato de que, para regiões muito pequenas, a nossa visão percebe apenas a luminosidade média, e não distingue sua distribuição micros-

cópica ou detalhada. Esta luminosidade média pode então ser construída descontínua e artificialmente, da forma mais conveniente para sua impressão gráfica.

O argumento que utilizaremos para a formulação deste modelo segue, de certa forma, o caminho inverso. A coloração original, neste caso, é dada pela distribuição gráfica de pontos exatamente iguais e, portanto, descontínua. Do ponto de vista macroscópico que vamos adotar, descreveremos a distribuição por meio de uma função contínua $\rho(x_1, x_2, t)$ e com isto poderemos analisar o problema com as ferramentas e técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. Desta forma

$$P(t) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \rho(x_1, x_2, t)\, dx_2 dx_1$$

deve nos fornecer a proporção da população total que, no instante t, apresenta seus caracteres na região $\{(x_1, x_2) : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1 \text{ e } a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\}$ do espaço de configuração.

Se o número total de indivíduos da população é N, então NP será o número de indivíduos da população nesta região e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x_1, x_2, t)\, dx_1 dx_2 = 1 \quad ,$$

Com esta formulação estamos descartando as informações microscópicas consideradas de pouca importância ou impossíveis de serem tratadas.

Vamos analisar agora a estrutura microscópica da população para podermos caracterizar a função $\rho(x_1, x_2, t)$. Isto geralmente é feito por intermédio de equações, quase sempre diferenciais e freqüentemente na forma de leis de conservação.

A variação na estrutura da população depende obviamente da evolução da caracterização de cada indivíduo no espaço de configuração. Para uma situação geral, a taxa de variação de um caractere x_i pode depender de vários fatores como, por exemplo:

(*i*) O instante t em que se observa o processo.
(*ii*) A posição do indivíduo no espaço de configuração.
(*iii*) A distribuição da população no espaço de configuração naquele instante.

No item (*i*) levamos em consideração fatores ditos externos, isto é, que influenciam consideravelmente a estrutura da população, mas que são pouco influenciados por ela. O item (*iii*) representa a possibilidade de interação entre os comportamentos dos diversos elementos da população; tal situação é também encontrada em sistemas mecânicos cuja evolução é descrita por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Um exemplo desta situação é o movimento de partículas com atração/repulsão mútua (gravitacional, elétrica etc.).

Designamos de modo geral por v_k a taxa de variação de um caractere x_k que iremos supor sob as condições descritas no item (*iii*). Desta forma, podemos atribuir ao espaço de configuração um campo de velocidades dependente do tempo, cujas componentes são v_k.

Analisamos então as causas da variação da população contida em um retângulo $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ fixado no espaço de configuração, e que é dada por

$$\frac{d}{dt}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\rho(x_1, x_2, t)\,dx_1dx_2 = \int_R \frac{\partial\rho}{\partial t}(x_1, x_2, t)\,dx_1dx_2$$

Estas causas podem ser divididas em dois tipos:

(*i*) devido a "nascimento ou morte" de indivíduos com caracteres situados no retângulo;
(*ii*) devido ao fluxo de caracteres de indivíduos na região fronteiriça do retângulo.

Por exemplo, se x_1 representa a idade, a condição (*i*) será representada, tal como antes, por meio da integral

$$\int_R f(x_1, x_2, t)\,dx_1dx_2 = \int_R (n(x_1, x_2, t) - m(x_1, x_2, t))\,dx_1dx_2$$

onde $f(x_1, x_2, t)$ indica a densidade de fonte.

O item (*ii*) exige maior reflexão, mas lembrando do argumento no caso unidimensional, podemos tomar um intervalo pequeno Δx_2 no lado $(a_2, b_2) \times \{a_1\}$ do retângulo R (ver Figura 7.6). É razoável supor que no intervalo de tempo Δt a quantidade de indivíduos que "passaram" por este segmento é $\rho(v_1\Delta t)\Delta x_2 +$ termos de segunda ordem em Δt e Δx_2.

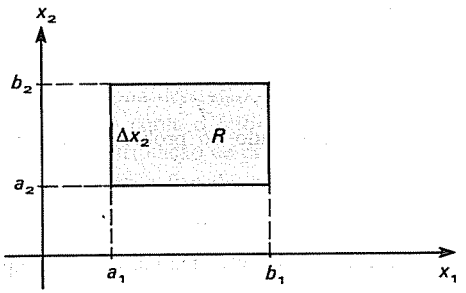


Figura 7.6

Portanto, a taxa de indivíduos que atravessaram a face $(a_2, b_2) \times \{a_1\}$, por unidade de tempo, é aproximadamente

$$\int_{a_2}^{b_2}\rho(a_1, x_2, t)\,v_1dx_2$$

Observe que se o sinal for positivo, os indivíduos estarão entrando no retângulo (e saindo, se negativo).

Na face $(a_2, b_2) \times \{b_1\}$ temos

$$-\int_{a_2}^{b_2}\rho(b_1, x_2, t)\,v_1dx_2$$

Desta forma, a variação de indivíduos no retângulo causada pelo fluxo de caracteres nas faces $(a_2, b_2) \times \{a_1\}$ e $(a_2, b_2) \times \{b_1\}$ será, aproximadamente, dada por

$$\int_{a_2}^{b_2}(\rho(a_1, x_2, t)v_1 - \rho(b_1, x_2, t)v_1)\,dx_2 = -\int_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1)\right]dx_1dx_2$$

Analogamente, os mesmos argumentos podem ser usados para as outras duas faces restantes de R, e obtemos

$$\int_R \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx_1 dx_2 = \int_R \left[-\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + f \right] dx_1 dx_2$$

Como esta igualdade é válida para todo retângulo no espaço de configuração, com hipótese de continuidade dos integrandos temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} = f$$

ou, de modo mais geral, obtemos a equação de conservação na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = f \tag{23}$$

Vejamos alguns exemplos para esta equação.

EXEMPLO 1 Dinâmica da Estrutura Populacional com Respeito à Idade e Situação Sócio-Econômica

Devemos obter inicialmente a taxa de variação com o tempo dos dois caracteres para um indivíduo representado por (x_1, x_2) no instante t. É claro que $v_1 = 1$, independente de qualquer outro fator. Entretanto, v_2 não é tão fácil de ser obtido e pode depender de x_2 e mesmo de ρ e t. Neste caso, a equação de conservação será dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2) = f$$

onde f pode assumir variadas formas, dependendo do problema específico*. ■

EXEMPLO 2 Dinâmica de Fluidos

Neste caso, o campo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ também é geralmente uma incógnita e a equação de conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

é apenas parte da formulação do problema. Outras equações serão necessárias para caracterizar a função incógnita $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$**. ■

EXEMPLO 3 Mecânica Estatística

As coordenadas x_1, x_2, x_3 nos dão a posição da partícula e v_1, v_2, v_3 nos dão sua velocidade. O espaço de configuração tem 6 dimensões $(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$, e se designarmos por a_1, a_2 e a_3 as componentes da aceleração, a equação de conservação tomará a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \rho}{\partial v_k} = 0 \tag{24}$$

que é a *equação de Liouville* supondo que a aceleração não depende da velocidade.

---

* Veja OSTER, G. Lectures in Population Dynamics. In: Di Prima, R.C. (ed.). *Lectures in Applied Mathematics*. USA, AMS, 1977, v. 16.

** Veja BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. New York, Cambridge University Press, 1967.

Por outro lado, a equação de Boltzmann introduz um termo f que leva em conta a modificação da estrutura devido às colisões*. ■

EXEMPLO 4 Galáxias

Se x_1, x_2, x_3 são as coordenadas de uma estrela e v_1, v_2, v_3 são as componentes de sua velocidade, temos satisfeita a equação de Liouville (24), desde que as colisões sejam omitidas. Sendo $a_k = -\dfrac{\partial V}{\partial x_k}$, onde V é o potencial gravitacional causado pela própria distribuição das estrelas

$$V(x_1, x_2, x_3, t) = -G \int \frac{\rho(\alpha, \beta, \gamma, t)\, d\alpha d\beta d\gamma}{\sqrt{(x_1-\alpha)^2 + (x_2-\beta)^2 + (x_3-\gamma)^2}}$$

Observe que, neste exemplo, a_k depende da configuração do sistema.

A expressão geral para a equação de Liouville é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial v_k}(\rho a_k) = 0 \tag{25}$$

que se reduz à expressão anterior (24) se os v_k não dependerem de x e se os a_k não dependerem de v. Entretanto, em certos casos, como no estudo da população de partículas carregadas, em que o campo magnético é importante, a aceleração dependerá (via Lei de Biot-Savart) das velocidades e a equação correta deve considerar este fato. ■

EXEMPLO 5 Modelo de Kermack-McKendrick para Epidemias

No Capítulo 5 analisamos o modelo de evolução de uma epidemia por meio de equações diferenciais ordinárias não lineares e tínhamos uma descrição determinística do problema. Neste exemplo estudaremos esta mesma questão, levando em conta o fator probabilístico, ou seja, não trabalharemos com o número de indivíduos, mas com uma distribuição de probabilidades sobre os diversos números possíveis.

Tomemos, por exemplo, uma população fixa de N indivíduos que será repartida em três classes:

S: número de indivíduos suscetíveis de contrair uma doença;
C: número de indivíduos contaminados;
R: número de indivíduos removidos do processo.

Suponhamos ainda que este processo seja irreversível, da forma

$$S \to C \to R$$

Uma vez que $S + C + R = N$, basta conhecermos S e R para estabelecer a estrutura do contágio.

Tomando $s = \dfrac{S}{N}$, $c = \dfrac{C}{N}$ e $r = \dfrac{R}{N}$, o modelo determinístico de Kermack-McKendrick é baseado no sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = -cs \\ \dfrac{dc}{dt} = cs - \rho c \\ \dfrac{dr}{dt} = \rho c, \ \rho \text{ constante} \end{cases}$$

onde cs é a *taxa de contágio* e ρc a *taxa de remoção*.

---

* Veja THOMPSON, C. *A Mathematical Introduction to Statistical Mechanics*. New York, Macmillan, 1972.

Consideremos agora uma função $P(s, r, t)$ que nos dá a distribuição de probabilidades da estrutura da epidemia no plano de configuração (s, r), ou seja, $\int_{s_1}^{s_2}\int_{r_1}^{r_2} P(s, r, t)\,ds dr =$ probabilidade que a população, no instante t, tenha $sN = S$ suscetíveis em $Ns_1 < S < Ns_2$, e $rN = R$ removidos em $Nr_1 < R < Nr_2$.

Podemos pensar neste modelo como resultado de uma grande quantidade de experimentos com uma população de N indivíduos que no instante t descreve uma epidemia. Fixado o instante $t > 0$, observamos em cada experimento os valores de s e r neste instante e colocamos um ponto no plano de configuração representando o resultado deste experimento. A nuvem de pontos que se formará após uma grande quantidade de experimentos nos dará uma distribuição dos resultados e $P(s, r, t)$ será a densidade de "coloração" obtida; regiões mais escuras representarão resultados mais prováveis, de acordo com esta interpretação freqüencial de probabilidade.

Nosso objetivo é analisar a evolução desta nuvem com o tempo. Cada ponto que representa um determinado experimento terá, por hipótese, uma evolução determinística dada pelas equações de Kermack-McKendrick. Desta forma, o mesmo argumento que nos conduziu à equação de conservação multidimensional nós dá

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(-csP) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho cP) = 0 \tag{26}$$

que é a *equação probabilística de Kermack-McKendrick**. ■

Observação:

O mesmo argumento do exemplo anterior pode ser usado no estudo das reações químicas.

A equação de Liouville

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \rho}{\partial v_k} = 0$$

também pode ser interpretada como uma equação para evolução de uma distribuição de probabilidade $\rho(x, v, t)$ para *uma* partícula tal como no exemplo anterior. Neste caso, o espaço de configuração é um espaço amostral, isto é, um conjunto de resultados que um determinado experimento pode produzir, espaço este dotado de uma distribuição de probabilidades.

EXERCÍCIO

1. Considere um fluxo no meio contínuo n-dimensional dado pelo campo de velocidades $v(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e pela função de Lagrange $\varphi(t, \mathbf{A})$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$. Se Ω_0 é uma região de $\mathbb{R}^n$, denotamos por $\Omega_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{A}), \mathbf{A} \in \Omega_0\}$, a região Ω_0 carregada pelo fluxo no instante t.

   Dizemos que o fluxo preserva o volume se $\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} d\mathbf{x}\right) \equiv 0$. Mostre que isto acontece se, e somente se

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \Sigma \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \equiv 0$$

   Analise este problema sob o ponto de vista de um princípio de conservação.

---

* Veja LUDWIG, D. Stochastic Population Theories. *Lecture Notes in Biomathematics*. New York, Springer-Verlag, 1978, v. 3.

7.2.8 Equação de Difusão — Movimento Browniano — Difusão de Partículas

O problema de distribuição de calor em um meio contínuo governado pela Lei de Newton-Fourier é semelhante, do ponto de vista matemático, aos problemas de difusão de partículas, bactérias e, principalmente, do chamado movimento browniano que passaremos a discutir.

Em 1827 o botânico inglês Robert Brown (1773-1858) observou que partículas diminutas de pólen suspensas em água realizavam um movimento incessante e aparentemente caótico sem um direcionamento preferencial. Várias hipóteses foram apresentadas para a explicação do fenômeno, mas nenhuma delas teve aceitação definitiva e o assunto ficou relativamente afastado do interesse principal da ciência por um longo período.

No ano de 1905, um jovem de 26 anos recém-doutorado em Física e empregado como funcionário público em Berna, escreveu quatro pequenos artigos que revolucionaram a Física: um sobre o efeito fotelétrico (que lhe valeu o prêmio Nobel), outro sobre a equivalência entre massa e energia, um terceiro sobre a Teoria da Relatividade, e um último artigo denominado "Sobre o Movimento de Pequenas Partículas Suspensas em um Líquido Estacionário Causado pela Teoria Molecular-Cinética do Calor", onde ele previa um movimento macroscópico que pequenas partículas suspensas em um líquido deveriam realizar, sob a influência das suas múltiplas colisões com as moléculas em agitação. Ao escrevê-lo, A. Einstein (1879-1957) ignorava as observações de Brown, mas a conexão entre os dois fatos foi logo apontada a ele que, em seguida, publicou um outro artigo sobre o assunto em que analisava e verificava esta conexão: "Sobre a Teoria do Movimento Browniano".

O impacto deste trabalho na Física Matemática foi enorme, não só devido às idéias que o seu modelo matemático introduzia, mas principalmente pela forma concreta com que tratava da constituição molecular da matéria. Observe que até esta data havia sérias discussões sobre a existência objetiva de átomos e moléculas.

O modelo e o tratamento matemático de Einstein possibilitou que Jean Perrin determinasse o número de Avogadro a partir de experimentos com o movimento browniano (pelo qual ganhou o prêmio Nobel em 1926) e assim confirmasse definitivamente a estrutura atômica molecular da matéria.

É interessante também observar que idéias matemáticas análogas foram desenvolvidas na mesma época por Louis Bachelier na sua tese de doutoramento com H. Poincaré sobre a variação de preços na Bolsa de Paris. Para maiores detalhes sobre o interessante aspecto histórico do desenvolvimento destas idéias o leitor poderá consultar os livros indicados na nota de rodapé desta página*.

O estudo de Einstein sobre o movimento browniano é tipicamente físico nos seus argumentos e nas suas conclusões e, sob este aspecto é convincente e razoável, mesmo

---

* BRUSH, S. G. *The Kind of Motion We Call Heat*. New York, North-Holland, 1976, v. 2.
FEVER, L. *Einstein and the Generation of Science*. New York, Basic Books, 1974.

para quem tem apenas um conhecimento elementar de Termodinâmica e Cálculo Diferencial*.

Todavia, esta impressão de simplicidade é rapidamente desfeita quando se pretende construir um modelo matemático rigoroso a partir das hipóteses físicas fundamentais.

A formulação matemática destas idéias tem constituído uma fonte de novas teorias e técnicas de enorme significado em matemática, e particularmente em equações diferenciais envolvendo nomes famosos como Paul Langevin (1872-1946), Andrei N. Kolmogorov (1903-), Richard P. Feynman (1918-), Norbert Wiener (1894-1964) e outros.

Na descrição de Langevin o movimento é analisado pela equação dinâmica

$$a_m \frac{dv}{dt} = -kv + F(t) \tag{27}$$

onde v é a velocidade de uma partícula de massa a_m e k é o coeficiente da resistência causada pela viscosidade do meio.

O termo crucial (e desconhecido como função) é $F(t)$ que representa a resultante das microscópicas colisões que esta partícula recebe das moléculas. Do ponto de vista macroscópico da partícula $F(t)$ é considerada aleatória.

Portanto, as suposições feitas acerca de $F(t)$ envolvem apenas a estatística de seus valores que serão herdadas pela solução através de equação dinâmica. Uma equação diferencial deste tipo é chamada equação de Langevin ou estocástica. Para o desenvolvimento desta teoria consulte as obras citadas na nota de rodapé desta página**.

O procedimento de Kolmogorov para a construção do modelo matemático do movimento browniano parte da função $P(x_0, t_0, x, t)$, que descreve a densidade de probabilidade de que uma partícula que se encontra em x_0 no instante t_0 se apresente em x, no instante t.

A partir de algumas hipóteses estatísticas concluímos que $P(x_0, t_0, x, t)$ deve satisfazer a equação diferencial parcial de Einstein-Kolmogorov

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial (AP)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (BP)}{\partial x^2} \tag{28}$$

onde A e B são funções de x e t. Observe que esta equação é uma equação do tipo convecção e difusão, conforme mostramos na Secção 7.2.5, Equação (19), onde A representa a velocidade de convecção (macroscópica) do meio e $\dfrac{\partial (BP)}{\partial x}$ o fluxo (microscópico) da densidade P.

O termo A representa influências externas determinísticas que direcionam preferencialmente o movimento das partículas. Se estas não existirem, tal como no caso

---

* Consulte EINSTEIN, A. *Investigations on the Theory of Brownian Movement*. New York, Dover, 1956.

** CHANDRASEKHAR, S. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. In: Wax, N. (ed.). *Noise and Stochastic Processes*. New York, Dover, 1954.

HAKEN, H. *Synergetics*. New York, Springer-Verlag, 1979.

estudado por Einstein, isto é, se a probabilidade de deslocamento à esquerda e à direita forem iguais, então obtemos a equação de difusão

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(BP) \tag{29}$$

Se B não depende de x e t temos

$$\frac{\partial P}{\partial t} = B\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{30}$$

onde B é chamado coeficiente de difusão. Por esta equação verificamos que o fluxo do meio formado pelas partículas se processa de regiões de maior densidade probabilística para regiões de menor densidade. Para maiores detalhes sobre este ponto de vista consulte o livro citado na nota de rodapé desta página*.

O modelo matemático do movimento browniano tem conexões variadas com princípios de conservação e especialmente com equações de convecção e difusão.

O tratamento elementar e intuitivo do movimento browniano que apresentaremos a seguir se deve ao físico matemático austro-polonês Marjan von Smoluchowski (1872-1917) que foi um dos precursores na generalização e diversificação das idéias e métodos introduzidos por Einstein.

Consideremos então um processo de difusão provocado pela movimentação "errática" e microscópica de partículas.

Para analisar este processo tomemos o ponto de vista de Smoluchowski e suponhamos que o meio seja dividido em células que se localizem no reticulado discreto do plano dado pelos pontos (nh, mh), $h > 0$; $n, m \in \mathbb{Z}$. Observemos o processo em intervalos de tempo Δ de tal forma que $N(nh, mh, k\Delta)$ seja o número de partículas na célula (nh, mh) no instante $k\Delta$, $k \in \mathbb{N}$. Desta forma

$$\rho(nh, mh, k\Delta) = \frac{N(nh, mh, k\Delta)}{h^2} \tag{31}$$

é a densidade de distribuição destas partículas.

Suponha agora que uma partícula colocada no ponto (nh, mh) em qualquer instante $t = k\Delta$ tenha probabilidade $\frac{1}{4}$ de passar a ocupar a posição adjacente à direita, e o mesmo para a esquerda, superior e inferior.

Analisemos agora o fluxo total de partículas através de uma reta vertical $x_1 = (n+\theta)h$, $0 < \theta < 1$, e para isto consideremos separadamente a célula (nh, mh) e $((n+1)h, mh)$ nos instantes $k\Delta$ e $(k+1)\Delta$ (ver Figura 7.7).

No instante $k\Delta$ temos $h^2\rho(nh, mh, k\Delta)$ partículas em (nh, mh) e $h^2\rho((n+1)h, mh, k\Delta)$ em $((n+1)h, mh)$. No instante seguinte $(k+1)\Delta$, $\frac{1}{4}h^2\rho(nh, mh, k\Delta)$ partículas transpuseram a reta $x_1 = (n+\theta)h$ a partir da célula (nh, mh) no sentido positivo (à direita)

* TIJONOV, A. N. & Samarsky, A. A. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Moscou, Mir, 1972.

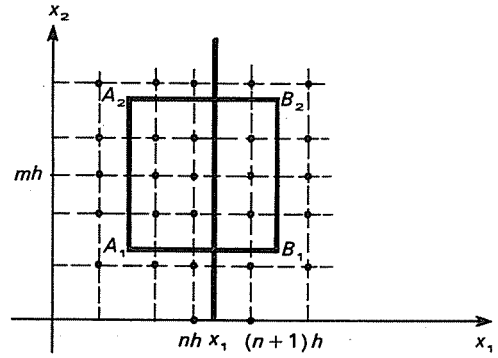


Figura 7.7

e $\frac{1}{4}\rho((n+1)h, mh, k\Delta)$ no sentido negativo. Assim, o fluxo de partículas no sentido positivo através de $x_1 = (n+\theta)h$, na coordenada mh (isto é, o número de partículas por unidade de comprimento e de tempo que transpõe a reta do sentido positivo), é dado por

$$\frac{h^2}{4}\left(\frac{\rho(nh, mh, k\Delta) - \rho((n+1)h, mh, k\Delta)}{\Delta h}\right) \tag{32}$$

Observação:

Se este valor for negativo, significa que as partículas transpuseram a reta no sentido negativo.

Consideremos agora um retângulo R de vértices A_1, B_1, A_2, B_2 (ver Figura 7.7).

Vamos analisar a variação do número de partículas envolvidas por R em instantes consecutivos $k\Delta$ e $(k+1)\Delta$

$$\sum_{(nh,\, mh)\in R} \frac{h^2}{\Delta}[\rho(nh, mh, k\Delta) - \rho(nh, mh, (k+1)\Delta] \tag{33}$$

A variação será considerada, neste caso, causada apenas pelo fluxo de partículas através da fronteira de R. Tal fluxo será tomado positivo se for no sentido de penetrar o retângulo e negativo, caso contrário. Na fase $\{A_1\} \times (A_2, B_2)$ o fluxo será

$$\frac{h^2}{4\Delta} \sum_{m=A_2}^{B_2} [\rho(A_1, mh, k\Delta) - \rho(A_1 + h, mh, k\Delta)] \tag{34}$$

(com exceção de umas poucas partículas nos cantos, desprezíveis no cômputo geral), que podemos escrever aproximadamente como:

$$\frac{h^2}{4\Delta} \sum_m -\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(A_1, mh, k\Delta)h \cong \frac{h^2}{4\Delta} \int_{A_2}^{B_2} -\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(A_1, x_2, k\Delta)\, dx_2 \tag{35}$$

Na face $\{B_1\} \times (A_2, B_2)$ o fluxo será aproximadamente (observe o sinal)

$$\frac{h^2}{4\Delta} \int_{A_2}^{B_2} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(B_1, x_2, k\Delta)\, dx_2$$

e, portanto, o fluxo no sentido positivo em ambas as faces verticais será

$$\frac{h^2}{4\Delta}\int_{A_2}^{B_2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(B_1, x_2, k\Delta)-\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(A_1, x_2, k\Delta)\right]dx_2 =$$

$$=\frac{h^2}{4\Delta}\int_{A_2}^{B_2}\left(\int_{A_1}^{B_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(x_1, x_2, k\Delta)\right]dx_1\right)dx_2=\frac{h^2}{4\Delta}\int_R\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, k\Delta)\,dx_1dx_2 \tag{36}$$

Com o mesmo argumento aplicado às faces verticais obtemos o fluxo total na fronteira de R (para seu interior) dado por

$$\frac{h^2}{4\Delta}\int_R\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, k\Delta)+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, k\Delta)\right]dx_1dx_2 \tag{37}$$

Este valor deve ser igual à variação do número de partículas interiores entre os instantes $k\Delta$ e $(k+1)\Delta$, isto é

$$\sum_{(nh,\,mh)\in R}h^2\left[\rho(nh, mh, k\Delta)-\frac{\rho(nh, mh, (k+1)\Delta}{\Delta}\right]\cong\int\frac{\partial\rho}{\partial t}(x_1, x_2, t)\,dx_1dx_2$$

Portanto, temos

$$\int_R\frac{\partial\rho}{\partial t}dx_1dx_2=\frac{h^2}{4\Delta}\int_R\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}\right)dx_1dx_2+\begin{pmatrix}\text{termos que se anulam no}\\ \text{limite quando } h, \Delta\to 0\end{pmatrix} \tag{38}$$

Tomando então o limite quando $h\to 0$ e $\Delta\to 0$, *mas mantendo a razão* $D=\dfrac{h^2}{4\Delta}$ *constante*, temos

$$\int_R\frac{\partial\rho}{\partial t}dx_1dx_2=D\int_R\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}\right)dx_1dx_2 \tag{39}$$

para todo retângulo e, portanto, supondo $\rho(x_1, x_2, t)$ diferenciável, temos

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}\right) \tag{40}$$

que é a equação de difusão em duas dimensões.

Observações:

a. O limite calculado quando $h\to 0$ e $\Delta\to 0$, com $D=\dfrac{h^2}{4\Delta}$ fixo, aparentemente arbitrário, não tem significado físico uma vez que $\dfrac{h}{\Delta}$ é a velocidade da partícula e deverá tender a $+\infty$ já que $h\left(\dfrac{h}{\Delta}\right)\to 4D$.

No entanto, se o limite é conveniente do ponto de vista matemático, não será totalmente correto do ponto de vista físico, pois h não pode ser diminuído indefinidamente quando se trata de partículas. Na verdade o que temos é h muito pequeno de modo que, na descrição macroscópica, a aproximação

$$\frac{[\rho((n+1)h, mh, k\Delta)-\rho(nh, mh, k\Delta)]}{h}\cong\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(nh, mh, k\Delta)$$

seja excepcionalmente boa, podendo-se substituir um termo pelo outro.

Para uma discussão mais detalhada consulte o artigo de Mark Kac citado na nota de rodapé desta página*.

b. Quando considerada uma situação de equilíbrio macroscópica (a distribuição não se altera com o tempo, embora o movimento microscópico das partículas continue), o mesmo argumento anterior, com devidas modificações, nos conduz à equação

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} = 0 \tag{41}$$

denominada *equação de Laplace*. O operador diferencial parcial

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \text{div grad}$$

é denominado *laplaciano*.

Em um problema tridimensional o laplaciano é análogo, isto é

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

No caso unidimensional $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$.

O operador linear Δ desempenha um papel importante na teoria das equações diferenciais e será motivo de outros comentários mais adiante.

A partir do modelo estudado podemos considerar inúmeras variantes. Por exemplo, a probabilidade de que uma partícula situada em (nh, mh) no instante $k\Delta$ esteja em $((n+1)h, mh)$ no instante $(k+1)\Delta$, pode ser dependente de m, n e k, assim como a probabilidade dos outros eventos (salto à esquerda, acima, abaixo, ou permanência).

A Lei de Conservação pode ser modificada por uma densidade de produção de partículas f que pode depender não somente de (x_1, x_2, t), mas também de ρ, o que nos levaria a uma equação do tipo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \Delta\rho = f(x_1, x_2, t, \rho) \tag{42}$$

Tal equação é muito comum no estudo de reações químicas em que duas espécies de partículas com densidade $\rho_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$, reagem entre si e com o meio, levando a um sistema do tipo

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} - \Delta\rho_i = f_i(x_1, x_2, t, \rho_1, \rho_2), \quad i = 1, 2 \tag{43}$$

chamado *sistema de equações de reação e difusão*.

Observação:

Para modelos de populações em competição (reação) em uma região onde há migração (difusão), podemos utilizar os mesmos argumentos acima.

---

* KAC, M. Randon Walk and the Theory of Brownian Motion. In: Wax, N. (ed.). *Noise and Stochastic Processes*. New York, Dover, 1954.

Um modelo simples e interessante do tipo "browniano" para o movimento de bactérias à procura de alimentos é desenvolvido por L. Segel*. Um artigo notável ligando a teoria do movimento browniano a problemas mecânicos, como o da membrana elástica (próxima secção), pode ser encontrado no artigo de R. Hersch e R. J. Grieco**.

A equação de Laplace em conexão com a torsão de uma barra e moléculas de DNA através de um modelo de movimento browniano é tratada por Segel e Smith-Watson***.

Estes exemplos em que duas teorias completamente diferentes levam a um mesmo modelo matemático não são um caso excepcional da Matemática Aplicada; ao contrário, é exatamente nestas "coincidências" ou analogias que se encontra a surpreendente eficiência que os métodos matemáticos têm demonstrado no estudo dos fenômenos naturais.

Entretanto, na história das ciências podemos constatar que algumas destas analogias passaram desapercebidas, ou não provocaram um grande interesse científico por um longo perído de tempo e com isto, desenvolvimentos importantes e já maduros ficaram adiados por várias décadas. A parte inicial do artigo de F. J. Dyson† se constitui em uma excelente leitura sobre este aspecto do desenvolvimento da ciência.

7.3 PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

7.3.1 Introdução

Problemas envolvendo o cálculo de máximos (e mínimos) têm uma história antiga em Matemática e o seu estudo através dos tempos resultou em uma extensa teoria com implicações em diversas áreas do conhecimento.

O interesse por estes problemas deriva em grande parte de sua importância prática, mas não podemos desprezar aqui as motivações de ordem estética e mesmo filosóficas que têm acompanhado o assunto, cujo desenvolvimento é um fascinante capítulo da história da Matemática††.

Um dos problemas de mínimos mais antigos na literatura matemática consiste na construção, dentre todas as curvas planas, fechadas, simples e de comprimento fixado, aquela que envolve uma região de maior área. Este problema já foi tratado por Zenodorus entre 200 a.C. e 100 d.C., e os gregos já sabiam que a sua solução é um círculo (Problema de Dido).

---

* SEGEL, L. An Introduction to Continuum Theory. In: Di Prima, R.C. (ed.). *Lectures in Applied Mathematics*. USA, AMS, 1977, v. 16.

** HERSCH, R. & Grieco, R. J. Brownian Motion and Potential Theory. *Scientific American*, 1967.

*** SEGEL, L. A. & Lin, C. C. *Mathematics Applied to Deterministic Problem in the Natural Sciences*. New York, Macmillan, 1974.

SMITH, W. & Watson, G. S. Diffusion out of a Triangle. *J. Applied Probability*, *4*: 479-488, 1967.

† DYSON, F. J. Missed Opportunities. *Bull. Am. Math. Soc.*, *78*: 635-642, 1972.

†† KLINE, M. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. New York, Oxford University Press, 1972.

No capítulo anterior tratamos do princípio de Fermat, cujo problema se reduzia a procurar uma função de uma variável em um determinado conjunto, que minimizasse a operação funcional que produz o tempo de percurso de um raio luminoso através do gráfico da função.

O método de Euler-Lagrange, introduzido no século XVIII, nos fornece então uma maneira sistemática de transformar uma classe de problemas variacionais em problemas de equações diferenciais. Quando o mínimo (ou máximo) é procurado em um conjunto de funções de uma variável, as equações variacionais de Euler-Lagrange são equações diferenciais ordinárias, tal como vimos no problema de Fermat. Entretanto, em outras situações o extremo é procurado em um conjunto de funções de várias variáveis e, neste caso, as equações de Euler-Lagrange são equações diferenciais parciais.

O método de Euler-Lagrange será o primeiro tipo de argumento que apresentaremos nesta secção para estabelecer a conexão entre problemas variacionais e as equações diferenciais parciais e será exemplificado por questões concretas em Mecânica do Meio Contínuo.

O segundo método analítico (geométrico) que estudaremos foi desenvolvido basicamente por C. Huygens (1629-1695) para o estudo também da propagação da luz e tem por base algumas idéias de notável simplicidade e elegância que podem ser amplamente generalizadas. A teoria de Huygens está fundamentada na concepção ondulatória da luz, ao contrário da concepção de raios (partículas) da teoria de Fermat. A generalização e adaptação do método de Huygens para o tratamento de problemas de controle e otimização surgidos com o avanço tecnológico e com a complexidade na administração de recursos da sociedade moderna, foram desenvolvidas nas últimas três décadas principalmente por R. E. Bellman (1920-1984) e Lev S. Pontriaguin. Estes métodos são de enorme importância em Engenharia e na área de Pesquisa Operacional e o leitor particularmente interessado neste assunto poderá consultar as referências indicadas*.

Portanto, o objetivo desta secção é estabelecer a origem comum de diversos problemas em equações diferenciais parciais da Matemática Aplicada, sob o ponto de vista unificado dos princípios variacionais.

É importante também observar que a caracterização das soluções de problemas variacionais como soluções de equações diferenciais pode ser explorada no sentido contrário, com o desenvolvimento dos chamados *métodos variacionais diretos* para o estudo de soluções de equações diferenciais.

Uma grande parte dos métodos de resolução numérica de equações diferenciais provém exatamente da formulação variacional do problema, tal como vimos pelo método de Ritz-Rayleigh no Capítulo 6. Este aspecto da questão não será tratado neste capítulo, mas o leitor interessado encontrará farto material de referência no texto.

---

* LUENBERGER, D. *Introduction to Dynamic Systems*. New York, Wiley, 1979.

7.3.2 Princípio de Dirichlet-Lagrange ou de Energia Mínima

A origem do princípio físico de mínima energia para situações de equilíbrio data pelo menos do século XVII pois, nos trabalhos de E. Torricelli (~ 1644), discípulo de Galileu, já está presente o postulado de que um sistema de corpos sob ação da gravidade será estável se o seu centro de gravidade ocupar a posição mais baixa possível. Neste caso, o que se requer é a minimização da energia potencial do sistema.

Em seu histórico trabalho sobre Mecânica de Partículas o matemático franco-italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813), autor de *Mecanique Analytique*, cuja primeira edição data de 1788, anunciou este princípio para campos conservativos em geral.

A demonstração matemática deste princípio mecânico e a sua extensão, como hipótese, para o equilíbrio de corpos elásticos, é atribuída ao matemático alemão P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), aluno de Gauss e Jacobi, que sugeriu a partir daí um método matemático de grande generalidade para o estudo das equações diferenciais parciais.

Um de seus alunos em Gottingen, o não menos famoso Georg B. Riemann (1826-1866), atento às suas sugestões, iniciou o desenvolvimento de algumas idéias baseadas no que ele mesmo denominou de Princípio de Dirichlet, que deram origem a uma parte indispensável da teoria contemporânea das equações diferenciais parciais e influenciaram decisivamente os caminhos da Matemática, do final do século XIX até hoje*.

Para maiores detalhes sobre o aspecto histórico e as disputas intelectuais que envolveram estes trabalhos consulte a bibliografia indicada**.

Analisemos agora um exemplo clássico em que o princípio de Dirichlet dá origem ao problema fundamental das equações diferenciais parciais.

Considere uma curva fechada simples C em $\mathbb{R}^3$ que limita a região plana Ω em $x_3 = 0$ e uma membrana elástica de formato (em repouso) Ω, fixada pela sua borda a $C = \partial R$, como mostra a Figura 7.8. Suponha que sobre esta membrana exista uma distribuição de peso (por unidade de área e na direção $-x_3$) dada por $f(x_1, x_2)$ de tal maneira que a sua deformação seja "pequena".

Assim, a questão proposta é a seguinte: qual é a forma de equilíbrio estático adquirida pela membrana?

---

* Como vimos no Capítulo 5, o trabalho de Lyapunov sobre a estabilidade em equações diferenciais ordinárias é, em grande parte, a transformação deste princípio em um método matemático de grande generalidade.

** COURANT, R. *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces*. New York, Springer-Verlag, 1977.

FIGUEIREDO, D. G. O Princípio de Dirichlet. *Matemática Universitária*, *1*: 63-84, 1985.

GARDING, L. The Dirichlet Principle. *The Mathematical Intelligence*, *2*: 43-53, 1979.

KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, Oxford University Press, 1972.

REID, C. *Courant, From Gottingen to New York*. New York, Springer-Verlag, 1976.

REID, C. *Hilbert*. New York, Springer-Verlag, 1970.

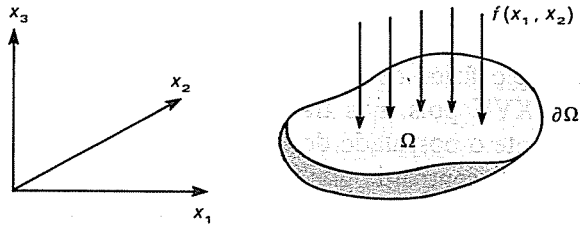


Figura 7.8

Para descrever analiticamente o problema, tomemos a função $u(x_1, x_2)$ como o deslocamento da membrana no ponto (x_1, x_2) com relação à posição de repouso $x_3 = 0$ e utilizemos a hipótese mecânica de que a densidade de energia necessária para a deformação da membrana seja proporcional à taxa de variação de sua área.

Portanto, a energia potencial da membrana carregada, em equilíbrio, provém da energia elástica acumulada internamente, assim como da energia potencial gravitacional.

Um elemento da área da membrana no estado inicial formado pelo retângulo elementar de vértices (x_1, x_2); $(x_1 + \Delta x_1, x_2)$; $(x_1, x_2 + \Delta x_2)$; $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ se transforma em um retângulo curvilíneo de vértices $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ etc. cuja diferencial de área é dada por

$$dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}\, \Delta x_1\, \Delta x_2$$

Assim, a deformação local será

$$\frac{dA - \Delta x_1\, \Delta x_2}{\Delta x_1\, \Delta x_2} \cong \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2} - 1$$

e a densidade de energia elástica acumulada será

$$\alpha\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2} - 1\right) = dE_e$$

onde α é a constante de proporcionalidade que tomaremos unitária.

A densidade de energia potencial da membrana carregada será dada por $-f(x_1, x_2)\, u(x_1, x_2)$ (tomando $x_3 = 0$ como nível de potencial nulo) e, portanto, a energia total será

$$E = E_e + E_p = \int_\Omega \left\{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2} - 1\right) - fu\right\} dx_1 dx_2$$

Observe que esta energia pode ser calculada para toda posição que a membrana possa adquirir, desde que suficientemente próxima de $x_3 = 0$, sem dobras ou quinas. (Isto é, a sua posição deve ser descrita pelo gráfico de uma função $u(x_1, x_2) = x_3$ continuamente diferenciável, definida em Ω, e com valores nulos na fronteira de R.)

---

* COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2v.

Considere então $K = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, $u \equiv 0$ em $\partial\Omega\}$, e neste conjunto teremos definido o funcional E como acima. O cálculo de E para uma configuração u será denotado por $E(u)$.

O princípio mecânico de Dirichlet-Lagrange nos diz então que a posição real da membrana será aquela que, dentre todas as configurações geometricamente possíveis, produzir o menor valor para a energia $E(u)$, ou seja, será um mínimo para o funcional E no conjunto K.

Este princípio, que parece razoavelmente claro do ponto de vista físico, quando analisado no seu aspecto puramente matemático apresenta-se cheio de dificuldades. A primeira delas se refere, naturalmente, à escolha do conjunto das "possíveis configurações", indispensável para a caracterização do mínimo (que é um conceito relativo), e a segunda diz respeito à existência de pelo menos uma função $u(x_1, x_2)$ neste conjunto, que realize este mínimo.

Estas questões causaram uma das grandes polêmicas da Matemática no século XIX e a sua solução foi germinada nos trabalhos de David Hilbert (1862-1943) em 1899, continuando o seu desenvolvimento até os nossos dias.

A intuição física do problema certamente nos leva a crer que, de fato, a solução existe no conjunto K já definido e, confiantes nisto, vamos até mais longe e procuramos esta solução no subconjunto de K formado por funções com todas as derivadas contínuas e, claro, com energia finita. Este foi o argumento de Riemann!*

A caracterização desta solução será feita por meio dos argumentos de Euler-Lagrange, inteiramente análogos ao caso unidimensional.

Para simplificar a notação e generalizar o procedimento, suponhamos que o nosso objetivo seja caracterizar uma função w que minimize o funcional

$$E(u) = \int_\Omega F(u, u_{x_1}, u_{x_2}, x_1, x_2)\, dx\, dx_2$$

no conjunto K das funções continuamente diferenciáveis em Ω e nulas na fronteira $\partial\Omega$. $F(u, u_1, u_2, x_1, x_2)$ é suposta diferenciável, tanto quanto necessário.

Suponha que w seja a solução e tomemos então $h(x_1, x_2)$ uma função *qualquer* em K. Então $u_\lambda = w + \lambda h$ também pertence a K para todo λ real. Considere agora a função real de variável real $\varphi(\lambda) = E(w + \lambda h)$.

Como $\lambda = 0$ é um ponto de mínimo para $\varphi(\lambda)$, do cálculo elementar concluímos que $\dfrac{d\varphi}{d\lambda}(0) = 0$.

---

* Para o estudo matematicamente rigoroso da análise variacional seria necessário que o leitor se familiarizasse com a análise matemática e funcional. Entretanto, o método pode ser compreendido e aplicado sem este rigor em uma grande variedade de problemas da Matemática Aplicada.

"Se o progresso em matemática e física realizado com o princípio de Dirichlet tivesse que esperar pelo trabalho de Hilbert, uma grande parte da teoria do potencial e das funções analíticas não teria surgido no século XIX" KLINE, M. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. New York, Oxford University Press, 1972.

Utilizando a expressão

$$E(w+\lambda h)=\int_\Omega F(w+\lambda h, w_{x_1}+\lambda h_{x_1}, w_{x_2}+\lambda h_{x_2}, x_1, x_2)\,dx_1dx_2$$

para calcular $\varphi'(0)$, diferenciamos com relação a λ dentro da integral e, tomando $\lambda=0$, temos

$$\frac{d}{d\lambda}E(w+\lambda h)\Big|_{\lambda=0}=$$

$$=\int_\Omega\left\{\frac{\partial F}{\partial u}(w, w_{x_1}, w_{x_2}, x_1, x_2)h+\frac{\partial F}{\partial u_1}(w, w_{x_1}, w_{x_2}, x_1, x_2)h_{x_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F}{\partial u_2}(w, w_{x_1}, w_{x_2}, x_1, x_2)h_{x_2}\right\}dx_1dx_2$$

Fazendo uso do método de integração por partes para duas variáveis* na equação anterior, concluímos que, se $E(w)$ é o valor mínimo para a energia calculada em K, então, necessariamente, para toda função $h\in K$, temos

$$\int_\Omega \phi h\,dx_1dx_2=0$$

onde

$$\phi(x_1, x_2)=\frac{\partial F}{\partial u}(w, w_{x_1}, w_{x_2}, x_1, x_2)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}(w, w_{x_1}, w_{x_2}, x_1, x_2)\right)+$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}(w, w_{x_1}, w_{x_2}, x_1, x_2)\right).$$

Não será difícil deduzir que a única função $\phi(x_1, x_2)$, contínua, satisfazendo uma condição tão restritiva como esta deva ser a função identicamente nula. (Vide Lema no final desta secção.)

Isto significa que, *se w for solução do problema variacional em K então, necessariamente, w deve satisfazer a equação diferencial parcial de Euler-Lagrange representada pela condição*

$$\phi(x_1, x_2)\equiv 0 \text{ em } \Omega,$$

acrescentada naturalmente da condição de fronteira

$$w=0 \text{ em } \partial\Omega.$$

---

* Pelo teorema de Gauss no plano (ver Courant, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2v., cap. 5), podemos escrever, para quaisquer funções f e h continuamente diferenciáveis na região limitada Ω

$$\int_\Omega f\frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1dx_2=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_1}(fh)-h\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1dx_2=\int_{\partial\Omega=C}fh\,dx_2-\int_\Omega h\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1dx_2$$

e, portanto, se h se anular na fronteira $C=\partial\Omega$, temos a fórmula de integração por partes desejada

$$\int_\Omega f\frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1dx_2=-\int_\Omega h\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1dx_2.$$

Voltemos agora ao problema inicial da membrana, mas considerando apenas a situação em que a deformação é suficientemente pequena, para que possamos substituir a expressão

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}-1$$

por

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]=\frac{1}{2}(\nabla u)^2 \ *$$

Com isto, o funcional E toma a forma

$$E(u)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}(\text{grad } u)^2-fu\right)dx_1dx_2$$

onde $F(u,u_1,u_2,x_1,x_2)=\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)-f(x_1,x_2)u$, e a equação de Euler-Lagrange para a solução w é

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=f \text{ em } \Omega$$

que é chamada *equação de Poisson* ou equação de Laplace não homogênea.

Observe que a caracterização da solução w do problema variacional é feita pela equação de Laplace (com termo não homogêneo f) *acrescentada* da condição de fronteira

$$w=0 \text{ em } \partial\Omega$$

Portanto, o problema diferencial completo é descrito na forma

$$\begin{cases}\Delta w=f & \text{em} \quad \Omega\\ w=0 & \text{em} \quad \partial\Omega\end{cases}$$

chamado *problema de Dirichlet para o operador de Laplace*

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Este é certamente o problema mais importante da teoria de equações diferenciais parciais, o que não decorre unicamente da interpretação física que apresentamos, mas sim da freqüência com que este problema ocorre nas mais variadas situações, em Eletromagnetismo, Hidrodinâmica, Difusão Térmica, Mecânica Quântica e também como parte indispensável no tratamento de inúmeros outros problemas matemáticos.

Observe que no estudo de processos de difusão em duas dimensões a equação de Poisson pode ser vista como um modelo para a distribuição de temperatura em equi-

---

* $\psi(\varepsilon)=\sqrt{1+\varepsilon}\simeq\psi(0)+\psi'(0)\varepsilon=1+\frac{1}{2}\varepsilon$.

líbrio térmico para um corpo bidimensional Ω com densidade de fonte f. O problema de Dirichlet consiste então em determinar esta distribuição de equilíbrio quando a fronteira de Ω é mantida à temperatura constante nula.

Desta maneira, invertendo os argumentos, este problema de difusão também pode ser formulado como um problema variacional. Interprete o princípio de Dirichlet para este problema físico!

Uma variação do problema consiste em procurar a distribuição de temperatura de equilíbrio em Ω com fonte f, conhecendo-se a distribuição de temperatura em $\partial\Omega$. Neste caso, temos o problema de Dirichlet com condição de fronteira não homogênea

$$\begin{cases} \Delta w = f & \text{em} \quad \Omega \\ w = h & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Interprete este problema para o caso da membrana suspensa.

O problema variacional correspondente consiste em determinar o mínimo do funcional E no conjunto $K = \{u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \in C^2,\ u = h \text{ em } \partial\Omega\}$.

Observe também que, para resolver efetivamente o problema variacional pelo método de Euler-Lagrange, devemos primeiro mostrar que existe o mínimo de $E(u)$ no conjunto de funções pré-fixado; depois resolvemos o problema de Dirichlet associado à equação de Euler-Lagrange no mesmo conjunto de funções e, finalmente, se esta solução do problema de Dirichlet for única, teremos então a solução do problema variacional.

Estamos, assim, diante de três monumentais problemas da Matemática Contemporânea.

Mostraremos apenas que, *se houver solução em um conjunto de funções com derivadas contínuas até segunda ordem*, então ela será única.

Suponha que w e $v = w + h$ sejam soluções. Então

$$E(w+h) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} [\nabla(w+h)]^2 - f(w+h) \right) =$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} (\nabla w)^2 - fw \right) + \int_\Omega (\nabla w \cdot \nabla h - fh) + \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla h)^2$$

Utilizando o Teorema de Green (integração por partes) na integral do meio obtemos

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla h - fh = \int_\Omega (\Delta w - f) h = 0$$

pois w é solução do problema variacional e, portanto, da equação de Euler-Lagrange correspondente $\Delta w = f$.

Concluímos, então, que

$$E(v) = E(w) + \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla h)^2$$

Invertendo o argumento para

$$w = v + (-h)$$

vem

$$E(w) = E(v) + \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla h)^2$$

e portanto

$$\int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla h)^2 = 0$$

Logo, $\nabla h \equiv 0$ e como $h = 0$ em $\partial\Omega$, vem que $h \equiv 0$, e, portanto, $v \equiv w$. Observe que este resultado implica na unicidade *global* do mínimo do funcional E, mas *não* assegura a sua existência! Esta é uma outra questão, muito mais difícil, que não será tratada aqui. O leitor interessado poderá consultar os livros de Garabedian e Courant & Hilbert citados na nota de rodapé desta página*.

O chamado Lema Fundamental do Cálculo de Variações é o argumento básico (ao lado da integração por partes) na formulação do método de Euler-Lagrange e, por este motivo, nos deteremos um pouco nele.

Lema: Seja Ω uma região em $\mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua em Ω, se para toda função h do conjunto $K^\infty = \{h : \Omega \to \mathbb{R},\ h$ infinitamente diferenciável e $h = 0$ em $\partial\Omega\}$, temos

$$\int_\Omega \phi h \, d\mathbf{x} = 0,$$

então, necessariamente, $\phi \equiv 0$ em Ω.

Demonstração: Suponha que ϕ não seja nula em Ω. Então, existe $\mathbf{x}^0$ interior a Ω tal que $\phi(\mathbf{x}^0) = \delta > 0$ (se $\phi(\mathbf{x}^0) < 0$, argumentamos com $-\phi(\mathbf{x})$) e, por continuidade de ϕ existe uma esfera em Ω, $D_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega,\ \| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \| \leqslant \varepsilon\}$, onde $\phi(\mathbf{x}) \geqslant \delta/2 > 0$.

Construímos agora uma função $h \in K^\infty$ da seguinte maneira:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ e^{-1/t^2} & t > 0 \end{cases}, \quad g(t) = f(\varepsilon^2 - t)$$

e $h(\mathbf{x}) = g(\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \|^2)$ tal que

$$\int_\Omega h(x)\, dx > 0$$

e $h(\mathbf{x}) = 0$ se $\mathbf{x} \notin D_\varepsilon$. Portanto,

$$\int_\Omega \phi h \, d\mathbf{x} = \int_{D_\varepsilon} \phi h \, d\mathbf{x} \geqslant \delta/2 \int_{D_\varepsilon} h \, d\mathbf{x} > 0$$

o que é contrário à hipótese. ∎

Observe que, restringindo as funções h ao conjunto $K^\infty \subset K$ provamos um lema mais abrangente.

---

* GARABEDIAN, P. *Partial Differential Equations*. New York, Wiley, 1964.
COURANT, R. & Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York, Wiley, 1962.

EXERCÍCIOS

1. Obtenha o problema de Dirichlet pelo método de Euler-Lagrange para o seguinte problema variacional: encontrar uma superfície dada pelo gráfico de $u(x_1, x_2)$ em Ω cuja borda seja fixada na curva $\hat{C}$ (se $(x_1, x_2, x_3) \in \hat{C} \Rightarrow (x_1, x_2) \in \partial\Omega = C$) e que tenha área mínima. O funcional de área é

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1 dx_2 \quad \text{(Verifique!)}$$

2. Relacione a questão anterior com o princípio de Dirichlet-Lagrange para a configuração de uma película de sabão cuja energia gravitacional é desprezível, comparada à energia de tensão superficial.
3. Obtenha o operador de Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots$ em coordenadas curvilíneas (polares, esféricas) com o seguinte argumento: procure a função nestas coordenadas que minimiza a energia elástica do problema da membrana $\left(\text{com a aproximação } \sqrt{1+\varepsilon} \sim 1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right)$, desprezando a gravidade e obtenha a equação de Euler-Lagrange correspondente.
4. Obtenha o problema diferencial de Dirichlet para a membrana elástica com a expressão completa para a energia elástica.
5. Obtenha as equações de Euler-Lagrange para os funcionais abaixo:

   a. $E_1(u) = \int_\Omega \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right\} dx_1 dx_2$

   b. $E_2(u) = E_1(u) + \int uf(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$

   c. $E_3(u) = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 dx_1 dx_2$

   d. $E_4(u) = \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right\}^2 dx_1 dx_2$

Outras aplicações e desenvolvimentos da teoria podem ser consultados em diversas obras, referidas na nota de rodapé desta página*.

7.3.3 Princípio de Hamilton

Este princípio foi originalmente introduzido também por Lagrange como uma maneira de obter uma formulação variacional para problemas da Mecânica de Partículas descritos pelas Leis de Newton.

A extensão deste princípio a problemas do contínuo tem desempenhado um papel de síntese em vários ramos da Física Matemática.

---

* PARTON, V. & Perlin, V. *Mathematical Methods in Elasticity*. Moscou, Mir, 1984.

REDDY, J. & Oden, J. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. New York, Springer-Verlag, 1983.

SOKOLNIKOFF, I. *Mathematical Theory of Elasticity*. New York, McGraw-Hill, 1956.

O exemplo que abordaremos trata do movimento oscilatório de uma membrana idêntica àquela que foi estudada na posição de equilíbrio pelo princípio de Dirichlet.

Comecemos antes rapidamente pelo problema mais simples do movimento de uma partícula de massa m em $\mathbb{R}^3$, sob ação de um campo conservativo.

A Segunda Lei de Newton nos dá a equação do movimento

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\operatorname{grad} V$$

onde V é o potencial.

A energia cinética da partícula é $T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\|^2$ e a energia potencial $E_p = V(\mathbf{x}, t)$.

Consideremos agora a questão: obter a trajetória da partícula entre os estados $(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}^0) = A$ e $B = (\mathbf{x}^1, \mathbf{v}^1)$ do espaço de fase $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, que parte no instante t_0 em A e chega no instante t_1 em B. O que Lagrange observou foi que as equações diferenciais do movimento pelas Leis de Newton eram equações variacionais para o problema que consistia na obtenção de um extremo para o funcional

$$\underset{t_0 t_1}{S(\mathbf{x})} = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}\left(\mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t), t\right) dt$$

dentre as trajetórias

$$\mathbf{x} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3 \text{ (continuamente diferenciáveis)}$$

que ligam os dois estados no espaço de fase, onde a função $\mathscr{L}$ (atualmente chamada lagrangeana do problema) é dada por

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{x}, t) = T - E_p$$

Utilize o método de Euler-Lagrange e verifique esta afirmação! O funcional S é chamado *ação*.

O princípio de Hamilton é usualmente enunciado da seguinte forma: *a trajetória real da partícula entre os dois estados* A *e* B *percorrida durante o intervalo de tempo* $[t_0, t_1]$ *é um mínimo para o funcional ação.*

O enunciado, da forma como foi apresentado, embora comum em textos clássicos de Mecânica, não é inteiramente correto; a expressão "ação mínima" deve ser substituída por "ação estacionária".

Assim, as equações de Euler-Lagrange, em geral, podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_k}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_k}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = 0; \qquad k = 1, 2, 3$$

Analisemos agora o sistema contínuo de partículas formadas pela membrana elástica.

A energia potencial é, então, dada (na forma aproximada) pelo funcional

$$E_p(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(\nabla u)^2 - fu\right) dx_1 dx_2$$

e a energia cinética é, obviamente, definida por

$$T(u)=\int_{\Omega}\rho\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx_1dx_2$$

onde ρ é a densidade de massa da membrana.

Observe que, neste caso, o estado do sistema não é um ponto em $\mathbb{R}^6=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, mas um par de funções $(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))$ e, sendo a função lagrangeana para partículas aditiva, é razoável supor que para o problema contínuo ela seja uma integral de densidades

$$\mathscr{L}(u)=\int_{\Omega}\left\{-\frac{1}{2}(\nabla u)^2+fu+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}dx_1dx_2$$

e a ação será o funcional

$$S_{t_0t_1}(u)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}(\nabla u)^2+fu\right)dx_1dx_2\right)dt$$

que pode ser vista como uma integral de $F(u, u_t, u_{x_1}, u_{x_2}, x_1, x_2, t)$ para funções $u(x_1, x_2, t)$ definidas no conjunto $\Omega_1=[t_0, t_1]\times\Omega\subset\mathbb{R}^4$.

A generalização do princípio de ação estacionária para o problema contínuo nos diz, então, que o movimento da membrana entre dois estados durante o intervalo $[t_0, t_1]$ se faz de tal maneira que a ação $S_{t_0t_1}$ seja mínima.

O método de Euler-Lagrange aplicado a este princípio nos dará a seguinte equação diferencial parcial variacional. (Verifique!)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+f=0$$

Para a densidade constante ρ, teremos

$$\Delta w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+f$$

que é a chamada equação clássica da onda.

Novamente, estamos diante de uma equação diferencial parcial obtida a partir de um simples modelo mecânico que, todavia, representa uma insuspeitada variedade de problemas de Matemática Aplicada, geralmente ligados a questões de propagação de ondas.

EXERCÍCIOS

1. Obtenha a equação da corda vibrante pelo princípio de mínima ação.
2. Obtenha a equação de vibração longitudinal de uma barra elástica cujo material satisfaz a relação constitutiva de Hooke pelo princípio de Hamilton. Compare com o resultado obtido na Secção 7.2.3.

7.3.4 Princípio de Huygens e a Equação de Hamilton-Jacobi

Encontrar-se-ão aqui demonstrações do tipo que não nos asseguram tanta certeza como as da geometria, e que são mesmo bem diversas daquelas pois enquanto os geômetras provam suas proposições partindo de postulados fixados e incontestáveis, aqui, estes postulados são verificados pelas conclusões que deles tiramos; a natureza do assunto não permite que seja de outro modo.

Christian Huygens
Traité de la Lumière
(~ 1690)

O estudo da propagação de perturbações em um meio contínuo tem a sua origem nas diversas teorias sobre a natureza da luz. As históricas controvérsias entre os adeptos da teoria corpuscular e da teoria ondulatória podem ser identificadas claramente no confronto entre os conceitos e métodos matemáticos desenvolvidos para a justificação de um ou de outro ponto de vista.

O fato de que estes conceitos são intercambiáveis através de interpretações adequadas foi um notável e precoce indício de que as duas teorias são afinal essencialmente equivalentes e que a luz (e a própria matéria) deveria apresentar as duas características simultaneamente.

Entretanto, o conceito de dualidade entre partículas e ondas foi realmente incorporado à física como uma teoria básica somente nas primeiras décadas deste século, às custas de uma verdadeira revolução filosófica-científica*.

Apresentaremos nesta secção o modelo do matemático holandês C. Huygens (1629-1695) para a propagação da luz, que procura descrever este processo físico através do conceito de frentes de onda, em contraposição à teoria de P. Fermat (1601-1665) que se baseia no conceito de trajetórias ou raios e que já foi apresentada no Capítulo 6.

Em nosso estudo não vamos nos referir especificamente à luz, mas a perturbações gerais em um meio contínuo. O significado concreto desta frase pode ser estendido muito além dos limites implícitos nela e para enfatizarmos este aspecto seguiremos a formulação de I. Gelfand e M. Tseitlin**.

O modelo de Huygens foi apresentado pela primeira vez no seu famoso livro *Traité de la Lumière*, editado em Paris no ano de 1690, portanto, 30 anos após o trabalho de Fermat. (Há uma tradução para o inglês publicada pela Encyclopedia Britannica no volume 34 da série *Great Books of the Western World*, 1980.)

Este modelo parte de algumas afirmações ("postulados") que são geralmente conhecidas como princípio de Huygens e que enunciaremos da seguinte forma:

---

* Veja FEVER, L. *Einstein and the Generations of Science*. New York, Basic Books, 1974.
WHITTAKER, E. *A History of the Theories of Aether and Electricity*. New York, Humanities Press, 1973.

** GELFAND, I. & Fomin, S. *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1963.

1. Os pontos do meio contínuo ($\mathbb{R}^n$, no nosso caso) se dividem para cada instante t em duas classes: "excitados" e "em repouso". Estas classes são separadas por uma (hiper)superfície Σ_t denominada frente de onda.

2. Uma vez excitado, o ponto permanece neste estado indefinidamente. (Não nos interessa a intensidade da perturbação mas simplesmente a passagem ou não dela no ponto, ou seja, o objetivo é estudar a cinética de propagação e não os aspectos energéticos.)

3. Um ponto excitado é uma fonte de perturbação que ele transmite continuamente em todas as direções aos seus pontos vizinhos.

Uma modificação destes *postulados* para o estudo de propagação de sinais no sistema nervoso e o estudo da evolução de configurações em sistemas discretos (autômatos finitos) pode ser feita convenientemente. Consulte a bibliografia citada*.

Observações:

a. A fronteira Σ_t entre a região excitada e em repouso e que varia com o tempo é o objeto central para a descrição do modelo, ou seja, o conhecimento da frente de onda para cada instante descreve completamente o processo do ponto de vista de Huygens.

b. A representação da frente de onda será feita analiticamente através de uma equação implícita $S(\mathbf{x}: t) = 0$, onde se supõe que a função $S: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja continuamente diferenciável e que

$$(\nabla S)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^2 \neq 0$$

para todo $(\mathbf{x}, t)$ considerado. Isto significa que estamos considerando Σ_t como uma (hiper)superfície regular em $\mathbb{R}^n$**. (Em problemas de grande complexidade geométrica, Σ_t pode não ser bem representada como uma superfície no sentido usual, mas talvez um *fractal*!***)

c. Observe que o avanço da frente de onda se deve inteiramente (dada a afirmação 3) aos pontos dela própria (ver Figura 7.9).

Figura 7.9 Avanço de frente de onda

A excitação dos pontos anteriores (E) só chegará aos pontos em repouso (R) depois que estes já tiverem sido excitados por perturbações vindas da fronteira próxima, isto é, da frente de onda Σ_t.

---

* TSEITLIN, M. L. *Automaton Theory and Modeling of Biological Systems*. New York, Academic Press, 1973.

FERREIRA, Jr., W. C. *A Dualidade de Fermat-Huygens*. Campinas, IMECC-UNICAMP, 1987 (relatório interno).

BERLEKAMP, E. R.; Conway, J. H. & Guy, R. K. *Winning Ways*. New York, Academic Press, 1982, v. 2, cap. 25.

** Veja COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2v., e ARNOLD, V. I. *Catastrofe Theory*. 2. ed. New York, Springer-Verlag, 1986.

*** Veja MANDELBROJT, B. *Fractals*. San Francisco, W. H. Freeman, 1977.

d. Em alguns fenômenos em que o amortecimento da intensidade da perturbação é muito rápido, o único efeito realmente notável se situa nas imediações da frente de onda. Neste caso, a frente de onda se constitui em um sinal nítido que é uma idealização matemática de sinais reais, difusos, que decaem rapidamente de intensidade após a sua passagem. Este fenômeno pode ser representado por um postulado **2'** em substituição a **2**, em que se caracteriza um tempo finito ou nulo de permanência da excitação.

e. Suponha que no instante $t = 0$ os únicos pontos excitados são $\{\mathbf{x} : S(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ para algum } t \leqslant 0\} = \Omega_0$. Os pontos excitados em qualquer instante $t > 0$ são denominados domínio de influência de Ω_0 e denotamos por $\Omega_t(\Omega_0)$. Se $\Omega_0 = \{\mathbf{x}_0\}$, $\Omega_t(\mathbf{x}_0)$ é denominado domínio de influência de $\mathbf{x}_0$ no instante t.

Cada ponto $\mathbf{x}_0$ pode ser pensado como uma fonte independente com seu próprio domínio de influência, que é vazio antes dele ser atingido pela perturbação. Os pontos cujos domínios de influência contém $\bar{\mathbf{x}}$ no instante t formam um conjunto denominado domínio de dependência de $\bar{\mathbf{x}}$ no instante t, $D_t(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} : \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_t(\mathbf{x})\}$.

Estes conceitos são comuns no estudo de propagação de ondas de diversos tipos e formam a linguagem típica do modelo de Huygens.

Denotaremos por $\partial\Omega_t(\mathbf{x}) = \Sigma_t(\mathbf{x})$ a frente de onda no instante t causada pela excitação do ponto $\mathbf{x}$ no instante $t = 0$.

Observe que $\Omega_t(\Omega_s) = \Omega_{t+s}(\Omega_0)$.

Observe finalmente que a construção da frente de onda $\Sigma_{t+\Delta}$ se faz pela propagação de sinais a partir de pontos $\mathbf{x} \in \Sigma_t$ em um intervalo de tempo de comprimento Δ (ver Figura 7.10).

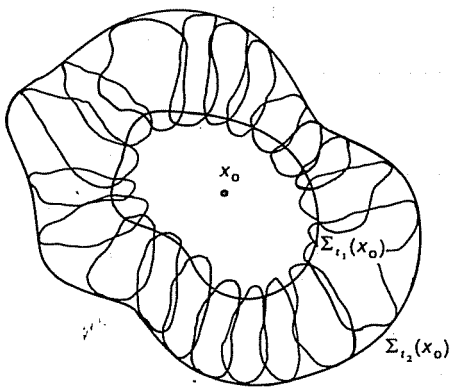


Figura 7.10

Isto significa que $\Sigma_{t+\Delta}$ é obtida geometricamente como a envoltória desta família $\{\Sigma_\Delta(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\Sigma_t}$, ou seja, cada ponto $\mathbf{x}' \in \Sigma_{t+\Delta}$ é um ponto de tangência entre um $\Sigma_\Delta(\mathbf{x})$ e Σ_{t+1}.

Este engenhoso argumento geométrico é a base conceitual do modelo ondulatório original de Huygens e é freqüentemente identificado como o próprio princípio de Huygens.

Consulte a demonstração da Lei de Snell fornecida por Huygens em seu *Traité de la Lumière*.

O nosso objetivo agora será caracterizar analiticamente a evolução da frente de onda por meio de uma equação diferencial parcial para $S(\mathbf{x}, t)$.

Para isto, suponha que $\mathbf{x}(t)$ seja uma trajetória qualquer em $\mathbb{R}^n$ que se mantém sobre a superfície Σ_t, isto é, $S(\mathbf{x}(t), t) = 0$ para todo t.

Derivando esta identidade, pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial S}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

ou, escrevendo vetorialmente,

$$\nabla S\cdot\dot{\mathbf{x}}=\frac{-\partial S}{\partial t}$$

Como ∇S é sempre perpendicular à Σ_t, concluímos da equação anterior que a condição necessária e suficiente para que a trajetória $\mathbf{x}(t)$ acompanhe a frente de onda é que a sua velocidade $\dot{\mathbf{x}}(t)$ tenha sempre uma componente normal à Σ_t, dada por $\dfrac{-\partial S/\partial t}{\|\nabla S\|}$.

Portanto, é razoável dizer que a velocidade de propagação da frente de onda, também chamada velocidade de fase, é dada por $\dfrac{-\partial S/\partial t}{\|\nabla S\|}$ ou, vetorialmente, $\dfrac{-\partial S/\partial t}{\|\nabla S\|^2}\nabla S$.

Se esta velocidade de fase for diferente de zero, então $\partial S/\partial t\neq 0$ e, portanto, podemos resolver a equação $S(\mathbf{x},t)=0$ para t na forma $t=\varphi(\mathbf{x})$, pelo menos localmente (Teorema da Função Implícita). As superfícies de nível para φ são as posições instantâneas da frente de onda (ver Figura 7.11).

Observamos também que $\|\nabla\varphi\|$ é a recíproca da velocidade de fase e $\nabla\varphi$ aponta no sentido de t crescente, ou seja, no sentido de propagação da frente de onda. (Verifique!)

A velocidade de fase pode ser considerada como uma propriedade constitutiva do meio contínuo dada por uma função $H_0(\mathbf{x},\mathbf{p})$ $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{p}\in S^{n-1}=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{v}\|=1\}$.

Neste caso, a propagação da frente de onda é governada pela equação

$$\frac{-\partial S/\partial t}{\|\nabla S\|}=H_0\left(\mathbf{x},\frac{\nabla S}{\|\nabla S\|}\right)$$

e, definido $H(\mathbf{x},\lambda\mathbf{p})=\lambda H_0(\mathbf{x},\mathbf{p})$ para todo λ real, verificamos que a equação para S fica sendo

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(\mathbf{x},\nabla S)=0$$

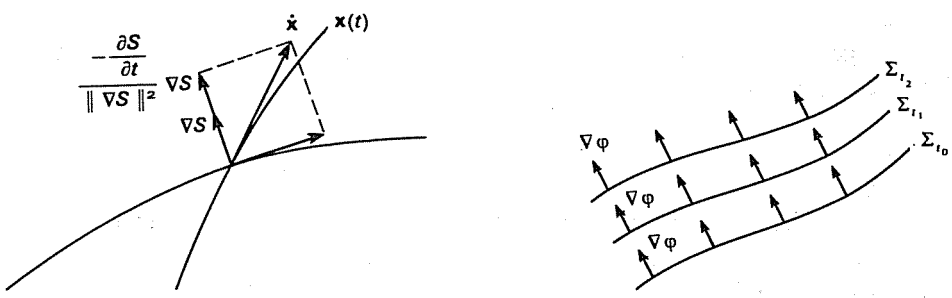


Figura 7.11

chamada equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi com função hamiltoniana $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Analisemos agora com um certo detalhe a formação da frente de onda $\Sigma_{\Delta t}(\mathbf{x}_0)$ para um instante $\Delta t \sim 0$ supondo conhecida a velocidade de fase $H_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ do meio.

A função $H_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$ pode ser interpretada, em decorrência da discussão anterior, como a velocidade de movimento de uma pequena superfície plana orientada $\vec{\Delta s} = \Delta s \mathbf{p}$ no sentido de $\mathbf{p}$ a partir de $\mathbf{x}_0$.

Se nos restringirmos a uma análise local, dentro de uma primeira aproximação, concluímos que no instante Δt o elemento de superfície plana $\vec{\Delta s}$ terá percorrido uma distância $\Delta t H_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$ no sentido de $\mathbf{p}$ e estará, portanto, apoiada no ponto

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \Delta t \, H_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})\mathbf{p}$$

(ver Figura 7.12).

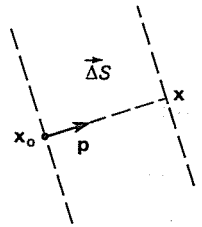


Figura 7.12

Esta distância $\Delta t \, H_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ percorrida pelo elemento de superfície orientada $\vec{\Delta s}$ depende em geral da direção da normal $\mathbf{p}$ a esta superfície. Esta dependência de $H_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ com relação a $\mathbf{p}$ caracteriza o que denominamos anisotropia do meio; quando $H_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = H_0(\mathbf{x})$ não depende de $\mathbf{p}$, o meio é dito isotrópico.

Repetindo o argumento anterior para um número grande de direções $\mathbf{p}$ obtemos uma situação como na Figura 7.13.

Se agora aumentamos o número de direções $\mathbf{p}$ e diminuímos os elementos de superfícies Δs, obtemos uma superfície fechada envolvendo $\mathbf{x}_0$ que será a envoltória da família de planos transladados a partir de $\mathbf{x}_0$ como frentes de onda. Esta superfície será então $\Sigma_\Delta(\mathbf{x}_0)$ (para o conceito de envoltórias consulte R. Courant*).

Observe que se o meio for isotrópico, $\Sigma_\Delta(\mathbf{x}_0)$ será uma esfera.

Mostre que se $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \langle Mp, p \rangle$ onde M é uma matriz positiva definida, então Σ_Δ será um elipsóide.

A esta altura é natural indagar sobre a relação que existe entre os modelos de Huygens (que utiliza a velocidade de fase como propriedade constitutiva do meio e descreve a propagação por frentes de onda) e o modelo de Fermat (que utiliza a velocidade radial como propriedade constitutiva e descreve a propagação por meio de raios).

Basicamente podemos reduzir esta questão ao seguinte problema: dada a função $H(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, obter $v(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ e vice-versa, considerando as interpretações dos modelos de Huygens e Fermat.

---

* COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2v.

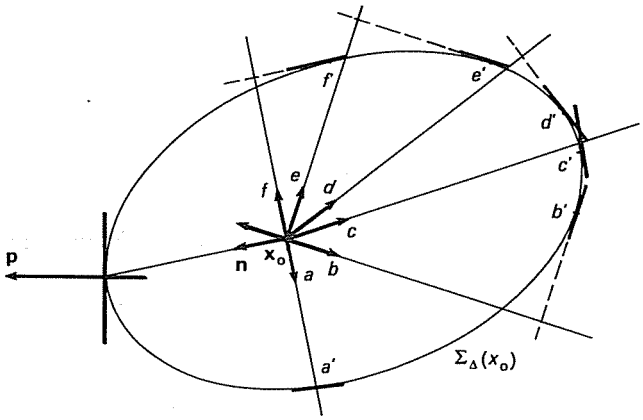


Figura 7.13

A discussão sobre a formação de $\Sigma_\Delta(\mathbf{x}_0)$ para $\Delta \sim 0$ fornece-nos um método para a construção do chamado elipsóide de velocidades $E_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} + v(\mathbf{x}, \mathbf{p})\mathbf{p}, \mathbf{p} \in S^{n-1}\}$ (ver Figura 7.13) do modelo de Fermat e nos dá uma indicação da resolução deste problema.

Se o meio for isotrópico não é difícil concluir que $H_0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x})$. Entretanto, a situação é mais delicada para meios anisotrópicos. Observe pela Figura 7.13 que é de se esperar que $v(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. As direções $\mathbf{n}$ e $\mathbf{p}$ são chamadas duais e a transformação de uma em outra é a questão básica do problema.

A resolução geral deste problema pode ser traduzida em uma interessante aplicação de conceitos geométricos fundamentais da análise convexa, em que a conexão entre as propriedades constitutivas dos dois modelos é realizada por intermédio das chamadas transformadas funcionais de Legendre-Fenchel.

Na próxima secção mostraremos como construir o modelo de Huygens a partir do modelo de Fermat por meio do princípio de otimização de Bellman, que foi desenvolvido para o estudo de problemas de origem completamente diversa.

7.3.5 Princípio de Otimização de Bellman

Observamos na secção anterior que o problema de propagação de perturbações em um meio contínuo pode ser abordado através de pontos de vista bem distintos, se pelo modelo de Fermat (Euler-Lagrange) ou de Huygens (Hamilton-Jacobi).

O método de Fermat-Euler-Lagrange tem por finalidade obter uma trajetória que liga dois *pontos fixados*, o que nos conduz a problemas de fronteira para uma equação diferencial *ordinária*. O método de Huygens-Hamilton-Jacobi, por sua vez, tem por objetivo construir uma função $S(\mathbf{x}, t)$ que caracteriza uma frente de onda Σ_t descrita pelos pontos finais das trajetórias contínuas em um intervalo de *tempo fixado*, o que nos conduz a uma equação diferencial parcial e a um problema tipicamente de valor inicial.

De certa forma, o modelo de Fermat vê o problema como o cálculo de uma trajetória de *tempo mínimo* entre dois *pontos fixados*, e o modelo de Huygens vê o problema como a determinação dos pontos de *distância máxima* alcançados em um *tem-*

po fixado. Este aspecto é denominado freqüentemente como dualidade entre problemas variacionais.

Uma outra maneira ainda de descrever esta diferença consiste em observar que, pelo método de Fermat-Euler-Lagrange, a solução do problema é vista de uma forma estática e procurada globalmente, e que, por outro lado, no método de Huygens-Hamilton-Jacobi o conceito de evolução do tempo é enfatizado na construção dinâmica da frente de onda.

Enquanto o problema de fronteira para equações diferenciais é característico de fenômenos de equilíbrio, o princípio de Huygens é a própria caracterização de um processo evolutivo de propagação de ondas.

É importante também observar que, no método de Huygens, a construção progressiva da frente de onda é realizada sempre a partir da sua configuração no instante atual, independentemente da sua história passada. Isto é, a construção de $\Sigma_{t+\Delta}$ é obtida a partir do conhecimento de Σ_t; não há necessidade de se conhecer $\Sigma_{t'}$, para todo $t' < t + \Delta$. Esta é uma propriedade comumente denominada de causalidade ou de Markov.

O método de construção de $\Sigma_{t+\Delta}$ é caracterizado ainda como um processo de otimização, ou seja, de uma certa forma constrói-se $\Sigma_{t+\Delta}$ como os pontos mais "distantes" alcançados por propagação de perturbações (originadas em Σ_t) durante o intervalo de tempo Δ.

Observe que se escrevermos a integral $\int_0^1 n(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})dt$ na forma de uma integral de linha, a função $\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ para a frente de onda $\Sigma_t(\mathbf{x}_0)$ é dada por

$$\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \min_{\ell} \left\{ \left(\int_{\ell} n\, dl \right);\ l \text{ é uma curva que liga } \mathbf{x}_0 \text{ a } \mathbf{x} \right\}$$

$\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = t$ nos fornece então implicitamente a frente de onda no instante t, originada de um ponto $\mathbf{x}_0$ excitado no instante $t = 0$.

Na secção anterior estudamos esta função por meio do princípio de Huygens e obtivemos a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi para

$$\begin{cases} S(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}) - t, \\ H(\mathbf{x}, \nabla\phi) = 1 \qquad \text{ou} \\ \hat{H}(\mathbf{x}, \nabla\phi) = 0 \qquad (\hat{H} = H - 1) \end{cases}$$

Analisaremos agora o comportamento da frente de onda com argumentos desenvolvidos por R. E. Bellman (1920-1984) em seus trabalhos sobre otimização de controle.

Embora grande parte dos problemas matemáticos surgidos na teoria de controle e otimização sejam semelhantes aos da secção anterior, certas particularidades e a sua origem não física motivaram o aparecimento de novos conceitos, nova nomenclatura e novos métodos próprios das aplicações. Esta duplicação de pontos de vista é altamente salutar e, como veremos, abre novas perspectivas para a resolução de difíceis problemas matemáticos.

Para entendermos melhor estes argumentos começaremos descrevendo o que Bellman denominou de processo discreto de decisão de vários estágios.

Suponha que o estado de um determinado sistema possa ser caracterizado por P (número, vetor do $\mathbb{R}^n$, matriz, função etc.) que pode ser modificado sucessivamente por meio de uma transformação como

$$P_{N+1} = T(P_N, V_N)$$

onde o controle da transformação em cada estágio N nos é fornecido pela possibilidade de escolher o valor de V_N em um determinado conjunto.

O interesse em "controlar" este processo passo a passo geralmente está relacionado a um objetivo de otimizar o que denominaremos de "custo" do processo.

Exemplificaremos inicialmente este modelo vago por meio de um problema artificial simples devido ao próprio Bellman.

Suponha que desejamos realizar um transporte entre os pontos A e B através de uma rede de conexões tal como na Figura 7.14, onde a cada segmento temos um valor associado que pode ser interpretado como o custo de transporte através dele.

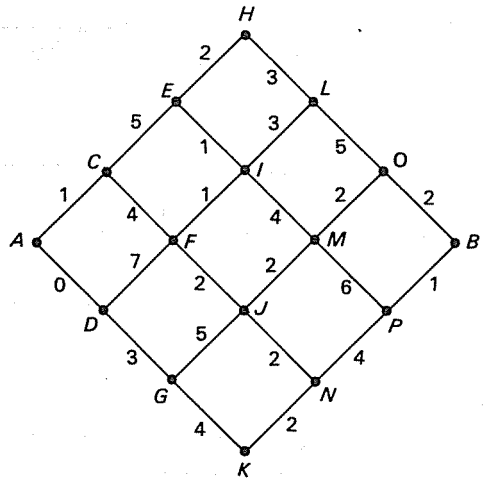


Figura 7.14

Neste problema o estado do sistema é dado pelo vértice ocupado

$$S = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$$

$V \in C = \{1, -1\}$ e onde $T(P, +1) =$ deslocamento para vértice à direita-superior e $T(P, -1) =$ deslocamento para vértice à direita-inferior.

O custo de um processo de N estágios

$$(P_0, P_1, \ldots, P_{N-1})$$

é dado por

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(P_k, P_{k+1}) = R(P_0, \ldots, P_{N-1})$$

($h(P_k, P_{k+1}) =$ custo do transporte no segmento que liga P_k a P_{k+1}).

O nosso problema consistirá então em obter o custo mínimo para o transporte entre A e B e *caracterizar um destes processos minimais.*

A analogia deste problema com o problema de Fermat é óbvia.

A diferença fundamental é que, neste caso, estamos procurando um mínimo dentro de um número finito de possibilidades e, portanto, a existência da solução é automaticamente garantida e pode ser obtida por comparação.

Para resolvermos a questão na "força bruta" basta calcular R para todos os 20 caminhos disponíveis (Verifique!) e escolher aqueles que produzem o menor valor. Para isto teríamos que efetuar 100 adições e uma comparação de 20 números. Em um processo geral de N estágios teríamos $\dfrac{N!}{\left(\frac{1}{2}N\right)!\left(\frac{1}{2}N\right)!}$ caminhos e $\dfrac{(N-1)N!}{\left(\frac{1}{2}N\right)!\left(\frac{1}{2}N\right)!}$ adições. Para $N=20$ este valor é de ordem de 10^6 operações.

É fácil concluir que, mesmo dispondo de máquinas extremamente velozes, a solução de problemas desta natureza será impossível de ser implementada do ponto de vista prático.

O argumento matemático, portanto, é indispensável!

No método a ser descrito abaixo, a construção de uma seqüência ótima $P_0, \ldots, P_{N-1}$ é vista dinamicamente, em que a transição de um estágio para o seguinte é resultado de uma decisão com o objetivo de minimizar o custo final.

Este método é baseado em um argumento de notável simplicidade e clareza, que, de uma forma geral, é denominado *princípio de otimização de Bellman*: "Uma seqüência de decisões otimizadoras (isto é, que fazem parte de um processo global ótimo) tem a seguinte propriedade: qualquer que seja o estado inicial e a decisão inicial, a seqüência de decisões restantes deve ser otimizadora para o processo partindo do estado obtido da decisão inicial".

A utilização deste princípio é feita por meio de argumentos análogos aos do modelo de Huygens: ao invés de procurarmos diretamente a seqüência otimizadora, analisaremos a função frente de onda:

$\varphi(N, P)$ = valor mínimo dos custos de processos de N estágios partindo de P e chegando até o ponto final fixado.

Observe que o princípio de Bellman, neste caso, pode então ser escrito matematicamente pela equação

$$\varphi(N, P) = \min_{V_0 \in C} \{h(P, T(P, V_0)) + \varphi(N-1;\ T(P, V_0)\}$$

Reflita um pouco sobre esta fórmula e analise sua semelhança com o método de Huygens.

Isto significa que se conhecermos a seqüência otimizadora (de $N-1$ estágios) ligando C a B e D a B, para obtermos a seqüência otimizadora (de ordem N) ligando A a B basta calcular os custos $h(A, C)$ e $h(A, D)$, adicionar aos respectivos custos de C a B e D a B e comparar.

EXERCÍCIO

1. Começando dos vértices imediatamente anteriores a B obtenha a frente de onda $\varphi(x, B)$ para cada vértice da rede utilizando o princípio de Bellman. Mostre que por este método resolvemos o problema com 24 adições e 9 comparações binárias, que é altamente favorável com relação às 100 adições e 20 comparações do método da "força bruta".

O princípio de Bellman (que tem um enunciado propositadamente vago para que seja suficientemente geral), quando habilmente formalizado e aplicado, produz caracterizações analíticas de grande utilidade na resolução de problemas variacionais.

A seguir veremos como este princípio pode ser aplicado a problemas variacionais bem mais gerais do que o problema de Fermat.

Considere por exemplo que a e b são concentrações das substâncias A e B que reagem quimicamente na forma $A \to B \to C$ por um processo regido pelas equações

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -k_1\,; & a(0) = a_0 \\ \dfrac{db}{dt} = k_1 a - k_2 b\,; & b(0) = 0 \end{cases}$$

onde k_i depende da temperatura Θ em que o sistema é mantido ($k_i = C_i \exp(-E_i/r\Theta)$; Lei de Arrhenius).

Suponha que seja possível controlar externamente a temperatura durante o processo e que a finalidade do reator químico é produzir o máximo de B no intervalo de tempo $[0, t_0]$.

Podemos então interpretar este problema como um processo de decisões contínuas em que o controle é dado pela escolha da função $\Theta(t)$ (dentro de um certo conjunto de funções, definidas em $[0, t_0]$, e com outras restrições ditadas pelas particularidades práticas do problema). O estado do processo em cada instante t é dado por $(a(t), b(t)) = p(t)$ e a função "custo" por

$$J(p, \theta) = -\int_0^{t_0} (k_1 a - k_2 b)\, dt = -b(t_0)$$

que deve ser minimizada pela escolha de θ^*.

Sob o ponto de vista da teoria do controle podemos dizer que o funcional de custo do problema de Fermat

$$J(p, u) = \int_t n(p(\tau), u(\tau))\, d\tau$$

deve ser minimizado para trajetórias $p(\tau)$ que satisfaçam a equação

$$\begin{cases} \dot{p} = u \\ p(0) = x_0 \\ p(1) = x_1 \end{cases}$$

onde $u(\tau)$ é a função de controle. (Verifique!)

---

* Veja ARIS, R. & Amundsen, N. R. *Mathematical Methods in Chemical Engineering*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1973, 2v.

A função de otimização neste caso é exatamente

$$\phi(x_0, x) = \min_{\ell} \left(\int_{\ell} n ds \right)$$

isto é, uma função frente de onda.

Consideremos agora um problema geral de controle que consiste em caracterizar a trajetória do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{p} = f(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 \end{cases}$$

onde $\mathbf{p}_0$ é fixado e $\mathbf{u}(\tau)$ é a função de controle, que deve ser escolhida em um determinado conjunto C de forma a minimizar o funcional

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \phi(\mathbf{p}(T)) + \int_0^T h(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{u}(\tau))\, d\tau$$

onde T é fixado e ϕ, h são dados.

Os problemas de controle com funcional de custo acima são chamados em geral de problemas de Bolza, ou, particularmente, de Mayer ($h \equiv 0$) e de Lagrange ($\phi \equiv 0$).

Considerando então a analogia deste problema com o exemplo discreto e com a utilização do princípio de Bellman, obteremos uma caracterização analítica para a função frente de onda:

$S(\mathbf{p}_0, t) = \{$custo mínimo de um processo de "comprimento" t iniciado no ponto $\mathbf{p}_0$ para $t = 0\} = \min_{u \in C} J(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{p}_0)$.

Suponha que exista a trajetória ótima dada por

$$\begin{cases} \dot{p} = f(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 \end{cases}$$

para um dado controle $\mathbf{u}$ (ver Figura 7.15).

Se considerarmos agora o primeiro estágio ("infinitesimal") como sendo efetuado no intervalo Δ sobre a trajetória ótima, passaremos ao ponto $\mathbf{p}(\Delta)$ e o processo restante terá comprimento $t - \Delta$ a partir de $\mathbf{p}_\Delta = \mathbf{p}(\Delta)$, e será ótimo.

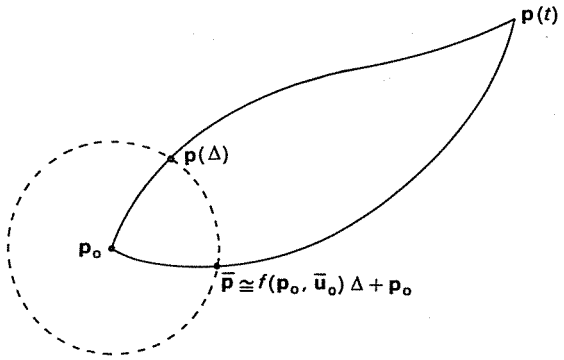


Figura 7.15

Formalizando o princípio de otimização de Bellman para este caso temos (em aproximação linear)

$$S(\mathbf{p}_0, t) \cong h(\mathbf{p}_0, \mathbf{u}_0)\Delta + S(\mathbf{p}(\Delta), t - \Delta); \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$$

Observe que *não* conhecemos $\mathbf{u}_0$ nem $p(\Delta)$, mas

$$\mathbf{p}(\Delta) \cong \mathbf{p}_0 + \Delta f(\mathbf{p}_0, \mathbf{u}_0)$$

Tomemos uma outra curva que parte com controle $\bar{\mathbf{u}}$ e o custo desta trajetória não será menor do que $h(\mathbf{p}_0, \bar{\mathbf{u}}_0)\Delta + S(\mathbf{p}_0 + f(\mathbf{p}_0, \bar{\mathbf{u}}_0)\Delta,\ t - \Delta)$ (pois talvez não seja ótima de $\bar{\mathbf{p}}$ em diante ($\bar{\mathbf{u}}_0 = \bar{\mathbf{u}}(0)$).

Portanto, $\mathbf{u}_0$ pode ser caracterizado como um ponto de mínimo para

$$S(\mathbf{p}_0, T) = \min_{\mathbf{v}} \{h(\mathbf{p}_0, \mathbf{v})\Delta + S(\mathbf{p}_0 + f(\mathbf{p}, \mathbf{v})\Delta, t - \Delta)\}$$

Supondo S diferenciável,

$$S(\mathbf{p} + f(\mathbf{p}, \mathbf{v})\Delta; t - \Delta) \cong S(\mathbf{p}, t) + \frac{\partial S}{\partial p}(\mathbf{p}, t) f(\mathbf{p}, \mathbf{v})\Delta - \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{p}, t)\Delta$$

de onde vem (formalmente) fazendo $\Delta \to 0$

$$0 = \min_{\mathbf{v}} \left\{ h(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \frac{\partial S}{\partial p}(\mathbf{p}, t) f(\mathbf{p}, \mathbf{v}) - \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{p}, t) \right\}$$

ou

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\mathbf{v}} \left\{ h(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \right\}$$

Chamando

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_{\mathbf{v}} \{h(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \mathbf{q} f(\mathbf{p}, \mathbf{v})\}$$

a equação para $S(\mathbf{x}, t)$ pode ser escrita como

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{p}, \nabla S)$$

que é chamada equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para o problema de controle.

Aplique o princípio de Bellman para o problema de Fermat e mostre que a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman tem por hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_{\mathbf{v}} \{\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle + n(\mathbf{p}, \mathbf{v})\} = \min_{\mathbf{v}} \{\langle \mathbf{q}, -\mathbf{v} \rangle + n(\mathbf{p}, -\mathbf{v})\} =$$

$$= \min_{\mathbf{v}} \{n(\mathbf{p}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle\} = \max_{\mathbf{v}} \{\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle - n(\mathbf{p}, \mathbf{v})\}^*$$

A transformação da função lagrangeana $n(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ em $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pela operação acima é a chamada transformação de Legendre-Fenchel originária da Mecânica Clássica e da

---

* Observe que $n(p, v) = n(p, -v)$ para este problema.

análise convexa. As trajetórias de Fermat, também neste caso, são soluções para as equações de Hamilton, com a função hamiltoniana e as variáveis duais acima.

A abordagem rápida que apresentamos sobre a teoria do controle tem por objetivo chamar a atenção do leitor para algumas conexões entre este belo e importante ramo da Matemática Aplicada e as equações diferenciais.

O leitor interessado no desenvolvimento deste tópico e suas múltiplas aplicações poderá consultar Luenberger*.

EXERCÍCIOS

1. Considere o problema de controle: calcular

$$f(c, T) = \min_{v \in V} \int_0^T (u^2 + v^2)\, dt$$

$$V = \{v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ contínua}\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = au + v \\ u(0) = c. \end{cases}$$

Utilizando o princípio de otimização de Bellman mostre que

a. $\dfrac{\partial f}{\partial T} = \min_v \left\{ c^2 + v^2 + (ac + v) \dfrac{\partial f}{\partial c} \right\}$, $f(c, 0) = 0$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial T} = c^2 + ac \dfrac{\partial f}{\partial c} - \dfrac{1}{4} \left(\dfrac{\partial f}{\partial c} \right)^2$.

c. $f(c, T) = c^2 f_0(T)$ onde f_0 satisfaz à equação de Riccatti $f_0' = 1 + 2af_0 - f_0^2$.

d. Obtenha $f(c, T)$.

2. Considere um meio isotrópico $\mathbb{R}^n$ com velocidade constitutiva $v(\mathbf{x})$ para a propagação de uma perturbação.

Seja $T(\mathbf{x})$ = instante em que a perturbação chega a $\mathbf{x}$ e assuma como válido o princípio de Fermat para este tipo de propagação, $T(\mathbf{x}) = t_0$ nos dá a frente de onda no instante t_0.

Utilizando os argumentos de Bellman mostre que

$$T(\mathbf{x}) = \min_{p \in S^{n-1}} \left\{ \frac{\Delta}{v(\mathbf{x})} + T(\mathbf{x} + \Delta p) \right\} + o(\Delta)$$

e formalmente fazendo $\Delta \to 0$, conclua que $\| \nabla T \| = |n(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{v(\mathbf{x})}$ que é a equação de Hamilton-Jacobi para a frente de propagação em um meio isotrópico não uniforme, chamada equação eikonal na ótica geométrica.

O vetor $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ que minimiza a expressão acima é a direção do raio em $\mathbf{x}$. Mostre que $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é perpendicular à frente de onda $T(\mathbf{x}) = t_0$ e obtenha a equação diferencial ordinária para a trajetória dos raios. Mostre que para $n(\mathbf{x}) =$ constante os raios percorrem trajetórias retilíneas. Repita o argumento para um meio anisotrópico.

---

* LUENBERGER, D. G. *An Introduction to Dynamic Systems, Theory, Models and Applications*. New York, Wiley, 1979.

BELLMAN, R. E. *Introduction to Modern Control Theory*. New York, Academic Press, 1970.

BELLMAN, R. E. & Kalaba, R, *Dynamic Programming and Modern Control Theory*. New York, Academic Press, 1965.

LUENBERGER, D. *Optimization by Vector Space Methods*. New York, Wiley, 1969.

7.4 CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Como já mencionamos no início deste capítulo, a classificação das equações diferenciais parciais torna-se extremamente difícil se não dispomos de um critério que focalize o nosso interesse em uma área bem determinada.

O critério que utilizaremos nesta secção deriva diretamente da maneira como foram introduzidas estas equações levando em conta sua origem não matemática.

Quando analisamos as equações diferenciais parciais obtidas a partir dos princípios de conservação e variacionais, podemos inicialmente separá-las em dois grandes grupos: equações de primeira ordem e equações de segunda ordem. Entretanto, como cada um destes grupos engloba problemas de características completamente diferentes, esta classificação é insuficiente. Por este motivo passaremos a uma subclassificação mais específica.

7.4.1 Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

As equações diferenciais parciais de primeira ordem tratadas até agora podem ser divididas, de acordo com sua origem e nosso interesse, em dois tipos: *Equações de Conservação e Equações de Hamilton-Jacobi* (variacionais).

7.4.1.1 *Equações de Conservação de Primeira Ordem*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\phi=f \tag{1}$$

onde ϕ e f dependem em geral de x, t e u.

Excluímos, assim, deste tipo, a equação do calor que é de conservação, mas onde o fluxo ϕ também depende de $\frac{\partial u}{\partial x}$, sendo, portanto, uma equação de segunda ordem.

Se $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, a Equação de conservação (1) toma a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\operatorname{div}_x\phi=f \tag{1'}$$

Se ϕ depende de x e u, (1) pode ser escrita por

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+f \tag{2}$$

Observe que em (2) as derivadas da função incógnita u aparecem *linearmente*, embora a própria u possa ocorrer de forma não linear como variável em $\frac{\partial \phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ou f.

Em geral, uma equação diferencial parcial da forma

$$\sum_{k=1}^{N} A_k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}=f(x,u) \tag{3}$$

é denominada de primeira ordem quase linear. O que caracteriza (3) é o fato de ser uma combinação linear de suas derivadas parciais, podendo ser escrita como um produto escalar

$$\langle A(x, u), \text{grad } u\rangle = f(x, u) \tag{3'}$$

e interpretada como uma equação sobre a derivada de u na direção do vetor $A(x, u)$, denominada *direção característica*.

No caso em que o campo vetorial de direção característica A e a função f dependem apenas de x, a Equação (3) é linear, pois a operação definida em u é linear. (Verifique!) Assim, podemos escrever

$$Lu = \sum_{k=1}^{N} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = f$$

onde f é o termo não homogêneo da equação.

Estas equações diferenciais parciais são relativamente simples e veremos como resolvê-las na próxima secção, utilizando a teoria das equações ordinárias.

Podemos também considerar sistemas de equações como uma única equação vetorial de conservação (por exemplo, as equações de Euler), ou seja, $\mathbf{u}$ pode ser uma função vetorial e neste caso a Equação (1') representa as m equações escalares

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \text{div}_x\, \phi_k = f_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

Pelo próprio exemplo das equações de Euler, podemos observar que m não é necessariamente igual a n; o importante é que o número de equações seja o mesmo que o de incógnitas. Para as equações de Euler temos

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} \rho(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \dfrac{1}{2} u_2^2 + H(u_1) \end{pmatrix} \qquad f \equiv 0$$

Assim, dado o sistema vetorial

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{div}_x\, \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}$$

desenvolvendo suas derivadas obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial u}\right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f} \tag{5}$$

onde $\dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{u}}$ é uma matriz (jacobiana).

Generalizando, dizemos que um sistema é *quase linear* se for da forma

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f \tag{6}$$

onde A_k são n matrizes $m \times m$ que dependem de (x, u).

Ainda neste caso podemos considerar (6) como um sistema de equações para as derivadas direcionais de u; a diferença é que agora temos várias derivadas direcionais para cada função escalar u_i.

Todavia, esta generalização se distancia muito da classificação por princípios de conservação e abrange uma variedade muito grande de equações. Por exemplo, a equação da onda

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

dá origem a um sistema do tipo (6), se fizermos a identificação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = u_1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_2$$

Neste caso, se φ é solução da equação da onda, $\mathbf{u}$ será solução de

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$$

A questão que surge é: resolvido o sistema, existe φ tal que $\nabla \varphi = \mathbf{u}$, onde $\nabla \varphi = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$ e tal que φ seja solução da equação da onda? Isto só é possível (ressalvada a diferenciabilidade necessária) se $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$, isto é, se

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$$

o que sempre acontece (Verifique!). Portanto, sob este aspecto, o sistema de equações *lineares* acima é equivalente à equação clássica da onda. Para redução de equações gerais a sistemas quase lineares e para outras classificações consulte P. Garabedian*.

7.4.1.2 *Equações de Hamilton-Jacobi e Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem Escalares e Não Lineares*

As equações de Hamilton-Jacobi são da forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \hat{H}(\mathbf{x}, \nabla \phi) = 0 \tag{7}$$

A equação geral *não linear* de primeira ordem pode ser escrita para uma função incógnita u escalar de n variáveis, na forma

$$F(x, u, \nabla u) = 0 \tag{8}$$

onde F é, em geral, uma função $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de $2n+1$ variáveis.

---

* GARABEDIAN, P. *Partial Differential Equations*. New York, Wiley, 1964, cap. 2.

A função u pode ser interpretada geometricamente como a representação de uma superfície em $\mathbb{R}^n$, através da equação implícita $u(x) = \text{constante}$, tal como na teoria de Hamilton-Jacobi, ou ainda em $\mathbb{R}^{n+1}$, através do gráfico de $u(x) = x_{n+1}$.

Sob este ponto de vista, a Equação (8) constitui uma restrição à direção (normal) do plano tangente em cada ponto da superfície.

Veremos na Secção 7.5.1 que a interpretação geométrica das equações diferenciais parciais de primeira ordem quase lineares é essencial para a compreensão da teoria e dá origem ao importante método das características que reduz a sua resolução à integração de equações diferenciais ordinárias.

7.4.2 Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem

A classificação que utilizaremos agora segue o critério tradicional e se baseia nos três tipos fundamentais de problemas da Mecânica do Meio Contínuo, que historicamente deram origem à maior parte da teoria das equações relativas a eles, a saber:

1. problemas de difusão (equações parabólicas);
2. problemas de vibração e propagação de ondas (equações hiperbólicas);
3. problemas de equilíbrio (equações elípticas).

7.4.2.1 *Equações de Difusão*

Estas equações têm origem em princípios de conservação e na maioria dos casos podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)u + f(x,t,u) \tag{9}$$

onde $u(x, t)$ é a densidade, que depende de uma dimensão espacial e do tempo; $\phi = k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ é o fluxo, supondo uma relação constitutiva linear análoga às leis de Newton-Fourier e Fick; $f(x, t, u)$ é uma função de fonte (geralmente não linear com respeito à variável u, se depender dela); e $q(x, t)u$ é um termo também de fonte, em geral referente a fenômenos de absorção ou reatividade (linear relativamente a u).

O fluxo ϕ, em alguns problemas físicos ou biológicos, pode eventualmente exibir uma dependência não linear em relação a u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e às suas derivadas de ordem superior.

No caso de dimensão espacial maior que 1, a equação de difusão toma a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\,(k\ \text{grad}\ u) + qu + f \tag{9'}$$

O operador diferencial linear L definido por

$$Lu = \text{div}\,(k\ \text{grad}\ u) + qu$$

desempenha um papel importante no estudo das equações diferenciais parciais de segunda ordem. Em dimensão 1, L é chamado operador de Sturm-Liouville (ver Capítulo 3).

Quando $k=1$ e $q\equiv 0$, L é o operador laplaciano, Δ.

No estudo das equações parciais de segunda ordem é importante também classificar o tipo de condições auxiliares que são acrescentadas para a caracterização da solução. A relação existente entre as funções, expressa pela equação diferencial parcial, descreve um tipo de processo físico (neste caso específico, a difusão) mas não caracteriza nenhum problema em particular, uma vez que não contém informações sobre a situação do sistema no *início* do processo e nem a maneira como é feita a interação com o exterior.

A situação inicial do sistema e o tipo de interação que ele apresenta com o exterior através de sua fronteira influirão decisivamente na sua evolução.

As informações que descrevem o estado inicial do sistema são denominadas *condições iniciais* (de modo análogo ao problema de Cauchy para as equações diferenciais ordinárias), e a descrição da forma de interação do sistema com o meio exterior físico é denominada *condição de fronteira*.

Se o nosso meio contínuo é unidimensional, a condição inicial pode ser dada por uma função conhecida $u(x,0)=\varphi_0(x)$, definida em toda extensão do meio, e que descreve a função densidade para $t=0$.

As condições de fronteira mais comuns nestes problemas são:

1. descrição da temperatura na interface da fronteira do sistema com o meio exterior durante todo o processo. Por exemplo, se x_0 for uma extremidade do meio contínuo, o que deve ser fornecido é uma função $\varphi(t)$ tal que $u(x_0,t)=\varphi(t)$;

2. descrição do processo de fluxo através da fronteira. Por exemplo, dada pela Lei de Newton-Fourier

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)=\psi(t)$$

onde $\psi(t)$ é um *dado* do problema.

Se a temperatura do meio ambiente na interface exterior for uma função conhecida $T(t)$, então pela própria Lei de Newton-Fourier devemos ter

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)=C(u(x_0,t)-T(t))$$

ou, pela Lei de Irradiação de Stefan-Boltzmann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)=C(u^4(x_0,t)-T^4(t))$$

Em alguns casos em que o sistema é muito grande, como por exemplo uma barra de grande comprimento h, $(0\leqslant x\leqslant h)$, e se nossa atenção está voltada para o que ocorre nas imediações da origem $(x=0)$ num intervalo de tempo pequeno, é razoável considerarmos que as condições de fronteira em $x=h$ sejam irrelevantes. Se as observações se

restringem a um ponto interior do sistema distante da fronteira, em um certo período de tempo, então apenas as condições iniciais são relevantes. Dizemos, neste caso, que o ponto interior não "percebe" as condições de fronteira.

Se, por outro lado, estudarmos o problema para t muito grande, as condições iniciais deixam de ser importantes (por exemplo, o estudo da variação da temperatura do nosso planeta, na escala de tempo da civilização). Neste caso, dizemos que as condições iniciais foram "perdidas".

De qualquer forma, o problema geral de condições iniciais e de fronteira para um meio contínuo unidimensional, no intervalo $[0, h]$, é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \ x \in (0, h) \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), \ x \in [0, h] \\ u(0, t) = \varphi_1(t), \ t > 0 \ \left(\text{ou } \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \psi_1(t) \right) \\ u(h, t) = \varphi_2(t), \ t > 0 \ \left(\text{ou } \dfrac{\partial u}{\partial x}(h, t) = \psi_2(t) \right) \end{cases} \tag{10}$$

O operador L, a função fonte f e as condições inicial $\varphi_0(x)$ e de fronteira φ_1 e φ_2 (ou ψ_1 e ψ_2) são *dados* do problema. A *solução* $u(x, t)$ deve descrever a evolução do estado do meio contínuo.

Para que (10) seja de fato um modelo satisfatório é importante também que algumas condições sejam verificadas, tais como:

1. deve haver uma *única* solução $u(x, t)$ para uma classe de dados "admissíveis" (existência e unicidade da solução);

2. modificando "ligeiramente" os dados do problema, a solução resultante também se modifica "pouco" (dependência contínua da solução com relação aos dados do problema).

A condição **2** é indispensável, uma vez que a imprecisão inevitável das medidas físicas dos dados não deve acarretar erros desproporcionais na solução.

Estamos de certa forma sendo vagos nestes conceitos, propositadamente e por necessidade. A especificação matemática rigorosa destas condições, no caso geral, exige uma formalização dos conceitos que escapa aos objetivos deste texto.

É importante observar também que em muitos problemas práticos o meio contínuo pode apresentar descontinuidades em suas propriedades constitutivas. Por exemplo, no problema de condução de calor podemos ter uma barra de alumínio soldada em $x = 0$ a uma barra de cobre, e neste caso o operador $L = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ apresenta uma descontinuidade no coeficiente de condução térmica k. Podemos então considerar dois sistemas separadamente, para $x < 0$ e para $x > 0$, e estabelecer o acoplamento entre eles em $x = 0$ para todo $t \geqslant 0$, isto é, tomando a mesma temperatura na conexão

$$\lim_{x \uparrow 0} u_1(x, t) = \lim_{x \downarrow 0} u_2(x, t) \quad \text{para todo } t \geqslant 0$$

e um fluxo de calor igual nas interfaces

$$\lim_{x \uparrow 0} k_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, t) = \lim_{x \downarrow 0} k_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, t) \quad \text{para todo } t \geqslant 0$$

Estas condições são análogas às condições de conexão do Capítulo 3.

O mesmo procedimento deve ser feito com descontinuidades das condições auxiliares.

Com estas considerações podemos perceber a grande variedade de condições auxiliares que podem ser impostas à função incógnita. O problema clássico para a equação de difusão é escrito na forma resumida por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \\ Au = \phi \end{cases} \tag{11}$$

onde o operador A representa as condições, inicial e de fronteira

$$Au = (u(x, 0), u(0, t), u(h, t)) \text{ ou } Au = \left(u(x, 0), \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \frac{\partial u}{\partial x}(h, t)\right)$$

e $\phi = (\varphi_0(x), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ representa os dados destas condições.

Observe que, neste caso, se f depender apenas de (x, t) e L for linear, o problema será chamado *linear*, isto é, se u_1 e u_2 forem soluções para os dados f_1, ϕ_1 e f_2, ϕ_2, então $u_1 + \lambda u_2 = u$ será solução para (11), com $f = f_1 + \lambda f_2$, $\phi = \phi_1 + \lambda \phi_2$, λ real. Dizemos então que vale o "princípio de superposição". Os problemas lineares e o princípio de superposição formam a base da Física Matemática clássica e os argumentos desenvolvidos no contexto bem mais simples do Capítulo 3 ganham um significado extraordinariamente amplo com a sua aplicação aos operadores diferenciais parciais.

7.4.2.2 *Equações Diferenciais Parciais de Vibração e Propagação de Ondas*

O protótipo destas equações tem a sua origem na Segunda Lei de Newton generalizada para sistemas contínuos e, portanto, ao contrário das equações de difusão, apresenta uma derivada de segunda ordem com relação ao tempo. Entretanto, o termo que corresponde à "força" tem exatamente a mesma expressão geral que o operador L da equação de difusão. A equação geral da onda é escrita na forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(\mathbf{x}, t) \tag{12}$$

onde $Lu = \operatorname{div}(k(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + qu$.

Na expressão do operador L, o termo "divergente" corresponde a uma densidade de força elástica intrínseca do meio e qu de uma força restauradora exterior. O termo $f(\mathbf{x}, t)$ representa uma influência exterior, independente do estado do sistema. Em alguns casos, que não trataremos aqui, são acrescentados ainda termos do tipo $g(u_t)$, representando, por exemplo, a dissipação da energia causada por uma resistência viscosa ao movimento, análoga à situação com o oscilador harmônico.

A força restauradora pode ter uma forma não linear do tipo $\varphi(x, u)$ em vez de qu, se o movimento não for considerado como sendo de pequena amplitude.

Analisaremos aqui apenas a equação do tipo (12) para problemas unidimensionais, situação em que

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u$$

é um operador diferencial ordinário de segunda ordem na forma auto-adjunta de Sturm-Liouville (ver Capítulo 3).

Uma enorme variedade de problemas da Matemática Aplicada relacionados a fenômenos de vibração e propagação de ondas (mecânicas, acústicas, eletromagnéticas etc.) é descrita por equações do tipo (12), acrescentadas de condições auxiliares que descrevem o estado dinâmico inicial do sistema (condições iniciais) e a sua conexão com o meio exterior (condições de fronteira).

Observamos que o estado dinâmico de um sistema mecânico é caracterizado pela sua posição e sua velocidade, e são estas informações que geralmente utilizamos para descrever o instante inicial. Assim, as condições iniciais podem ser expressas por

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_0(x) & \text{(posição)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x) & \text{(velocidade)} \end{cases}$$

As condições de fronteira em $x = 0$ e $x = h$ podem ser geométricas ou dinâmicas: por condição geométrica entendemos a caracterização da posição dos pontos de fronteira $u(0, t)$ e $u(h, t)$. Por exemplo,

$$\begin{cases} u(0,t) = \psi_0(t) \\ u(h,t) = \psi_1(t) \end{cases}$$

As condições dinâmicas caracterizam a interação mecânica na fronteira. Por exemplo, se $k(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t)$, que representa a tensão (força por unidade de área transversal à barra) em x, for regulada exteriormente, poderemos escrever de maneira geral que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha_0(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(h,t) = \alpha_1(t) \end{cases}$$

Em particular, se a extremidade $x = 0$ for livre, temos $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$; se em $x = 0$ tivermos uma massa concentrada m, então $k\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t)$.

As condições geométricas e dinâmicas são também utilizadas nas conexões entre dois sistemas. Por exemplo, na junção entre duas barras de constituições diferentes soldadas em $x = 0$ (neste caso $k(x)$ é descontínuo em $x = 0$) temos as

$$\text{condições de acoplamento} \begin{cases} u_1(0,t) = u_2(0,t) & \text{(mesmo deslocamento)} \\ k_1(0)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}(0^-,t) = k_2(0)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}(0^+,t) & \text{(ação e reação)} \end{cases}$$

De uma forma geral, os problemas clássicos para a equação da onda podem ser simbolicamente escritos como

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - L\right) u = f(x, t) \\ Iu = \varphi \\ Fu = \psi \end{cases} \tag{13}$$

onde I e F são operações efetuadas na função u

$$Iu = (u(x, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)) \quad \text{e}$$

$F(u) =$ (condições geométricas de fronteira em $x = 0$, condições geométricas de fronteira em $x = h$)

Tal como no caso das equações de difusão, podemos considerar ainda problemas sem condições iniciais ou de fronteiras, se estas estiverem distantes do nosso campo de observação no espaço/tempo.

Sendo as operações funcionais L, I, F lineares, vale também aqui o princípio de superposição.

7.4.2.3 *Equações de Equilíbrio*

As equações de equilíbrio têm sua origem em problemas semelhantes aos que motivaram o estudo das equações de evolução (difusão e propagação) quando considerados em estado estacionário, isto é, situações em que a função u não depende do tempo t.

Um exemplo esclarecedor é fornecido pelo problema de difusão de calor em um corpo Ω quando a temperatura exterior varia pontualmente mas independe do tempo, o mesmo acontecendo com a fonte.

A experiência física nos mostra que, com o passar do tempo, a distribuição de temperatura de um corpo nesta situação se aproxima de um estado estacionário.

A questão é como obter esta distribuição estacionária limite. Para responder tal questão, é natural considerar (11) com $\dfrac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ e condições iniciais perdidas

$$\begin{cases} Lu = f(\mathbf{x}), \ x \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (x \text{ na fronteira de } \Omega) \end{cases} \tag{14}$$

Um outro exemplo que nos leva a um problema análogo a (14) pode ser obtido quando consideramos o problema da membrana vibrante, supondo que a mesma esteja em estado estacionário, sendo especificada a posição de sua borda: $u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ em $\partial\Omega$.

Os problemas modelados como em (14) são denominados *problemas de Dirichlet*.

De uma maneira geral os problemas de equilíbrio são derivados dos problemas de evolução, mantidas as condições de fronteira. Os dois problemas clássicos de equilíbrio são:

1. problema de Dirichlet (14)

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

2. problema de Neumann

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em} \quad \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal exterior à fronteira $\partial\Omega$.

O problema de Neumann deriva de condições dinâmicas de fronteira para a equação de ondas ou de especificação do fluxo na fronteira para equações de difusão.

Como vimos, o operador $Lu = \operatorname{div}(k(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u$ é fundamental para o estudo dos três principais tipos de equações diferenciais parciais de segunda ordem. O desenvolvimento de sua teoria confunde-se com o próprio desenvolvimento da análise matemática nos últimos 150 anos e, apesar disto, mesmo para casos especiais como $L = \Delta$ (laplaciano) ou $L \equiv$ operador diferencial ordinário de Sturm-Liouville, o estudo de vários problemas a ele relacionados ocupa ainda hoje posições de vanguarda na pesquisa matemática.

Além dos inúmeros problemas em Mecânica do Meio Contínuo e Eletrodinâmica estudados por meio das equações diferenciais parciais, devemos lembrar também que a Mecânica Quântica se baseia em uma equação diferencial parcial (de Schrödinger) escrita na forma

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = Lu \tag{16}$$

onde $u = u + iu_2$ é uma função de variáveis reais a valores complexos.

A Equação (16) pode ser descrita pelo sistema real

$$\begin{cases} \hbar \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = Lu_2 \\ \hbar \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = -Lu_1 \end{cases} \tag{16'}$$

Salientamos ainda que, embora a maior parte das equações da Matemática Aplicada tenha sido abrangida pela classificação dada, alguns importantes modelos da Mecânica do Meio Contínuo ficaram excluídos, notadamente a equação (ou sistema) de Navier-Stokes para a Hidrodinâmica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} u = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u \\ \nabla u = 0 \end{cases} \tag{17}$$

onde a primeira equação (vetorial) é de conservação da quantidade de movimento e a segunda (escalar) é de conservação da massa, supondo ρ constante. O termo $\nu \Delta u$

representa uma parte da tensão com componente tangencial à superfície de contacto devido à viscosidade.

O princípio de superposição vale para a equação de Schrödinger, mas *não* vale para a equação de Navier-Stokes, o que de uma maneira geral faz com que a teoria matemática da Hidrodinâmica seja considerada relativamente difícil e apenas iniciada.

Para uma outra classificação das equações de segunda ordem e a apresentação de vários problemas a elas relacionados consulte Tijonov-Samarsky e Garabedian*.

7.5 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Abordaremos nesta secção alguns métodos de análise e resolução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais de *primeira ordem*. O tratamento destas questões será feito com ênfase especial nos argumentos que podem ser desenvolvidos utilizando-se basicamente a teoria de equações diferenciais ordinárias e sua interpretação geométrica. O estudo rigoroso e detalhado dos métodos e teorias associados às equações diferenciais parciais em geral requer um conhecimento profissional da análise matemática e não pode ser feito em um texto introdutório. O estudante de Matemática Aplicada, todavia, não deve se contentar apenas com uma introdução a esta área; as referências indicadas no texto podem servir como uma orientação para um estudo de tópicos específicos em equações diferenciais parciais e suas aplicações.

É importante observar que a teoria destas equações *não* é uma simples extensão da teoria de equações diferenciais ordinárias, mas apresenta características bem próprias. Mesmo assim, vários problemas podem ser reduzidos a questões como: a construção de uma função de fluxo para um campo vetorial (como veremos a seguir), o estudo de operadores de Sturm-Liouville (método de Fourier) e a resolução de equações diferenciais ordinárias abstratas (método operacional).

O método das características que apresentaremos a seguir se resume basicamente à primeira destas questões.

7.5.1 Método das Características para Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem Lineares

Iniciaremos pelas equações lineares que podem ser escritas na forma geral como

$$\sum_{n=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(x) \quad \text{onde} \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$A_k(x)(k = 1, \ldots, n)$ e $f(x)$ são funções reais dadas e $u(x)$ a função incógnita.

Observemos primeiramente que a operação diferencial sobre u é linear

$$Lu = \left(\Sigma A_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u = \langle A(x), \text{grad } u \rangle \tag{2}$$

---

* TIJONOV, A. N. & Samarsky, A. A. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Moscou, Mir, 1972.
GARABEDIAN, P. *Partial Differential Equations*. New York, Wiley, 1964.

e pode ser interpretada como a derivada direcional de u no ponto x, na direção do vetor $\mathbf{A}(x) = (A_1(x), \ldots, A_n(x))$. Esta interpretação geométrica do operador diferencial será a base do argumento para desenvolver o método das características, que será exemplificado no plano $(n = 2)$ para uma melhor visualização dos conceitos.

Suponha que o campo $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ seja continuamente diferenciável e sem pontos singulares, isto é, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\forall \mathbf{x}$. Considere as linhas de fluxo deste campo que são as soluções do problema de Cauchy (ver Figura 7.16)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad x(0) = \mathbf{x}^0 \tag{3}$$

Se $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ é uma destas curvas, então para qualquer função $\varphi(\mathbf{x})$, diferenciável, temos

$$\frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t, \mathbf{x}^0) \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \varphi = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) \tag{4}$$

Se $u(\mathbf{x})$ é solução da Equação (1), temos

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) = f(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) \tag{5}$$

e, portanto

$$u(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) = u(\mathbf{x}(0, \mathbf{x}^0)) + \int_0^t f(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^0))d\tau = u(\mathbf{x}^0) + \int_0^t f(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^0))d\tau \tag{6}$$

Se observarmos agora que as trajetórias do problema de Cauchy (3) cobrem uma região Ω do plano a partir de uma curva C *transversal* ao campo $\mathbf{A}$ (ver Figura 7.17), verificamos que para obter u nesta região basta conhecer os seus valores sobre C e integrar (5) de acordo com (6).

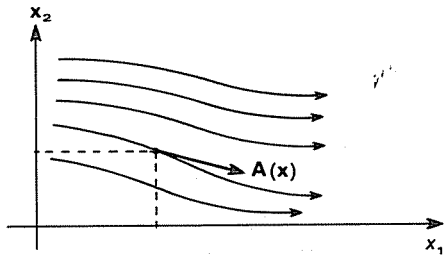


Figura 7.16

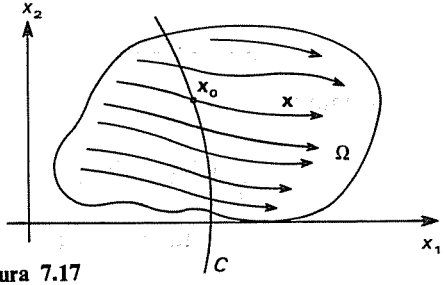


Figura 7.17

Resumindo, para obter o valor de u em algum ponto x desta região fazemos o seguinte:

1. determinamos a trajetória à qual ele pertence (É única!);
2. determinamos o ponto $\mathbf{x}^0$ da intersecção desta trajetória com a curva C;
3. calculamos u em x pela Equação (6).

Mas a solução da Equação (1) é uma função de $\mathbf{x}$, e não de t e $\mathbf{x}^0$. Para obter esta solução devemos observar que se a curva C é parametrizada por $\mathbf{x}^0(s)$, então podemos

encarar o fluxo de **A**, (transversal a C), como um sistema de coordenadas curvilíneas da região Ω, em que o ponto de coordenadas (t, s) é aquele atingido pela trajetória do fluxo no instante t partindo-se de $\mathbf{x}^0(s)$ no instante $t=0$, ou seja, em coordenadas cartesianas é o ponto

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0(s))$$

Portanto, a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0(s), \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0(s)) \end{cases} \tag{7}$$

nos dá a transformação de coordenadas curvilíneas (t, s) para coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. A inversão, isto é, a obtenção de (t, s) em função de (x_1, x_2) só é possível se

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} & \dfrac{\partial x_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} & \dfrac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{8}$$

(ver Teorema da Função Inversa à página 456).

Mas, se observarmos que a primeira coluna da matriz é formada pelas coordenadas do campo **A**, e a segunda coluna (para $t=0$) é o vetor tangente a C, a Condição (8) é exatamente a transversalidade de C com relação ao campo.

Assim, a função $\varphi(t, s) = u(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0(s))$ pode ser escrita em coordenadas (x_1, x_2) e teremos aí a solução $u(x_1, x_2) = \varphi(t(x_1, x_2), s(x_1, x_2))$ da Equação (1).

Para verificar que $u(x_1, x_2)$ assim obtida é realmente a solução de (1), observe que

$$\varphi(t, s) = h(s) + \int_0^t f(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^0(s))\, d\tau \tag{9}$$

e

$$\varphi(t, s) = u(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0(s)) \qquad \text{ou} \qquad u(\mathbf{x}) = \varphi(t(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$$

Mas então

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0(s)) = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(s)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t, \mathbf{x}(s)) =$$

$$= \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0(s)) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0(s)) \overset{(9)}{=} f(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0(s))$$

que em coordenadas curvilíneas é exatamente (1).

Observe que $h(s(\mathbf{x})) = H(\mathbf{x})$ é solução da equação homogênea

$$Lu = 0$$

e

$$\int_0^t f(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}^0(s))\, d\tau = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{para} \quad t = t(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad s = s(\mathbf{x})$$

é solução particular da equação $Lu = f$.

Desta forma observamos que a solução geral de $Lu = 0$ é dependente de uma função real de variável real $h(s)$.

Este problema resolvido é semelhante ao problema de Cauchy para as equações diferenciais ordinárias, mas o dado inicial aqui é uma função dada sobre uma curva e não um vetor dado no instante $t = 0$.

O problema

$$\begin{cases} Lu = f \\ u = h \text{ sobre } C \text{ (transversal a } A) \end{cases}$$

também é denominado problema de Cauchy.

Teorema Sejam $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x})$ uma função escalar, e C uma curva aberta, todos continuamente diferenciáveis definidos em uma região Ω; h uma função continuamente diferenciável definida sobre C (isto é, C pode ser parametrizada por $\mathbf{x}^0(s)$ com $\dfrac{d\mathbf{x}^0}{ds}$ contínua e não nula em todos os pontos e h pode ser escrita como uma função continuamente diferenciável de s, $h(s)$). Suponha ainda que para todo ponto de C, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\dfrac{d\mathbf{x}^0}{ds}$ são linearmente independentes (transversais).

Então, existe uma única função C^1, $u(x_1, x_2)$ solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} Lu = f \quad \text{em} \quad V \\ u = h \quad \text{em} \quad C, \left(L = A_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{cases}$$

definida em toda região $V \subset \Omega$ varrida pelo fluxo característico com condição inicial em C.

A demonstração deste teorema é completamente baseada nos argumentos geométricos que apresentamos acima, acrescentados de alguns detalhes meramente técnicos. Observe que a existência de uma vizinhança V de C em que existe a solução vem do Teorema de Existência, Unicidade e Dependência de Parâmetros para o problema de Cauchy (7).

EXEMPLO 1 Equação de Conservação de Massa para o Fluxo de um Meio Contínuo em um Campo de Velocidades Dado

Suponha inicialmente que $v(x, t)$ seja conhecido; onde $x \in \mathbb{R}$. A Lei de Conservação de Massa para a densidade $\rho(x, t)$ pode ser escrita então nas formas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ln \rho) + v \frac{\partial}{\partial x}(\ln \rho) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Observe que a expressão à esquerda da última equação é uma derivada de $u = \ln \rho$ na direção característica $(v, 1)$, no plano (x, t). As linhas características são as curvas-soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = v(x, t) \\ \dfrac{dt}{ds} = 1 \end{cases}$$

Fazendo $t(0) = 0$ podemos parametrizar estas curvas com a variável t que serão, então, obtidas pela solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v(x, t) \\ x(0) = \mathbf{a} \end{cases}$$

que denotada por $x(t, \mathbf{a})$ nos dá exatamente a função que descreve o fluxo no modelo de Lagrange. Portanto, a equação de conservação de massa pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}[\ln \rho(x(t, \mathbf{a}), t)] = \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho + v \frac{\partial}{\partial x} (\ln \rho)\,|_{x=x(t,\,a)} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, t)\,|_{x=x(t,\,a)}$$

ou seja

$$\ln \rho(x(t, \mathbf{a}), t) = \ln \rho(\mathbf{a}, 0) + \int_0^t -\frac{\partial v}{\partial x}(x(s, \mathbf{a}), s)\, ds$$

ou ainda

$$\rho(x(t, \mathbf{a}), t) = \rho(\mathbf{a}, 0) \exp\left[-\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(x(s, \mathbf{a}), s)\, ds\right]$$

A solução em termos das coordenadas (x, t) será

$$\rho(x, t) = \rho(\mathbf{a}(x, t), 0) \exp\left[-\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x} x(s, \mathbf{a}(x, t)), s\, ds\right]$$

Portanto, se soubermos o valor de $\rho(\mathbf{a}, 0)$, ou seja, a distribuição de massa no instante $t = 0$, a densidade fica perfeitamente determinada em toda a região do plano (x, t) varrida pela solução $x(t, \mathbf{a})$ do problema de Cauchy característico (ver Figura 7.18).

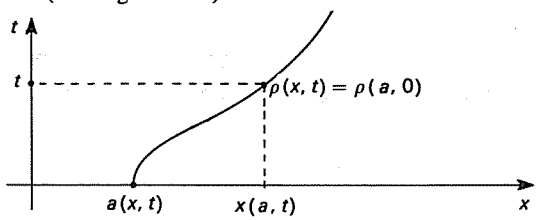


Figura 7.18

Este exemplo pode ser facilmente estendido para n dimensões, quando teremos

$$\rho(\mathbf{x}(t, \mathbf{a}), t) = \rho(\mathbf{a}, 0) \exp\left[-\int_0^t \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}(s, \mathbf{a}), s)\, ds\right]$$

Observe que para campos solenoidais ($\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0$) a densidade se mantém constante sobre as linhas de fluxo, e para $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ (ou < 0) a densidade cresce (ou decresce) exponencialmente ao longo do fluxo. ■

EXERCÍCIOS

1. *a.* Obtenha o fluxo característico da equação diferencial parcial linear

$$x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial v}{\partial x_2} = Lv$$

b. calcule a solução geral de $Lv = 0$; e de

c. $Lv = \varphi$, φ função contínua.

2. Duas funções v e u continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ são ditas *funcionalmente dependentes* se ∇v e ∇u forem diferentes de zero e linearmente dependentes para cada $x \in \mathbb{R}^2$. Dada v, obtenha todas as funções u funcionalmente dependentes de v e justifique esta definição.

Observação:

A condição de u e v serem linearmente dependentes pode ser escrita como

$$\det \begin{pmatrix} \partial v/\partial x_1 & \partial v/\partial x_2 \\ \partial u/\partial x_1 & \partial u/\partial x_2 \end{pmatrix} = 0$$

3. Considere o modelo de A. G. Mc Kendrick (~ 1914) para o crescimento de uma população que faz uso do processo de Poisson de nascimento e morte; supondo que, se no instante t a população tenha n indivíduos, então:

Probabilidade [A população no instante $t + \delta t$ tenha $n+1$ indivíduos] $= n\lambda\delta t + o(\delta t^2)$ e,
Probabilidade [A população no instante $t + \delta t$ tenha n indivíduos] $= 1 - n\lambda\delta t + o(\delta t^2)$.

Defina agora $P_n(t) =$ (Probabilidade que a população tenha n indivíduos no instante t) e verifique o seguinte:

Probabilidade que a população tenha n indivíduos no instante $t + \delta t = P_n(t + \delta t) =$ probabilidade que a população tenha n indivíduos no instante t e *não* tenham nascido indivíduos no intervalo $(t, T + \delta t) +$ probabilidade que a população tenha $n-1$ indivíduos no instante t e tenha nascido exatamente 1 indivíduo no intervalo $[t, t + \delta t] = P_n(t)(1 - n\lambda\delta t) + P_{n-1}(t)(n-1)\lambda\delta t + o(\delta t^2)$.

Daí, fazendo $\delta t \to 0$ tiramos o seguinte sistema de infinitas equações diferenciais ordinárias (ou, vista de outra forma uma equação diferencial e de diferenças finitas)

$$\frac{dP_n}{dt} = -\lambda_n P_n + (n-1)\lambda P_{n-1}$$

$$P_1(0) = 1;\ P_j(0) = 0,\ j > 1$$

onde as condições iniciais caracterizam o problema da gênese de uma população a partir de um único indivíduo. Para resolver este problema utilizaremos o método da função geratriz fazendo

$$F(t, x) = \sum_{n \geq 0} P_n(t) x^n$$

Verifique então que $F(t, x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\lambda x \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda x^2 \frac{\partial F}{\partial x} = \lambda(x^2 - x)\frac{\partial F}{\partial x}$$

Resolva esta equação e obtenha

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$$

Este é um exemplo particular das equações de Kolmogorov para processos de Markov contínuos*. (Observação: uma função de ordem menor do que h é denotada em geral por $o(h)$, e significa basicamente que $\lim \frac{o(h)}{h} = 0$. Para outros interessantes exemplos biológicos tratados por argumentos semelhantes consulte Ludwig**.

---

* Veja ROZANOV, Y. A. *Probability*: *A Concise Course*. New York, Dover, 1969, cap. 8.

** LUDWIG, D. Stochastic Population Theories. *Lecture Notes in Biomathematics*. New York, Springer-Verlag, 1978, 3v.

4. Suponha que à equação de McKendrick-von Foerster da Secção 7.2.6 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=-\mu(t,x)u$, sejam acrescentadas as condições iniciais $u(0,x)=h(x)$ e de fronteira $u(t,0)=N(t)=$ taxa de nascimento para cada instante t.

Obtenha o fluxo característico da equação linear para $\ln u=\rho$.

Mostre que com o dado inicial $h(x)$ é possível analisar a evolução da população somente para $x>t$ e obtenha a expressão para $u(t,x)$ nesta região; interprete o resultado. Mostre que para $x<t$ a solução $u(t,x)$ depende unicamente da condição de fronteira $N(t)$, $t>0$. Obtenha a expressão analítica desta solução.

Compare as duas soluções em $x=t$ e observe que esta linha (característica) pode transmitir uma descontinuidade na solução completa (ver Secção 7.5.3).

Se $u(t,0)=N(t)$ for da forma

$$N(t)=\int_0^\infty \lambda(t,x)\,u(t,x)\,dx \qquad \text{(onde } \lambda(t,x) \text{ é dada)}$$

as expressões obtidas *não* resolvem o problema, mas o transformam em uma equação integral para $N(t)$. Se esta equação for resolvida para $N(t)$ retornamos ao problema de condições iniciais e de fronteira original.

Mostre que a equação integral para $N(t)$ é da forma

$$N(t)=f(t)+\int_0^t K(t,x)\,N(t-x)\,dx$$

onde f e K são funções obtidas dos dados do problema. Esta equação é chamada *equação de renovação* e pode ser tratada com a transformada de Laplace*.

Um exemplo simples deste problema é chamado de gênese de uma população, em que a condição inicial $h(x)=\delta_\varepsilon(x)$, sendo $\delta_\varepsilon(x)$ uma seqüência de Dirac, isto é, $\delta_\varepsilon(x)\geqslant 0$, contínua, $\delta_\varepsilon(x)\downarrow 0$ se $x\neq 0$ e $\int_0^{\bar{x}} \delta_\varepsilon(x)dx=n$ se $\bar{x}>\varepsilon$. Esta condição simula o aparecimento "instantâneo" de n indivíduos no instante $t=0$.

O problema consiste em analisar a evolução da população resultante. Considere u e λ constantes e manipulando $\delta(x)=h(x)$ formalmente como uma função de Dirac por meio da Transformada de Laplace (Capítulo 3) conclua que

$$u(t,x)=\begin{cases}\exp(-\mu t), & t=x\\ 0, & t<0\\ \lambda\exp[(\lambda-\mu)(t-x)-\mu x], & t>x\end{cases}$$

A população total neste caso é

$$U(t)=\int_0^\infty u(t,x)\,dx=\exp[(\lambda-\mu)t]$$

Para outros exemplos envolvendo a equação de von Foerster consulte o livro citado de Hoppensteadt.

5. Sedimentação: Suponha que um fluido percorre um condutor considerado unidimensional (tubo, rio etc.) com velocidade dada $v(x,t)$ e que neste fluido existam partículas de uma substância (aluvião, por exemplo) em suspensão com densidade (incógnita) $\rho(x,t)$.

---

* Veja HOPPENSTEADT, F. *Mathematical Theories of Populations, Demographics, Genetics and Epidemics*. Philadelphia, SIAM, 1975.

LEVIN, S. A. & Paine, R. T. Disturbance, Path Formation and Community Structure. USA, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, *71*: 2.744-2.747, 1974.

Durante o percurso, o material em suspensão se deposita nas paredes do conduto. Suponha que isto se dê com uma taxa por unidade de tempo proporcional à densidade; $k(x, t)$ $\rho(x, t)$. Obtenha a equação de conservação deste material na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = k\rho$$

Dada a densidade desta substância no ponto x_0 de entrada, $u(x_0, t) = h(t)$, analise a solução resultante. Problemas semelhantes ocorrem no estudo de absorção acoplados a um fluxo, como em alguns processos químicos industriais, em Geologia, em Hemodinâmica etc*.

6. Soluções Analíticas.

Observação:

É importante observar que a equação diferencial

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} u = f \qquad (*)$$

nos dá uma informação incompleta sobre as derivadas parciais de u. Se conhecermos u sobre uma curva *transversal* a $\mathbf{A}$, digamos, $u(\mathbf{x}^0(s)) = h(s)$, então podemos calcular todas as derivadas parciais (de primeira ordem) de $u(x_1, x_2)$ sobre esta curva pois, derivando este dado, temos

$$\dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \operatorname{grad} u = h'(s) \qquad (**)$$

e o Sistema (*) e (**) de equações lineares em $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ tem uma solução única, pois $\dot{\mathbf{x}}^0(s)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x}^0(s))$ são linearmente independentes. Isto significa que o dado $u(\mathbf{x}^0(s)) = h(s)$ realmente acrescenta informações à equação diferencial e, de certa forma, completa as informações necessárias para o cálculo de u até a primeira ordem.

Se, por outro lado, a curva $\mathbf{x}^0(s)$ fosse característica, o dado $u(\mathbf{x}^0(s)) = h(s)$ seria supérfluo ou conflitante com a equação diferencial.

Suponha agora que todos os dados do problema sejam analíticos, isto é, que sejam representados por séries de Taylor. Derivando a Equação (*) com relação a x_1 e x_2 e a Equação (**) com relação a s obteremos três equações lineares em $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_1}$. Supondo $u_{x_1x_2} = u_{x_2x_1}$, teremos três equações a três incógnitas que o leitor pode verificar que são independentes e, portanto, podemos obter os valores de $u_{x_1x_1}$, $u_{x_1x_2}$ e $u_{x_2x_2}$. O processo pode ser continuado e, com isto, é razoável tentar provar que a solução do problema *não* característico é analítica com a expansão de Taylor dada pelos coeficientes encontrados. Esta é uma situação muito semelhante ao Teorema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias analíticas do Capítulo 3. Com a utilização destes argumentos e do mesmo método dos majorantes de Cauchy a matemática russa Sofya Kovalevskaya demonstrou um Teorema de Existência de Soluções para Problemas de Cauchy não característicos de equações diferenciais parciais analíticas em geral (lineares e não lineares). Para maiores detalhes a respeito deste importante teorema (Cauchy-Kovalevskaya), assim como sobre aspectos interessantes acerca da vida de sua autora consulte as obras referidas na nota de rodapé desta página**.

---

* Consulte, por exemplo, ARIS, R. & Arnundson, N. *Mathematical Methods in Chemical Engineering*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1973.

** COOKE, R. *The Mathematics of Sofya Kovalevskaya*. New York, Springer-Verlag, 1984.

GARABEDIAN, P. *Partial Differential Equations*. New York, Wiley, 1964, cap. 1.

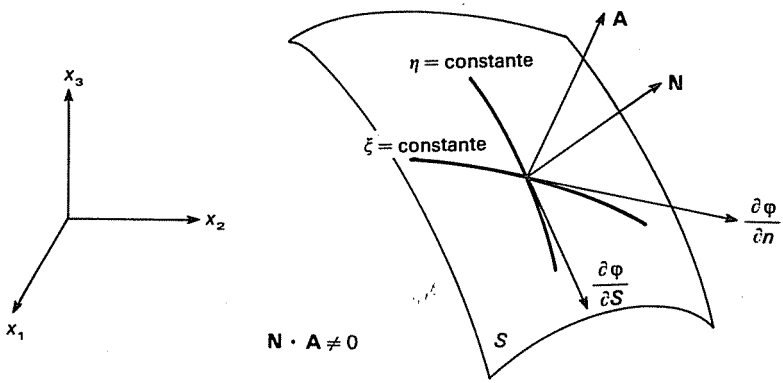
KOBLITZ, A. H. *A Convergence of Lives — Sofia Kovalevskaya: Scientist, Writer, Revolutionary*. Boston, Birkhauser, 1983.

KOCHINA, P. *Sofya Kovalevskaya*. Moscou, Mir, 1985.

KOVALEVSKAYA, S. *A Russian Childhood*. New York, Springer-Verlag, 1978.

Obtenha a solução $v(x_1, x_2)$ até a segunda ordem na expansão de Taylor para o Exercício 1.

Observe que, quando $x \in \mathbb{R}^3$, é necessário conhecer u sobre uma *superfície* transversal, S, ao campo $A = (A_1, A_2, A_3)$ (isto é, não característica). Assim teríamos três equações lineares em $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}$ (uma da equação diferencial e duas obtidas por derivação em duas direções linearmente independentes sobre a superfície).



Se a superfície for parametrizada por $\mathbf{x} = \varphi(\zeta, \eta)$, então $u_0(\zeta, \eta) = u(\varphi(\zeta, \eta))$ é dado inicial. Mostre que as equações lineares em $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}$ sobre S são

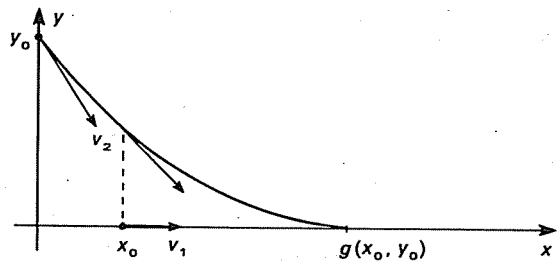
$$\begin{cases} A \cdot \operatorname{grad} u = f \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \operatorname{grad} u = h_1(\zeta, \eta) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \operatorname{grad} u = h_2(\zeta, \eta) \end{cases}$$

7. Mostre que a solução geral da equação

$$\langle \mathbf{x}, \nabla u \rangle = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda u;\ \lambda \text{ constante}$$

é uma função homogênea de grau λ em x_1 e x_2.

8. (Problema de perseguição) Suponha que um predador persiga uma presa sempre correndo em sua direção, tal como na figura abaixo, sendo que ambos têm velocidades escalares constantes $v_2 > v_1$, respectivamente.



a. Obtenha o sistema de equações diferenciais ordinárias para a trajetória do predador. Mostre que se $v_2 > v_1$, haverá captura em tempo finito.

b. Se $f(x_0, y_0) =$ (tempo de captura de uma presa partindo de x_0 por um predador que parte de y_0) então mostre (fazendo uso do argumento de Bellman) que

$$f(x_0, y_0) = \Delta + f x_0 + \Delta, y_0 - \frac{\Delta y_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} + o(\Delta).$$

e, formalmente, fazendo $\Delta \to 0$

$$0 = 1 + \frac{\partial f}{\partial x_0} - \frac{y_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \frac{\partial f}{\partial y_0}$$

com $f(x_0, 0) = \dfrac{x_0}{v_1 - v_2}$.

c. Obtenha equações análogas para $g(x_0, y_0) =$ (coordenada de captura).

d. Utilize o método das características e obtenha f e g analiticamente.

9. Um projétil de massa unitária, lançado para o alto com velocidade inicial v, de altura u, sofre uma resistência ao seu movimento (imposta pela atmosfera) que depende de sua altura e velocidade. A trajetória deste projétil pode ser descrita pela solução do problema de Cauchy

$$\frac{d^2y}{dt^2} = h(y, \dot{y}) \qquad y(0) = u \cdot (h(y, v) < 0)$$
$$\dot{y}(0) = v$$

A questão é obter a função $f(u, v) =$ altura máxima alcançada pelo projétil. Mostre, fazendo uso do princípio de Bellman, que

$$f(u, v) = v\Delta + f(u + \Delta v, v + h(u, v)\Delta) + o(\Delta)$$

e, formalmente, para $\Delta \to 0$

$$\begin{cases} 0 = v + v\dfrac{\partial f}{\partial u} + h(u, v)\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ f(u, 0) = u \end{cases}$$

Analise este problema pelo método das características, especialmente no caso em que

a. h depende apenas de y e

b. $h =$ constante $= -g$.

7.5.2 Método das Características para Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem Quase Lineares

Analisaremos agora a extensão dos argumentos geométricos e do método das características para equações diferenciais, cujo operador diferencial é ainda uma combinação linear das derivadas parciais de primeira ordem, mas cujos coeficientes podem, eventualmente, depender da incógnita, e que escreveremos na forma geral como

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(\mathbf{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = A_0(\mathbf{x}, u); \quad u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

considerando as funções $A_j(\mathbf{x}, u)$ continuamente diferenciáveis. É claro que estas equações podem não ser lineares, tanto pela simples dependência de u nos coeficientes como pela operação de composição com relação a u do termo independente A_0.

Embora este tipo de equação possa parecer muito especial, na verdade podemos reduzir equações não lineares gerais à forma quase linear (se bem que para incógnitas vetoriais) que, portanto, abrange uma enorme variedade de problemas, bem maior do que pode parecer inicialmente. Em particular, a equação de Hamilton-Jacobi para

uma dimensão espacial ($x \in \mathbb{R}$), $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \dfrac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$, se derivada com relação à variável x, pode ser interpretada como uma equação quase linear em $u = \dfrac{\partial S}{\partial x}$. (Verifique!)

Se $x \in \mathbb{R}^n$ obteremos, analogamente, um sistema de n equações quase lineares nas n incógnitas $\dfrac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial S}{\partial x_n}$ ou uma equação quase linear vetorial em $\dfrac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_x S^*$.

A interpretação geométrica não pode ser simplesmente transportada do caso linear, pois o campo vetorial $(A_1, \ldots, A_n)$ *não* está definido em $\mathbb{R}^n$, uma vez que os coeficientes dependem de $(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Uma maneira de estendermos os argumentos geométricos da secção anterior seria considerarmos o espaço aumentado $\mathbb{R}^{n+1}$ com a variável $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ e o campo vetorial $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n, A_0)$. Assim, é razoável analisar a conexão que existe entre as soluções da equação linear em $v(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$

$$-A_0(\bar{x})\frac{\partial v}{\partial x_{n+1}} + A_1(\bar{x})\frac{\partial v}{\partial x_1} + \ldots + A_n(\bar{x})\frac{\partial v}{\partial x_n} = 0 \tag{11}$$

e as soluções $u(x_1, \ldots, x_n)$ de (10). Deixaremos como exercício para o leitor verificar, formalmente, que, se $\dfrac{\partial v}{\partial x_{n+1}} \neq 0$, então as funções implícitas $x_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, c) = u(\mathbf{x}, c)$ definidas por $v(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c$ (constantes), são soluções de (10). Observe que com isto *não* estamos "linearizando" o Problema (10), pois a equação implícita é, em geral, não linear e *não* estamos afirmando que todas as soluções de (10) podem ser obtidas desta forma. Mas, afinal, todo método traz consigo as suas limitações!

Nesta secção desenvolveremos, todavia, um outro ponto de vista, geométrico, que estende o método das características, e poderá ser generalizado com maior facilidade para o estudo de equações não lineares em geral.

Consideremos então o problema com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ para a simplificação da descrição geométrica e interpretemos a solução $u(x_1, x_2)$ através do seu gráfico em $\mathbb{R}^3$ dado por $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$; $x_3 = u(x_1, x_2)$.

Sob este ponto de vista a Equação (10) se constitui em uma condição sobre o plano tangente a esta superfície em cada ponto do $\mathbb{R}^3$ por onde ela passa, pois $\mathbf{N} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, -1\right)$ é a sua normal e a Equação (10) pode ser escrita como

$$(A_1(\mathbf{x}, u);\ A_2(\mathbf{x}, u);\ A_0(\mathbf{x}, u)) \cdot \mathbf{N}(u) = 0$$

ou, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, u) \cdot \mathbf{N}(u) = 0$. Observe que $\mathbf{N}$ é um operador diferencial linear que produz a direção normal à superfície-solução em cada um de seus pontos. A Equação (10) impõe a condição geométrica de que o plano tangente a esta superfície sempre contenha o campo vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, u)$ em $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 7.19).

---

* Veja GARABEDIAN, P. *Partial Differential Equations*. New York, Wiley, 1964.

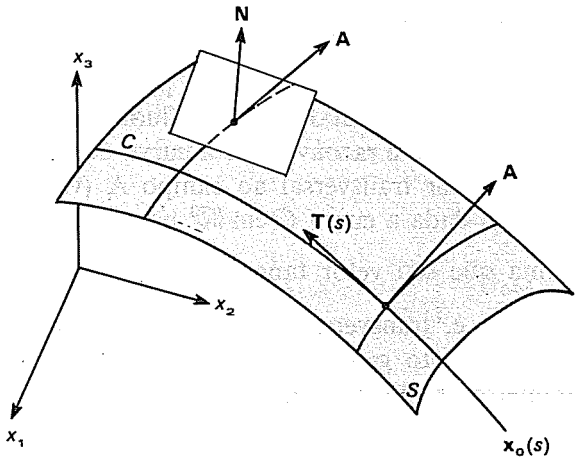


Figura 7.19

Observações:

a. A Equação (10) *não* caracteriza univocamente o plano tangente à superfície em cada ponto do $\mathbb{R}^3$, mas sim uma família (a um parâmetro) destes possíveis planos.

b. Dada uma solução $u(\mathbf{x})$ da Equação (10), as linhas de fluxo do campo $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) = (A_1(x_1, x_2, x_3); A_2(x_1, x_2, x_3); A_0(x_1, x_2, x_3))$ não podem ser transversais à superfície; mais ainda, uma linha de fluxo que tem um ponto em comum com a superfície-solução está toda sobre ela. Estas linhas de fluxo serão chamadas linhas características da Equação (10) em $\mathbb{R}^3$ e são descritas pela solução geral do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), & x \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \end{cases}$$

representada pelo fluxo $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.

Para confirmarmos a Observação (*b*), suponhamos que

$$\mathbf{x}^0 \in S = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_3 = u(x_1, x_2)\}$$

Derivando

$$\frac{d}{dt} u(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial u}{\partial x_1} x_1^0 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2^0 = A_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

que pela Equação Diferencial (10) (satisfeita por u) nos dá

$$\frac{d}{dt} u(x_1(t), x_2(t)) = A_0(\mathbf{x}) = \frac{dx_3}{dt}$$

e portanto $\dfrac{d}{dt}\Big[u(x_1(t), x_2(t)) - x_3(t)\Big] \equiv 0$ e como $u(x_1^0, x_2^0) = x_3^0$, concluímos o resultado.

Baseados nestas observações, verificamos que uma superfície-solução S pode ser apropriadamente "varrida" por uma família de trajetórias integrais do campo característico $\mathbf{A}$ em $\mathbb{R}^3$, desde que conheçamos uma curva C "inicial", em $\mathbb{R}^3$, por onde

deve passar esta superfície. Esta curva inicial é a informação adicional de que necessitamos para caracterizar uma solução. É claro que esta curva C não pode ser característica, pois caso contrário a informação real dada por ela seria de apenas um ponto da superfície; os outros pontos seriam dados supérfluos em vista da Observação (*b*).

Do ponto de vista geométrico é razoável que a curva C, encarada como um dado "inicial" do problema, deva ser transversal ao campo $\mathbf{A}$ (ver Figura 7.19).

Suponha então que seja dada a curva C em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{x}^0(s) = (x_1^0(s), x_2^0(s), x_3^0(s))$, de tal forma que seu vetor tangente $\mathbf{T}(s) = \dfrac{d\mathbf{x}^0}{ds}$ seja linearmente independente com $\mathbf{A}(x^0(s))$, isto é, transversal ao longo da curva.

De acordo com o argumento geométrico, considere agora a família de trajetórias em $\mathbb{R}^3$ a um parâmetro, s, do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad s \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0(s), \text{ dada por } \mathbf{x}(t, s) \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(0, s) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^0(s))$ e $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(0, s) = \mathbf{T}(s)$ são linearmente independentes, concluímos que a função $\mathbf{x}(t, s)$ (para $t = 0$) é a parametrização de uma superfície em $\mathbb{R}^3$, e obviamente a sua normal $\mathbf{N}$ é sempre perpendicular ao vetor $\mathbf{A}$ que é tangente a ela em cada ponto. Portanto, esta superfície é solução do seguinte problema geométrico: "obter uma superfície S que passa por C e satisfaz $\langle \mathbf{N}(P), \mathbf{A}(P) \rangle = 0$ $(\forall P \in S)$, onde $\mathbf{N}(P)$ é a sua normal no ponto $P \in S$".

Observe, entretanto, que a solução analítica da Equação (10) ainda não está garantida, pois o problema geométrico é mais geral: para que a superfície S seja interpretada como uma solução de (10) é necessário que possamos parametrizá-la por meio de (x_1, x_2), como o gráfico de uma função $u(x_1, x_2)$. Para que isto seja possível a condição natural é de que S seja transversal ao eixo x_3, ou ainda, que o seu plano tangente em nenhum ponto seja perpendicular ao plano $x_3 = 0$.

Verifique que esta condição pode ser expressa sobre a curva inicial C pela exigência de que as projeções de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{T}$ em $x_3 = 0$ sejam linearmente independentes.

Observe que esta condição é mais forte e contém a condição de transversalidade de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{T}$. A construção da solução é local (nas vizinhanças de C) e a condição de transversalidade sobre C das projeções de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{T}$ em $x_3 = 0$ se mantém em uma vizinhança de C, pela "continuidade" da superfície S construída geometricamente.

Com isto, observamos que se a superfície S deixa de ser transversal ao eixo x_3 em algum ponto, a solução analítica $u(x_1, x_2)$ deixa automaticamente de existir, embora a solução geométrica seja preservada. Este fato de extrema importância nos fornecerá uma das interpretações possíveis para o fenômeno de "blow up" de soluções (também chamado de formação de singularidades, catástrofes(!)); a outra interpretação tem origem física e descreve fenômenos de "choques". *

---

* ARNOLD, V. I. *Catastrophe Theory*. 2. ed. New York, Springer-Verlag, 1986.

Antes de tratar destas questões, enunciaremos então formalmente o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções (locais) do problema de Cauchy para equações quase lineares. A demonstração rigorosa deste teorema é uma formalização rotineira dos argumentos apresentados acima, e que pode ser feita sem dificuldade pelo leitor familiarizado com o Cálculo Diferencial.

Teorema Dado o problema de Cauchy

$$\begin{cases} A_1(x_1, x_2, u)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(x_1, x_2, u)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = A_0(x_1, x_2, u) \\ u = u_0 \text{ em } C \end{cases}$$

onde:

(*i*) $\bar{C}$ é uma curva em $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $(x_1^0(s), x_2^0(s))$, continuamente diferenciável.
(*ii*) $x_3^0 = u_0(s)$ é uma função continuamente diferenciável, definida sobre $\bar{C} \subset \mathbb{R}^2$.
(*iii*) $A_k(x_1, x_2, x_3)$ $(k = 0, 1, 2)$ são funções continuamente diferenciáveis em uma vizinhança da curva C em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $(x_1^0(s), x_2^0(s), x_3^0(s))$.
(*iv*) $\bar{\mathbf{A}} = A_1(x_1^0(s), x_2^0(s), u_0(s)); A_2(x_1^0(s), x_2^0(s), u_0(s)))$ e $\left(\dfrac{dx_1^0}{\partial s}, \dfrac{dx_2^0}{\partial s}\right)$ são linearmente independentes sobre $\bar{C}$.

Então, existe uma vizinhança de $\bar{C}$ em $\mathbb{R}^2$ onde está definida uma função continuamente diferenciável $u(x_1, x_2)$ que é solução única do problema de Cauchy acima.

A unicidade da solução vem do método de construção e da observação (*b*) feita anteriormente.

Deixamos ao leitor, como um exercício geométrico, enunciar o teorema correspondente para n dimensões, $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$. Enuncie também o problema geométrico generalizado, independente da representação analítica.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que se S_1 e S_2 são duas superfícies-soluções do problema geométrico e que se interceptam (transversal ou tangencialmente) em uma curva C, então C é característica. Demonstre analiticamente o fato para o caso da intersecção transversal e da representação das superfícies S_1 e S_2 como gráficos de u e v.
2. Considere agora uma família de soluções $U(x_1, x_2, \alpha)$ da Equação (10) a um parâmetro real α. Mostre por argumentos geométricos e analíticos que uma superfície envoltória desta família também é solução da Equação (10).

7.5.3 Formação de Singularidades — Ondas de Choque

O Teorema de Existência e Unicidade de Soluções apresentado na secção anterior tem um caráter local. Entretanto, em certos problemas de evolução em que uma das variáveis físicas é o tempo, este resultado é insuficiente, pois a solução deve ser analisada para $t \to \infty$.

Como já observamos, a condição de transversalidade entre a curva inicial e o campo característico é necessária para a representação local da solução geométrica como gráfico de uma função. Esta representação, todavia, pode deixar de ser possível a uma certa distância das condições iniciais tornando-se, portanto, inevitável que a questão da formação de singularidades venha a ser analisada.

Para exemplificar os argumentos, utilizaremos as equações de conservação quase lineares para uma dimensão espacial que podem ser escritas na sua forma geral como

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\phi(u)=0 \tag{12}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{13}$$

onde $c(u)=\phi'(u)$ e ϕ é uma relação constitutiva.

Equações deste tipo são obtidas como modelo matemático para o transporte de partículas suspensas em um fluido, processos de infiltração (percolação), ondas de enchentes, tráfego em vias longas etc.

Observemos ainda que o sistema de equações de Euler para a dinâmica unidimensional de gases ideais (ver Secção 7.2) também é uma Lei de Conservação Vetorial para $u=\begin{pmatrix}\rho\\ v\end{pmatrix}$, assim como inúmeros outros problemas da Física Matemática, tais como propagação de ondas gravitacionais de superfícies em líquidos (oceanos), ondas elásticas, ondas em plasma etc.

Em concordância com o caráter introdutório deste texto, abordaremos apenas aspectos gerais do problema para *equações escalares* que exemplificam, de forma elementar, os argumentos levantados neste tipo de questão.

As condições iniciais para leis de conservação do tipo (12) são naturalmente fornecidas sobre $t=0$, no plano das variáveis $(x,t)\equiv(x_1,x_2)$. Esta linha é não característica, pois sua direção $\mathbf{T}=(1,0)$ é sempre transversal ao campo característico projetado $(c(u_0(x)),1)$, independente do dado inicial $u(x,0)=u_0(x)$.

O problema de Cauchy é, então, modelado da seguinte maneira

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+c(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & t>0\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}$$

cuja solução *local* é garantida pelo Teorema da Secção 7.5.2, uma vez que estejam satisfeitas as condições de diferenciabilidade sobre $c(u)$ e $u_0(x)$ (ver Figura 7.20).

Analisaremos este problema inicialmente do ponto de vista estritamente geométrico e depois acrescentaremos a interpretação física da Lei de Conservação. Na verdade, a solução geométrica é facilmente construída pelo método das características, bastando para isto obter o fluxo para o campo característico $\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3)=$ $=(c(x_3),1,0)$ a partir das condições iniciais $\mathbf{x}^0(s)=(s,0,u_0(s))$.

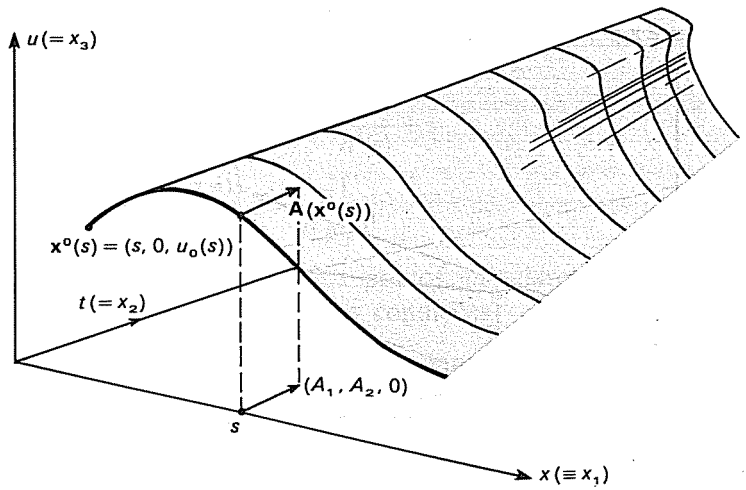


Figura 7.20

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = c(x_3), & x_1(0) = s \\ \dfrac{dx_2}{d\tau} = 1, & x_2(0) = 0 \\ \dfrac{dx_3}{d\tau} = 0, & x_3(0) = u_0(s) \end{cases}$$

Observando que $x_3 \equiv u$, $x_2 \equiv t$, $x_1 \equiv x$ e integrando as duas últimas equações, obteremos a superfície S solução do *problema geométrico* $\mathbf{N}_S(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$ ($\mathbf{N}_S(\mathbf{x}) \equiv$ normal a S no ponto $\mathbf{x} \in S$) que é representável parametricamente na forma

$$\mathbf{x}(\tau, s) = (c(u_0(s))\tau + s, \tau, u_0(s))$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = h(s)t + s, & h(s) = c(u_0(s)) \\ x_2 = t \\ x_3 = u_0(s) \end{cases}$$

que é válida para todo $t > 0$ e s. (Verifique!)

Analisemos agora algumas propriedades geométricas desta superfície.

Fixando s e variando t ($\equiv x_2$) obtemos uma reta no plano $x_3 = u_0(s)$ cuja projeção em (x_1, x_2) é a reta

$$x_1 = h(s)x_2 + s = h(s)t + s$$

que é denominada curva característica projetada.

Observe então que a superfície S é descrita varrendo-se o espaço com as curvas características (que são retas paralelas ao plano (x_1, x_2)) apoiadas na curva inicial. A inclinação de cada reta característica projetada, dada por $h(s) = c(u_0(s)) = \operatorname{tg} \theta(s)$, depende da sua posição inicial s. Portanto, se $h(s)$ for decrescente, é razoável esperar que a superfície apresente uma "dobra" vertical a certa distância do eixo x_1.

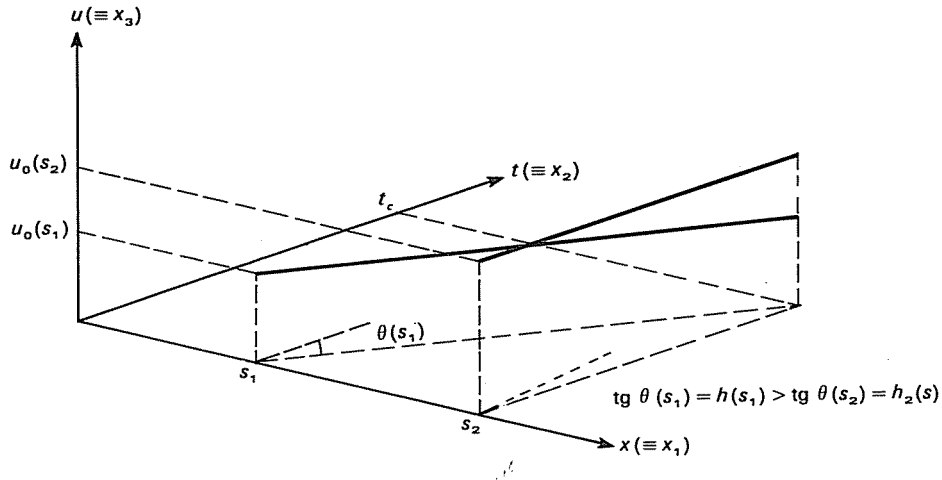


Figura 7.21

Se $s_2 > s_1$, as respectivas retas características projetadas se interceptarão quando $t = t_c$ (ver Figura 7.21).

$$x_{1_c} = h(s_2)t_c + s_2 = h(s_1)t_c + s_1$$

$$t_c = \frac{s_2 - s_1}{h(s_1) - h(s_2)} > 0$$

Como já observamos na secção anterior, a solução geométrica só poderá ser a representação de uma solução analítica se for o gráfico de uma função de (x_1, x_2) (ou (x, t)), e isto é impossível nos pontos em que a superfície S toma uma posição vertical, ou seja, onde seu plano tangente é paralelo ao eixo x_3. Estes pontos serão chamados singularidades da solução geométrica.

Observe que esta dificuldade não deve existir sobre uma reta característica antes que a sua projeção intercepte outra. Portanto, a determinação dos pontos onde primeiro (com relação ao parâmetro t) se dão estas intersecções das características projetadas é essencial para a compreensão da formação de singularidades.

Se $h(s)$ é estritamente decrescente em um intervalo de s, uma reta característica projetada partindo de $(s, 0)$ interceptará todas as outras que partem de sua vizinhança, tanto antes quanto mais próximas. Em outras palavras, para determinar o primeiro ponto de intersecção da reta característica projetada $h(s)t + s = x$, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x = h(s)t + s \\ x = h(s + \Delta)t + (s + \Delta) \end{cases}$$

e fazemos $\Delta \to 0$, que é equivalente, em geral, ao sistema

$$\begin{cases} x = h(s)t + s \\ 0 = h'(s)t + 1 \end{cases}$$

e que, por sua vez, determina a envoltória da família de retas características projetadas*.

* COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2v.

Esta envoltória pode ser descrita parametricamente por s no plano (x, t), pelas equações

$$\begin{cases} x = -\dfrac{h(s)}{h'(s)} + s \\ t = \dfrac{-1}{h'(s)} \end{cases}$$

Verifique que esta determinação dos pontos singulares coincide também com aquelas obtidas *por qualquer* das seguintes condições:

(*i*) pontos da superfície S em que o seu plano tangente é paralelo ao eixo x_3;

(*ii*) pontos em que o jacobiano $\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s, t)} = \det \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial s & \partial x_1/\partial t \\ \partial x_2/\partial s & \partial x_2/\partial t \end{pmatrix} = 0$ e, portanto, não é possível escrever x_3 como função continuamente diferenciável de $(x_1, x_2) \sim (x, t)$.

Observe que a envoltória L no plano (x, t) é sempre tangente ao campo característico projetado, mas não é uma curva característica projetada!

A solução geométrica pode ser então interpretada como uma curva para cada instante t, resultado da propagação da curva inicial $x^0(s) = (s, 0, u_0(s))$.

EXEMPLO 2

Tomemos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u_0(s) = u(s, 0) = 1 - s, \quad \text{onde} \quad u^2 = c(u) \quad \text{e} \quad \dfrac{u^3}{3} = \phi(u) \end{cases}$$

Portanto, $h(s) = (1 - s)^2$ é decrescente para $s < 1$ (ver Figura 7.22).

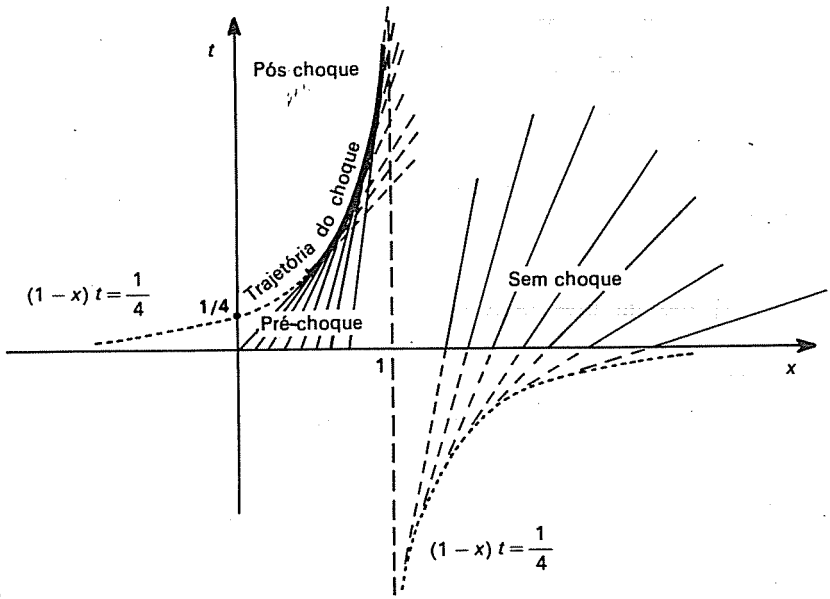


Figura 7.22

Temos que $\mathbf{A}(x, t, u) = (u^2, 1, 0)$.

A envoltória será dada, então, por

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+s}{2} \\ t = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1-s} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (1-x)t = \frac{1}{4}$$

que é uma hipérbole.

A solução *geométrica* do problema é dada pela superfície parametrizada por

$$\begin{cases} x_1 = (1-s)^2 t + s, & t > 0 \quad \text{e} \quad -\infty < s < \infty \\ x_2 = t \\ x_3 = (1-s) = u_0(s) \end{cases}$$

A solução *analítica* pode então ser obtida apenas na região à direita da hipérbole, isto é

$$\left\{(x, t) \quad \text{tais que} \quad (1-x)t < \frac{1}{4}; \quad t > 0\right\}$$

e será dada por (Verifique!)

$$u(x, t) = u_0(s(x, t)) = 1 - s(x, t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t(1-x)}}{2t}.$$

EXERCÍCIOS

1. Verifique que, para $t \to 0$, $u(x, t) \to 1 - x$.
2. Analise a deformação da curva

   $$s \to x_3 = x_3(s, t)$$

   no plano (x_1, x_3) com o tempo. A solução pode ser interpretada como a propagação do "sinal"

   $$s \to u(s, 0) = u_0(s)$$

   que é, portanto, deformado pela não linearidade da equação.
3. Suponha que $c(u) = c$ (constante) e mostre que a forma do "sinal" é mantida no caso linear.
4. Interprete a curva de singularidade L como a propagação de uma "onda de choque" através do meio unidimensional x. Mostre que a velocidade de propagação desta "onda" é dada por $c(u)$, para u calculado imediatamente anterior à "frente" de onda.

As restrições impostas sobre o domínio de definição da solução analítica torna-a insatisfatória pois, como já frisamos, em um problema de evolução, é necessário conhecer o estado de cada ponto x para todo $t > 0$.

Por outro lado, a solução geométrica, se bem que nos esclareça completamente a origem e a estrutura da formação destas singularidades, não nos fornece um critério para a escolha dos valores de u na região além da linha de singularidade, onde o gráfico se torna, em geral, multivalente.

É necessário, então, analisar o problema na sua interpretação física original para que, com base nisto, possamos estender a solução através da linha de singularidades de forma razoável.

Para equações de conservação, veremos que alguns argumentos extraídos da sua formulação integral podem, independente do seu significado físico específico, nos conduzir a uma solução razoável desta questão.

O desenvolvimento de singularidades em leis de conservação, que inicialmente pode dar a impressão de uma falha irremovível do modelo matemático é, em muitos casos, apenas o resultado de uma interpretação inadequada do conceito de solução. O retorno à formulação integral original pode mostrar que o modelo diferencial faz suposições sobre a limitação de u e suas derivadas em todo o processo, que não se justificam, devido à própria evolução do sistema.

Por exemplo, quando um ponto se aproxima da linha de singularidade L, o gradiente de u cresce indefinidamente, o que pode invalidar as hipóteses assumidas para a relação constitutiva: tensor de fluxo $= \phi(u)$. No caso de um gás ideal, o aumento do gradiente de pressão certamente invalidará a relação $p = f(\rho)$, o mesmo acontecendo com o modelo contínuo de tráfego ou de enchentes ($u =$ altura da onda de enchente!) etc.

Para modelos físicos com leis de conservação, a linha de singularidades é chamada *onda de choque*, por motivos óbvios, e pode ser interpretada como o movimento de uma frente de onda unidimensional no eixo x tal como $x = 1 - \frac{1}{4t}$ no Exemplo (2).

Em vários exemplos físicos verifica-se experimentalmente que o fenômeno de ondas de choque é real e caracterizado pelo aparecimento de regiões onde o modelo matemático utilizado é invalidado.

Observa-se, por exemplo, que na região de choque em dinâmica dos gases ideais desenvolvem-se grandes variações de pressão e temperatura que são incompatíveis com a relação constitutiva $p = f(\rho)$ e a hipótese do fluxo adiabático, necessárias para a formulação das equações de Euler. Entretanto, observa-se também que, através de processos de dissipação a nível molecular (portanto, fora do alcance do modelo contínuo e, na verdade, de difícil descrição), o gás volta rapidamente às condições de validade das equações de Euler, fazendo com que a região de choque seja extremamente delgada. Assim, é razoável proceder tal como fizemos no estudo de choques para equações ordinárias no Capítulo 3: idealizamos a onda de choque como um ponto (linha, superfície etc.), desistimos de descrever o processo que se desenvolve no seu interior e tentamos ligar as soluções das equações de Euler para antes e depois desta onda, por meio de critérios matemática e fisicamente razoáveis.

Se não dispomos neste ponto de argumentos extramatemáticos, estamos obviamente diante de uma multiplicidade de soluções, tal como no caso das equações diferenciais ordinárias.

A escolha do critério para a conexão da solução nas linhas de singularidades depende do problema específico tratado e seus objetivos. Entretanto, no caso das equações de conservação, podemos desenvolver argumentos razoavelmente gerais baseados na formulação integral da Lei de Conservação.

Observe inicialmente que a solução geométrica já nos convence de que é impossível obter uma solução contínua através da onda de choque. Portanto, admitiremos descontinuidades, mas começaremos pelas opções mais simples, como convém. Vamos supor que u tenha uma descontinuidade de *salto* através da onda de choque idealizada e denotaremos por $[u]$ a diferença entre o limite de u à direita e à esquerda da frente de onda.

Suponha que esta onda de choque (em uma dimensão espacial) seja descrita pela trajetória $x = \varphi(t)$. Consideremos os instantes t_1 e t_2, $t_1 < t_2$ e o segmento $[x_1 = \varphi(t_1), x_2 = \varphi(t_2)]$, tal como na Figura 7.23.

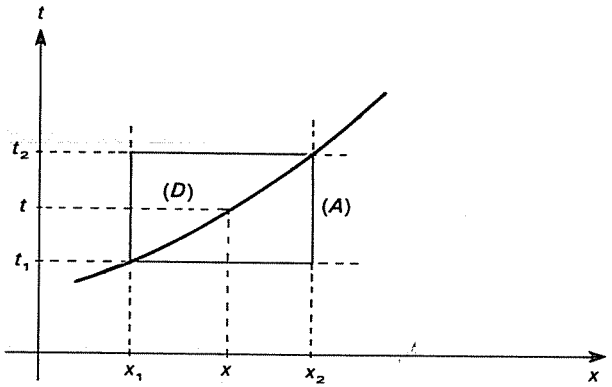


Figura 7.23

Separemos o plano (x, t) nas regiões de antes (A) e depois (D) da passagem da frente de onda de choque e denotaremos por $u^a(x)$ e $u^d(x)$ os limites dos valores de u em $x \in L$ antes e depois da frente de onda; $[u(x)] = u^d(x) - u^a(x)$.

Por exemplo

$$\begin{cases} u^d(x_1) = \lim\limits_{x \uparrow x_1} u(x, t_1) \\ u^a(x_1) = \lim\limits_{x \downarrow x_1} u(x, t_1) \end{cases}$$

Considerando o segmento $[x_1, x_2]$ durante o intervalo $[t_1, t_2]$, a Lei de Conservação de "massa" para a densidade u pode ser escrita por: "variação da massa contida no segmento $[x_1, x_2]$ entre o instante t_1 e o instante t_2 = fluxo total de massa através de x_1 e x_2 durante o período (t_1, t_2)" ou, supondo *integrabilidade* de u, podemos escrevê-la matematicamente como

$$\int_{\varphi(t_1)=x_1}^{\varphi(t_2)=x_2} [u(x, t_2) - u(x, t_1)]\,dx = \int_{t_1}^{t_2} [\phi(u(x_1, \tau)) - \phi(u(x_2, \tau))]\,d\tau$$

Supondo então que u seja *contínua* em (D) e (A), separadamente, podemos escrever (utilizando o Teorema do Valor Médio)

$$\int_{x_1}^{x_2} [u^d(x, t_2) - u^a(x, t_1)]\,dx = [u^d(\zeta, t_2) - u^a(\zeta, t_1)] \cdot [\varphi(t_2) - \varphi(t_1)] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [\phi(u^d(x_1, \tau)) - \phi(u^a(x_2, \tau))]\,d\tau = \phi(u^d(x_1, \theta)) - \phi(u^a(x_2, \theta))]\,(t_2 - t_1)$$

Tomando agora t_2 e t_1 convergindo para t e x_1, x_2 tendendo a x, verificamos que $\theta \to t$ e $\zeta \to x$ e no limite teremos

$$[u^d(\varphi(t), t) - u^a(\varphi(t), t)] \cdot \dot{\varphi}(t) = [\phi(u^d(\varphi(t), t)) - \phi(u^a(\varphi(t), t))]$$

Esta importante equação é usualmente escrita como

$$v_c = \frac{[\phi]}{[u]} = \frac{\phi(u^d) - \phi(u^a)}{u^d - u^a}$$

e significa que a velocidade v_c da onda de choque é caracterizada pelo salto $[u]$ de u e pelo salto do fluxo $[\phi]$ através dela.

Desta forma, concluímos que, conhecendo a curva L em (x, t), determinada pela trajetória da onda de choque e obtida a partir das condições iniciais, podemos, através de uma lei de conservação e da hipótese de choque fraco, obter os valores de u logo após a passagem da onda.

Com isto, é possível estender a solução para uma região depois do choque, resolvendo pelo método das características o novo problema de Cauchy a partir de L, com os dados obtidos pela relação de choque.

Este é o procedimento básico para a construção de soluções descontínuas de saltos (choque fraco) para leis de conservação e, como se pode notar, é muito semelhante ao procedimento adotado no Capítulo 3.

É importante observar que o conhecimento da Lei de Conservação Integral que dá origem ao problema diferencial é decisivo no estabelecimento das relações de choque. Estas relações dependem, naturalmente, da Lei de Conservação assumida, que não é univocamente determinada pela equação diferencial propriamente dita (ver Exercício 2 a seguir).

Uma outra maneira de fazer esta conexão seria analisar o problema físico, como em Dinâmica de Gases, acrescentado de efeitos dissipativos (viscosidade), o que nos fornece um modelo para a descrição do processo interno da onda de choque por meio de soluções continuamente diferenciáveis. Estas soluções, no limite nulo de dissipação, produzem então um critério para a extensão da solução descontínua através das ondas de choque (ver Exercício 7 a seguir).

Em resumo, o leitor deve observar que, do ponto de vista matemático, não há um procedimento preferencial para a construção de soluções descontínuas; este é um atributo da interpretação do modelo matemático. Voltamos assim ao argumento que tentamos imprimir ao longo deste livro sobre a interdependência mutuamente vantajosa entre a Matemática e suas aplicações.

O leitor interessado em prosseguir no estudo deste fascinante campo cuja pesquisa, teórica e aplicada, se desenvolve vigorosamente, deve consultar uma das excelentes referências que têm sido publicadas ultimamente sobre o assunto*.

---

* CHORIN, A. J. & Marsden, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. New York, Springer-Verlag, 1979.

COURANT, R. & Friedrichs, K. O. *Supersonic Flow and Shock Waves*. New York, Wiley, 1948.

LAX, P. D. *The Formation and Decay of Shock Waves*. USA, *American Math. Monthly*, March 1972.

MORAWETZ, C. S. *Lectures on Nonlinear Waves and Shocks*. New York, Springer-Verlag, 1981.

WHITHAM, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York, Wiley, 1974.

——— *Lectures on Wave Propagation*. New York, Springer-Verlag, 1979.

EXERCÍCIOS

1. Analise o problema de Cauchy para a Lei de Conservação

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^3}{3}\right) = 0 \\ u(x,0) = 1 - x, \quad x > 0 \end{cases}$$

por meio dos argumentos desenvolvidos acima.

2. Mostre que a Lei de Conservação $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(u) = 0$ é equivalente a $\dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\phi(U) = 0$ para $U = F(u)$, onde $F'(\zeta) > 0$ e

$$\phi(v) = \int_{v_1}^{v_2} F'(\zeta)\varphi'(\zeta)\,d\zeta$$

3. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda u, \quad \lambda \text{ constante} \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

e obtenha as condições sobre $h(x)$ e λ para que não ocorram singularidades.

Analise a formação de singularidades.

4. Dada a equação de Hamilton-Jacobi em uma dimensão espacial

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\, t\right) = 0$$

e fazendo $p = \dfrac{\partial S}{\partial x}$, obtenha uma equação diferencial parcial quase linear para $p(x, t)$.

Identifique as características projetadas desta equação com o fluxo hamiltoniano.

5. Analise a formação de singularidades para a equação eiconal em uma dimensão espacial

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0$$

6. Resolva pelo método das características

$$x^2\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + tu = 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad x > 0$$
$$u(0,\, t) = h(t), \quad t > 0$$

7. Considere a lei de conservação $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\phi = 0$

para o fluxo dado pela relação constitutiva

$$\phi = f(u) - \nu\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{(equação de Burgers)}$$

onde ν é um coeficiente positivo de dissipação.

Obtenha uma solução para esta equação na forma de uma onda viajante $u(x, t) = \varphi(x - \lambda t)$, resolvendo a equação diferencial ordinária resultante para φ com as condições

$$\varphi(\pm\infty) = u_{\pm\infty}$$
$$\varphi_x(\pm\infty) = 0$$

e analise o comportamento de $\varphi(x - \lambda t) = u_\nu(x, t)$ para $\nu \to 0$*.

---

* WHITHAM, G. B. *Lectures on Wave Propagation*. New York, Springer-Verlag, 1979.

7.5.4 Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem Não Lineares

Analisaremos nesta secção as equações do tipo

$$F(\mathbf{x}, u, \text{grad } u) = 0 \tag{14}$$

onde $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ é uma função real, continuamente diferenciável, de $2n+1$ variáveis ($\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ pertencem a $\mathbb{R}^n$ e $u(\mathbf{x})$ é uma função de valores reais).

Um exemplo típico é a equação de Hamilton-Jacobi

$$H(\mathbf{x}, \text{grad } u) = 0 \quad \left(\text{ou } \frac{\partial S}{\partial t} + \hat{H}(\mathbf{x}, \nabla S) = 0\right)$$

e, particularmente, a equação da ótica geométrica para o meio isotrópico

$$(\nabla S)^2 = n^2, \text{ onde } F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = \| \mathbf{p} \|^2 - n^2(\mathbf{x})$$

chamada eiconal.

Tal como nos outros casos de equações de primeira ordem, o método de solução de (14) é sugerido por considerações geométricas e exatamente por isto trataremos apenas de equações em $\mathbb{R}^2$, o que simplifica os argumentos.

A função $u(\mathbf{x})$ será interpretada como o gráfico de uma superfície $\mathbb{R}^3$ cuja normal em cada um de seus pontos $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ é dada por $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, -1\right)$. Neste caso, a Equação (14) pode ser escrita como

$$F(x_1, x_2, u(x_1, x_2), p_1, p_2) = 0 \tag{15}$$

e deve ser vista como uma restrição ao plano tangente da superfície-solução que passa por (x_1, x_2, x_3), $x_3 = u(x_1, x_2)$.

Fixado o ponto $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = x^0$, a segunda Equação (15) dá origem a uma família de planos que passam por x^0 e têm o vetor $(p_1, p_2, -1)$ como normal (ver Figura 7.24).

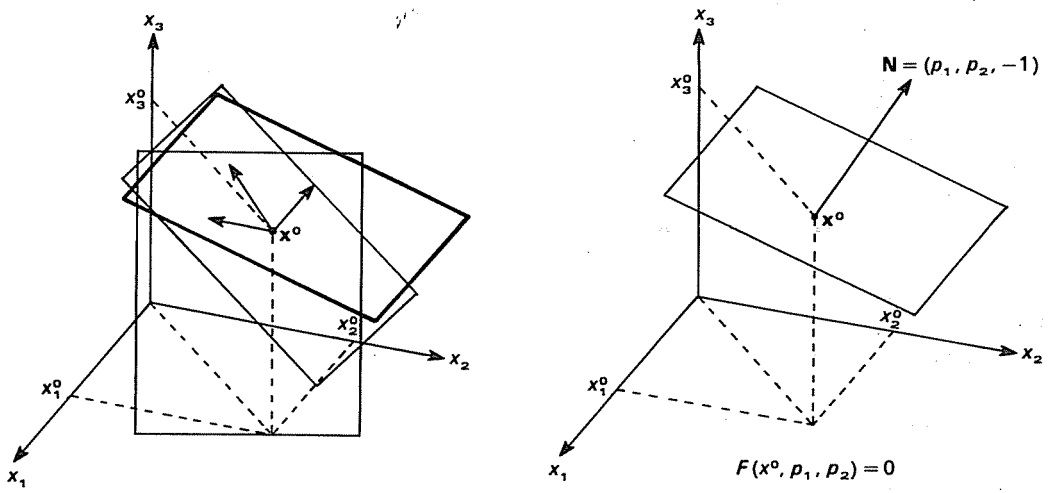


Figura 7.24

A equação destes planos tangentes é dada por

$$\begin{cases}(x_1 - x_1^0)p_1 + (x_2 - x_2^0)p_2 + (x_3 - x_3^0)\,(-1) = 0 \\ F(x_1^0, x_2^0, x_3^0, p_1, p_2) = 0\end{cases} \tag{16}$$

Vamos supor que (via Teorema da Função Implícita) possamos obter uma solução paramétrica da Equação (15) na forma $p_1(\alpha), p_2(\alpha)$. Por exemplo, para a equação eiconal $p_1^2 + p_2^2 = n^2(x_1^0, x_2^0)$ temos

$$p_1(\alpha) = n(x_1^0, x_2^0)\cos\alpha \quad \text{e} \quad p_2(\alpha) = n(x_1^0, x_2^0)\,\text{sen}\,\alpha$$

Façamos agora uma imagem geométrica do movimento da família dos planos π_α que passam por $\mathbf{x}^0$ e são normais a $(p_1(\alpha), p_2(\alpha), -1) = N_\alpha$, e da envoltória destes planos (isto é, a superfície sugerida pelas intersecções entre planos próximos π_α e $\pi_{\alpha+\Delta}$).

A envoltória é tangente a esta família de planos e tem o aspecto genérico de um cone com vértice em $\mathbf{x}^0$, chamado *cone de Monge* (Gaspard Monge) (ver Figura 7.25).

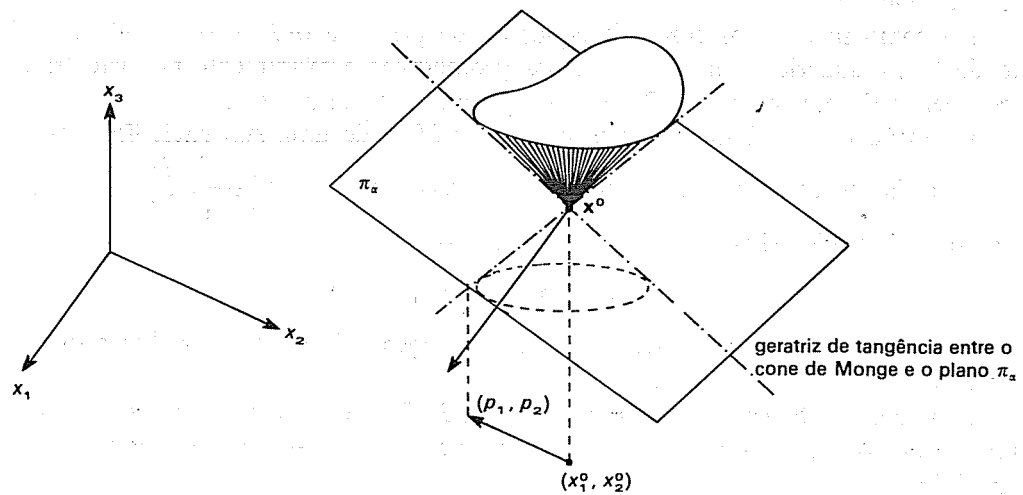


Figura 7.25 Cone de Monge

No exemplo da eiconal temos realmente um cone. Para a equação de Hamilton-Jacobi em que $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ é homogênea (se $H(\mathbf{x}^0, \mathbf{p}) = 0$ então também $H(\mathbf{x}^0, -\mathbf{p}) = 0$), a envoltória também é um cone que vem descrito pelo sistema de equações

$$\begin{cases}(x_1 - x_1^0)p_1(\alpha) + (x_2 - x_2^0)p_2(\alpha) - (x_3 - x_3^0) = 0 \\ (x_1 - x_1^0)\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha} + (x_2 - x_2^0)\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha} = 0\end{cases} \tag{17}$$

onde $(p_1(\alpha), p_2(\alpha))$ é solução parametrizada de $F(x_1^0, x_2^0, x_3^0, p_1, p_2) = 0$*.

Concluímos então que a superfície-solução deverá ser tangente, em cada ponto $\mathbf{x}^0$, ao cone de Monge construído em $\mathbf{x}^0$. Observemos que no caso quase linear o cone de Monge se degenera em uma reta. (Verifique!)

---

* Sobre envoltórias, veja COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto Alegre, Globo, 1965, 2v.

Se F é não linear em $\mathbf{p}$ dispomos então de um "campo de cones" em $\mathbb{R}^3$ (e não de retas, como no caso quase linear) e o nosso problema é construir uma superfície em $\mathbb{R}^3$, parametrizável por (x_1, x_2), que seja tangente a estes cones.

O método de construção ainda é o mesmo, ou seja, tentaremos descrever a superfície por meio de uma família de trajetórias que são tangentes a uma das geratrizes do cone de cada ponto por onde passam. Portanto, temos agora uma liberdade maior, pois é necessário escolher a geratriz que a trajetória deve tangenciar em cada ponto. Assim, esta trajetória $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ deve vir acompanhada de uma função $(p_1(t), p_2(t))$ que deverá especificar em cada ponto $\mathbf{x}(t)$ esta geratriz (pela normal a ela: $(p_1(t), p_2(t), -1)$). Por uma questão de coerência devemos ter $(p_1(t), p_2(t), -1)$ normal a $\dfrac{dx}{dt}$.

As curvas $x(t)$, acompanhadas dos vetores normais $(p_1, p_2, -1)$, são como "tiras infinitesimais" da superfície-solução e são chamadas *faixas características* (ver Figura 7.26).

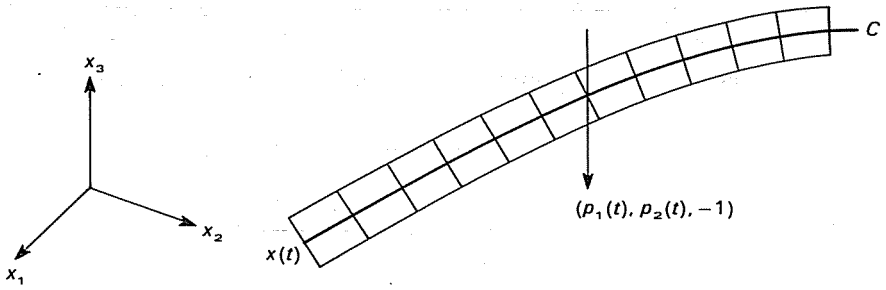


Figura 7.26

Tal como na equação quase linear, é necessário especificar uma curva $\mathbf{x}^0(s)$ de partida que, neste caso, também deve ser acompanhada das direções normais $\mathbf{p}^0(s) = (p_1^0(s), p_2^0(s), -1) = \mathbf{N}^0(s)$. Entretanto, não dispomos de completa liberdade para especificar estes dados pois devemos ter as seguintes condições de compatibilidade

$$\mathbf{N}^0(s) \cdot \frac{dx^0}{ds} = 0 \tag{18}$$

$$F(x_1^0(s), x_2^0(s), x_3^0(s), p_1^0(s), p_2^0(s)) = 0, \text{ para todo } s \tag{19}$$

O objetivo, portanto, é construir uma família de curvas $\mathbf{x}(t, s)$ partindo de $\mathbf{x}^0(s) = \mathbf{x}(0, s)$, acompanhadas dos vetores normais $(p_1(t, s), p_2(t, s), -1) = \mathbf{N}(t, s)$ $(p_i(0, t) = p_i^0(s), i = 1, 2)$, que descrevem a superfície-solução. Esta família será obtida como solução do problema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias em t para $\mathbf{x}(t, s)$ e $\mathbf{p}(t, s)$. Para que $\mathbf{x}(t, s), \mathbf{p}(t, s)$ representem realmente a superfície-solução devemos ter $F(\mathbf{x}(t, s), \mathbf{p}(t, s)) = 0$. Como $F(\mathbf{x}(0, s), \mathbf{p}(0, s)) = 0$ (Condição 19)), basta impor que $\dfrac{d}{dt} F(\mathbf{x}(t, s), \mathbf{p}(t, s)) = 0$, ou seja

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

(*Entenda-se que índices repetidos pressupõem uma somatória.*)

Para que $x_3(t, s)$ esteja ligado às funções $p_k(t, s)$ por intermédio das derivadas de uma função $u(x_1, x_2)$ procurada, devemos ter

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad \frac{\partial x_k}{\partial t} = p_k \frac{\partial x_k}{\partial t} \qquad (k = 1, 2) \tag{21}$$

Tal equação é equivalente à condição de ortogonalidade entre $(p_1, p_2, -1)$ e $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$!

Agora, utilizando (21) em (20), temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_3}\left(p_k \frac{\partial x_k}{\partial t}\right) + \frac{\partial F}{\partial p_k} \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_3} p_1\right)\frac{\partial x_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_3} p_2\right)\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = 0 \tag{20'}$$

Ao invés de (20') supomos uma condição mais forte, isto é

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_k}{\partial t} = \dfrac{\partial F}{\partial p_k}, & (k = 1, 2) \\ \dfrac{\partial p_k}{\partial t} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_k} - \dfrac{\partial F}{\partial x_3} p_k \end{cases} \tag{22}$$

que são chamadas equações bicaracterísticas.

Voltando a (21) podemos escrever

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} \tag{21'}$$

Desta forma dispomos de um sistema de $2n + 1$ equações diferenciais ordinárias não lineares

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_k} & (k = 1, 2) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = p_k \dfrac{\partial F}{\partial p_k} \\ \dfrac{dp_k}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_k} - \dfrac{\partial F}{\partial x_3} p_k \end{cases} \tag{23}$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} x_k(0, s) = x_k^0(s) \\ x_3(0, s) = x_3^0(s) \\ p_k(0, s) = p_k^0(s) \end{cases} \tag{24}$$

De (23) e (24) e do Teorema de Existência, Unicidade e Dependência de Parâmetros para equações diferenciais ordinárias (Teorema da Secção 5.2), temos a função

$$\mathbf{x}(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s), x_3(t, s))$$

continuamente diferenciável.

Para que $\mathbf{x}(t, s)$ descreva uma superfície na vizinhança da curva C e seu plano tangente seja sempre projetável em $\mathbb{R}^2_x$ (isto é, transversal a x_3), é necessário e suficiente que

$$\left(\frac{dx_1^0}{ds}, \frac{dx_2^0}{ds}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}\right) \tag{25}$$

sejam linearmente independentes em C (condição de transversalidade) (ver Figura 7.27).

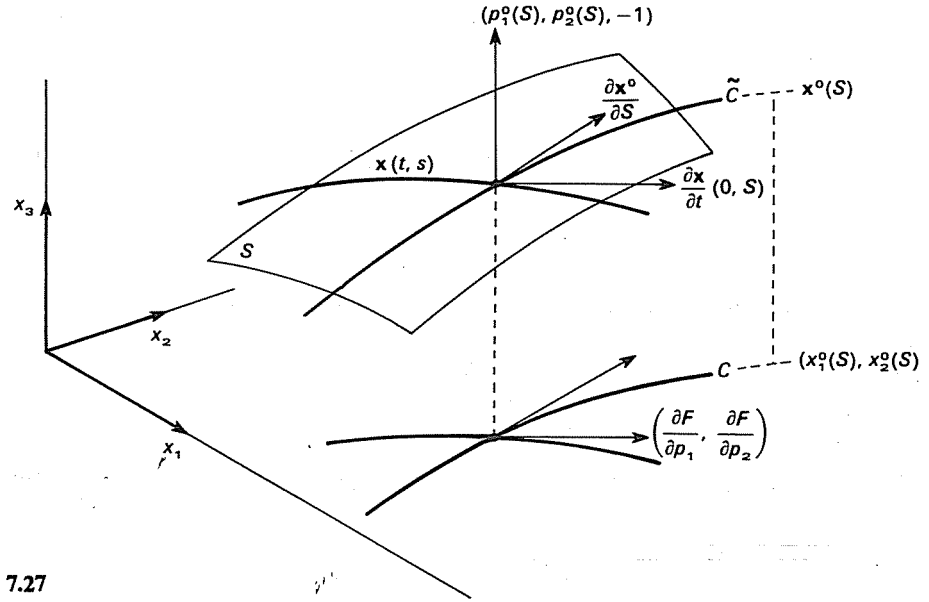


Figura 7.27

Resumindo, a questão se reduz a resolver o problema de Cauchy (23) e (24) em que os dados iniciais devem satisfazer as condições de compatibilidade (18), (19) e de transversalidade (25).

Com isto construímos uma superfície $\mathbf{x}(t, s)$ próxima à curva C que satisfaz $F(\mathbf{x}(t, s), \mathbf{p}(t, s)) = 0$, que pode ser parametrizada por uma função $\bar{u}(x_1, x_2)$ e

$$x_3(t, s) = \bar{u}(x_1(t, s), x_2(t, s))$$

pela Condição (25).

Para que $u(x_1, x_2)$ seja solução, é necessário ainda mostrar que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = p_1 \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} = p_2 \end{cases}$$

Se mostrarmos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_3}{\partial t} = p_k \dfrac{\partial x_k}{\partial t} = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} \dfrac{\partial x_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial s} = p_k \dfrac{\partial x_k}{\partial s} = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial s} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} \dfrac{\partial x_2}{\partial s} \end{cases} \tag{26}$$

e observarmos que $\dfrac{\partial x_k}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial x_k}{\partial s}$ são linearmente independentes, a equação

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial s} & \dfrac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 - \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \\ p_2 - \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0 \tag{27}$$

nos fornecerá $p_1 = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}$ e $p_2 = \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}$.

Das equações bicaracterísticas, concluímos que

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = p_k \frac{\partial x_2}{\partial t} \tag{28}$$

e, portanto, a primeira equação em (26) é automaticamente satisfeita.

Consideremos agora

$$\frac{\partial x_3}{\partial s} - p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} = \varphi(t, s)$$

e verifiquemos que da condição de compatibilidade temos $\varphi(0, s) = 0$. Então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial s} - \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial s} - p_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x_3}{\partial t} - p_k\right) + \frac{\partial p_k}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} - \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial s}$$

Usando (28), obteremos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial p_k}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} - \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial s}$$

e com as equações bicaracterísticas (22), vem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial s} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial s}\right) + \frac{\partial F}{\partial x_3} p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial s} F(x(t, s), p(t, s)) + \frac{\partial F}{\partial x_3}\left(p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} - \frac{\partial x_3}{\partial s}\right)$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi \frac{\partial F}{\partial x_3}$$

Desta forma, φ satisfaz uma equação diferencial linear e condições iniciais nulas; logo, pelo Teorema de Unicidade de Solução para o Problema de Cauchy (Teorema da Secção 4.5) temos que $\varphi(t, s) \equiv 0$ para todo t e s.

Temos agora os argumentos necessários para a demonstração do seguinte teorema:

Teorema Seja $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ uma função de $\mathbb{R}^5$ em $\mathbb{R}$, diferenciável continuamente até segunda ordem e tal que $\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)^2 \neq 0$.

Dada então uma curva C, $\mathbf{x}^0(s) = (x_1^0(s), x_2^0(s))$ e funções continuamente diferenciáveis $x_3^0(s)$ e $p_1^0(s), p_2^0(s)$ satisfazendo as Condições de compatibilidade (18), (19) e de transversalidade (25), existe uma única superfície $x_3 = u(x_1, x_2)$ nas imediações de $C = (x_1^0(s), x_2^0(s), x_3^0(s))$ que satisfaz a equação $F(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0$ e as condições iniciais.

Observações:

a. Se a equação diferencial é a de Hamilton-Jacobi

$$H(\mathbf{x}, \nabla u) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

e H não depende de $u = x_{n+1}$. Então as equações bicaracterísticas (22) são as próprias equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_k}{\partial t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dfrac{\partial p_k}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_k} \end{cases}$$

para a função hamiltoniana H, e a equação de $u = x_{n+1}$ é dada por

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t} = p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}$$

b. Se o problema é n-dimensional, isto é, se $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$ é função de $2n+1$ variáveis, então a condição inicial é dada em uma hipersuperfície S em $\mathbb{R}^n$ (isto é, uma região em $\mathbb{R}^n$ parametrizada por $n-1$ parâmetros $x^0(s_1, \ldots, s_{n+1}) = x^0(s)$) tal que os $n-1$ vetores $\dfrac{\partial x^0}{\partial s_k}$ sejam linearmente independentes. As condições iniciais incluem o vetor normal $(p_1(s), \ldots, p_{n-1}(s), -1) = N(s)$ que deve satisfazer as condições de compatibilidade

(*i*) $\dfrac{\partial x^0}{\partial s_k} \cdot N(s) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$

(*ii*) $F(x^0(s), p^0(s)) = 0$

(*iii*) $\dfrac{\partial x_{n+1}^0}{\partial s_j} = p_k \dfrac{\partial x_k^0}{\partial s_j}$

e a condição de transversalidade.

EXERCÍCIOS

1. Resolva

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + x^2\right]$$

$$S(x, 0) = \phi(x)$$

2. Considere uma **p**-família de planos em R^{n+1}

$$u = \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle + f(\mathbf{p}) \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

a. Obtenha a equação parametrizada da envoltória

$$\begin{cases} u = \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle + f(\mathbf{p}) \\ \mathbf{x} = -\nabla f(\mathbf{p}) \end{cases}$$

e mostre que se $\det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right) \neq 0$ então $\nabla_{\mathbf{x}} u = \mathbf{p}$ e que $u = u(\mathbf{x})$ é solução (dita singular) da equação de Clairaut $u = \langle \mathbf{x}, \nabla u \rangle + f(\nabla \mathbf{u})$.

b. Estude esta equação pelo método das características.

c. Analise geometricamente o problema no caso $n = 1$ em que temos a equação diferencial ordinária de Clairaut.

d. Considere $n = 2$ e $\mathbf{p} = \varphi(\alpha)$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Obtenha a envoltória da α-família de planos resultantes. Mostre que esta envoltória é uma solução da equação de Clairaut dependente da função arbitrária φ.

e. Analise o contato dos planos tangentes com a envoltória singular (*a*) e a anterior (*d*).

f. Mostre que a envoltória singular é equivalente à transformação de Legendre-Fenchel (Secção 7.3.5) entre f e u.

O leitor poderá prosseguir no estudo deste importante tópico consultando Courant-Hilbert e Gantmacher*.

---

* COURANT, R. & Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. New York, Wiley, 1962, 2v.
Para a conexão deste tópico com a Mecânica Clássica veja GANTMACHER, F. *Lectures on Analytical Mechanics*. Moscou, Mir, 1970.

ÍNDICE REMISSIVO

Abstração, 7
Airy, equação de, 211
Algoritmo de Euclides, 152
Alometria, 57-58, 81
Análise de pulsos, 181-187
Aplicação, 7
Atrator, 339, 451
Auto-adjunta, forma, 205

Banach, teorema de, 452
Barras elásticas, 437
Bernoulli, equações de, 78
Bessel, equação de, 218
  de ordem zero, 226
Bifurcação de Hopf, 375
Biodigestores, 403-411
Biomatemática, 442
Bolzano-Weierstrass, teorema de, 366
Braquistócrona, 434

Campo de velocidades, 472
Capacitância, 120
Caracterização, conceito de, 156
Catenária, 91-92
Cauchy
  equação diferencial de, 479
  problema de, 16, 26, 115, 130, 133, 175, 202, 251-254, 266, 324, 354, 463, 541, 551
    homogêneo, 136
    linear, 279-287
  teorema de, 216-217
Célula, crescimento de uma, 30-34
Ciclo limite estável, 375
Circuitos elétricos *RLC*, 120-123
Clairaut, equação de, 78, 83-85
Compartimentos, modelos de, 311-315
Competição entre espécies, 447
Condição de fronteira, 532
Condições
  de choque, 175-178
  laterais, 127
Cone de Monge, 562
Conservação, lei de, 477
Contrações, 452
Coordenadas normais, 297
Corda suspensa, 436

Derivação, teorema da, 249-259
Desintegração radioativa, 36-40
Deslocamento, teorema do, 248-249
Despoluição de lagoas, 67-71
Difusão
  de calor, 43-45
  de moléculas, 45-47
  de partículas, 497
Dinâmica populacional, 48
Dipolos, 120
Dirac
  função delta de, 259-263
  superposição de, 232-246
Dirac-Green, princípio de superposição de, 181-187
Dirichlet, problemas de, 536
Distribuição de partículas, 127-128
Drogas, absorção de, 40
Duhamel, método de, 178-181

Equação(ões)
  de Airy, 211
  de Bernoulli, 78
  de Bessel, 218
    de ordem zero, 226
  de Clairaut, 78, 83-85
  de conservação, 473
    da quantidade de movimento, 477
    de primeira ordem, 528
  de diferenças, 9
    de primeira ordem, 104-110
    ordens de, 106
  de difusão, 484, 497, 531
  de equilíbrio, 536
  de Euler-Lagrange, 425-442
  de Hamilton-Jacobi, 515, 530
  de Laplace, 502
  de Legendre, 213-216
  de McKendrick-von Foerster, 489
  de Poisson, 509
  de Riccati, 78, 86-89
  de segunda ordem auto-adjuntas, 205-207

de Van Der Pol, 374
de von Bertalanffy, 79-82
diferenciais
autônomas, 24-29
breve histórico das, 7-9
de Cauchy, 479
e equação de diferenças, 9
e modelos matemáticos, 9-13
e valores complexos, 139-140
fundamentais, 14-18
ordinárias
conceitos básicos de, 11
de coeficientes constantes, sistemas de, 288-293
de primeira ordem, 14-110
equação geral, 18
lineares, 111
com coeficientes constantes, 140-187
de coeficientes variáveis, 202-246
modelos matemáticos com, 114
princípio de superposição, 131-140
sistemas de, 269-320
para funções de variáveis reais, 139-140
parciais, 469-568
clássicas, origem de, 470
classificação das, 528
de primeira ordem, 528
e quase lineares, 547
escalares e não lineares, 530
métodos
das características, 538
de resolução para, 538
não lineares, 561
de segunda ordem, 531
de vibração, 534
e propagação de ondas, 534
para a conservação da massa, 475
exatas, 93-100
homogênea, 58-64, 143-147
indicial, 222
irregulares, 204
lineares
de diferenças finitas, 187, 201
de primeira ordem, 64-66
estabilidade em, com coeficientes constantes, 155-162
não homogênea, 73
não homogênea, 147-154, 162, 232-246
resolução da, 275-279
não lineares, 321-424
estudo analítico, 425-468
quase homogêneas, 60
redutíveis, 89-92
Euclides, algoritmo de, 152
Euler
e Liouville, teorema de, 272-275
equações exatas e condições de, 93-96
Euler-Lagrange, equações de, 425-442
Existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy linear, 279-287
Experimentação, 7
Epidemia, 447
Espaço de configuração, 490
Espelho parabólico, 98-100
Espiral exponencial, 341
Estabilidade
conceito de, 156, 157
assintótica, 157
critério de, 158-159
teoria da, 363-368

Fator integrante, 96-100
Fermat, princípio de, 425
Fibonacci, seqüência de, 194-199
Fick, lei de, 45, 312
Flexibilidade, matriz de, 294
Fluxo de massa, 477
Fórmula
de Reynolds, 474
de Taylor, 369
Formulação variacional, 438
Fourier
série de, 133
teoremas de, 147
transformada de, 163
Freqüências naturais, 297
Frobenius, teorema de, 204
Fuchs-Frobenius, teorema de, 221
Função(ões)
de Green, 232-246
de Heaviside, 172-175, 254
de Neumann, 228
de transferência do dispositivo linear, 166
geradoras, 199-201

Geometria de Poincaré-Lobatchevski, 435
Gravitação universal, lei da, 411-416
Green
função de, 275-279
teorema de, 240

Hamilton, princípio de, 512
Heaviside, função de, 172-175, 254
Henry, lei de, 120
Huygens, princípio de, 515

Indutância, 120
Inflação, juros compostos e, 34-35
Influências, matriz de, 294
Integração, fator de, 64
Integrais, 355
Integrante, fator, 96-100
Isóclinas, 18

Juros compostos e inflação, 34-35

Kirchhoff, leis de, 121, 288
Kolmogorov, modelo de, 390

Lagrange
  método de redução de ordem de, 205
  teorema de, 206
Lagrange-Dirichlet, princípio de, 357
Lamerey, diagrama de, 445
Laplace
  equação de, 502
  transformada de, 246-263, 315-320
    de funções descontínuas, 254-258
Laurent, série de, 218
Lei(s)
  das malhas, 121
  de conservação
    de energia, 484
    de massa com difusão, 486
    em dinâmica populacional, 488
    multidimensional, 490
  de Fick, 45, 312
  de Henry, 120
  de Kirchhoff, 121, 288
  de Malthus, 321
  de Ohm, 120
  de Snell, 425
  do isocronismo dos pequenos desvios, 387
  dos nós, 121
  geral de conservação, 477
Linearidade, 111
  teorema de, 248
Linhas
  de fluxo, 102
  equipotenciais, 102
Lotka-Volterra, modelo de, 321
Lyapunov, método de, 363-368
Lyapunov-Poincaré, teorema da linearização de, 370

Malthus
  lei de, 48-53, 321
  modelo de, 443
Matriz
  de flexibilidade, 294
  de influências, 294
  inercial, 295
  wronskiana, 270
Meio contínuo, descrição de, 471
Mecânica e equações diferenciais, 8
Método(s)
  das perturbações, 457
  de Duhamel, 178-181
  de Euler, 21
  de Euler-Frøbenius, 112
  de Expansão em Séries, 21, 22
  de Lyapunov, 363-368
  de perturbação regular, 326
  de quase inversão, 151-154
  de redução de ordem de Lagrange, 205
  de superposição de Dirac, 232-246
  iterativo, 21, 22
    para equações funcionais, 461
Modelagem, 6
Modelo(s)
  de compartimentos, 311-315
  de Harrod, 109-110
  de Kolmogorov, 390
  de Lotka-Volterra, 321
  de Verhulst, 443
  geométricos, 100-104
  matemáticos, 3-7
    e as equações diferenciais, 9-13
Modificação, 7
Modos normais de vibração, 297
Movimento
  browniano, 497
  vibratório de um cristal, 303-305

Neumann, função de, 228
Nódulo, 339

Ohm, lei de, 120
Ondas
  de choque, 551
  monocromáticas, 128-130
Operador de difusão, 127
Operadores
  diferenciais lineares singulares com coeficientes analíticos, 217-232
  lineares não singulares com coeficientes analíticos, 207-217
Orçamento familiar, 108-109
Oscilador harmônico, 115
  clássico, 117
  estabilidade do, 343

Parâmetros, método da variação de, 73
Partículas, transporte de, 86-87
Pêndulo, movimento de, 117
Poisson, equação de, 509
Ponto(s)
  críticos, 323, 331
    atrator, 339
    centro, 340
    instável, 333
    nódulo, 339
  de equilíbrio, 323
  de sela, 337
  estacionários, 25
  singular isolado, 59
  singulares, 25
Primeira ordem, equações de diferenças de, 104-110

Princípio(s)
de Conservação e equações diferenciais parciais clássicas, 470
de Dirichlet-Lagrange, 505
de energia mínima, 505
de Fermat, 425
de Hamilton, 512
de Huygens, 515
de Lagrange-Dirichlet, 357
de otimização de Bellman, 520
de superposição de Dirac-Green, 181-187
variacionais, 503
Problema semidiscretizado da corda vibrante, 190-194
Propagação de ondas, 435

Quase inversão, método de, 151-154
Quase polinômios, 368

Rede de circuitos, 123-124
Regime transiente e permanente, 164, 165
Representação espectral, 163
Repulsor, 451
Resistência, 120
Resolução, 7
Ressonância, 155
externa e interna, 168-172
Reynolds, fórmula de, 474
Riccati, equação de, 78, 86-89
Routh Hurwitz, teorema de, 159
Ruminantes, digestão de, 72-76

Separatriz, 351
Seqüência de Fibonacci, 194-199
Série(s)
de Laurent, 218
de potências, 207-211
Singularidade regular, 204
Sistema(s)
autônomo(s), 324-333
funções integrais de um, 354-362
lineares, 334-354
quase lineares, 369-424
conservativos, 293-310
de equações de reação e difusão, 502
lineares
não homogêneos, 315-320
propriedades básicas, 268-272
mecânico, 118
Snell, lei de, 425
Sturm-Liouville, problema de, 243
Superpopulação, modelo de
Ayala, Ehrenfeld e Gilpin, 53
Goel, Maitra e Montroll, 53
Gompertz, 53
Smith, 53

Taylor
fórmula de, 369
teorema de, 147
Teorema
da derivação, 249-259
da função implícita inversa, 456
da linearidade, 248
da linearização de Lyapunov-Poincaré, 370
de Banach, 452
de Bolzano-Weierstrass, 366
de Eulér e Liouville, 272-275
de Existência e Unicidade, 21, 176, 267, 268, 288, 551
e dependência de parâmetros para soluções de problemas de Cauchy, 324, 463
para equações diferenciais ordinárias lineares, 135
para o problema
de Cauchy, 23
inicial, 26
de Frobenius, 204
de Fuchs-Frobenius, 221
de Green, 240
de Lagrange, 206
de Routh Hurwitz, 159
do deslocamento, 248-249
Teoria da estabilidade, 363-368
Tensão, 478
Tração radioativa em glóbulos vermelhos, 313-314
Trajetória ortogonal, 100
Transformada
de Laplace, 246-263, 315-320
de funções descontínuas, 254-258
$\mathcal{Z}$, 199-201
Tubo de fluxo, 327

Validação, 7
Van Der Pol, equação de, 374
Variáveis, equação com separação de, 55-57
Vibrações
mecânicas de pequena amplitude, 114-119
moleculares, 300-303
von Bertalanffy, equações de, 79-82